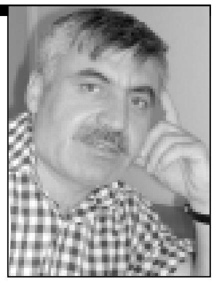
Eğitim Köşesi

Süheyla Elmas[1] ve Seyfullah Hızarcı[2]
suheylaelmas@mynet.com - seyfullahhizarci@mynet.com

Bir Görselleştirme Etkinliği
Kâğıt Katlama

Son yıllarda matematik eğitimiyle ilgili çalışmalar, doğrudan uygulamadan hareketle, öğrencinin kuramı tek başına ya da arkadaşlarıyla bulmasına odaklanmaya başladı. Bu amaçla, ABD'nin Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi'nin (NCTM) araştırmaları arasında yer alan ve bize de zevk veren aşağıdaki çalışmayı matematikseverlerle paylaşmak istedik.

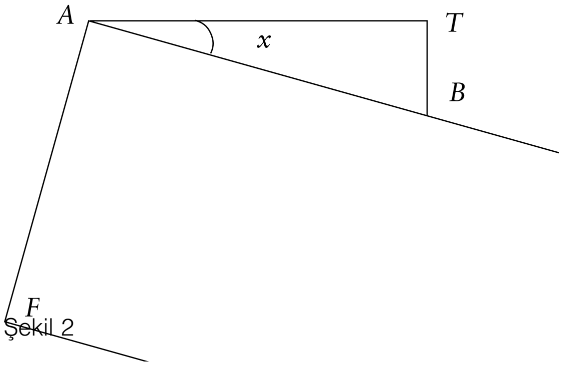
1997'de, matematiğe hazırlık eğitim programı uygulayan bir kolejde, yaş ortalamaları 16-17 olan öğrenciler kâğıt katlayarak açıların limitini araştırmışlardır. [1, 2]'den esinlenerek yaratılan bu araştırmayı ilginç kılan, pedagojik değerinin yanısıra, geometrik, cebirsel ve analitik kavramları harmanlamasıdır.

Amaç. Öğrenciler uzun bir dikdörtgen kâğıtla çalışmaya başlarlar. Kâğıt, birinci şekilde gösterilen A ve B noktalarını birleştirecek biçimde katlanır. Böylece 90°'den küçük bir TAB açısı üretilir. Amaç, TAB açısı ne olursa olsun, bu açıdan hareketle 60°'lik bir açıya yakınsamaktır. 60°'lik açıya hiçbir zaman ulaşılamaz elbette, ama aşağıda açıklayacağımız yöntem "sonsuza dek götürülürse" o zaman 60°'lik bir açı elde edilir. Öğretmenin beklentisi, öğrencinin bu olguyu olabildiğince kendi kendine anlaması ve bulabilmesidir.

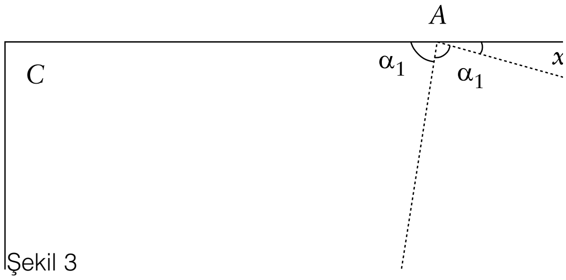
Bu etkinlik, öğrenciler ikişer kişilik gruplar halinde çalıştıklarında en verimli olur.

Birinci Aşama. İkinci şekilde gösterildiği gibi kâğıdın üst kısmı katlanarak AB ve AC kenarları üstüste getirilir. Kâğıt yeniden açılıp eski haline getirildiğinde (üçüncü şekil) elde edilen AF doğrusu CAB açısını iki eşit açıya böler. Cetvel ve kalemle

Şekil 1



Şekil 2



Şekil 3

katlanan kısımlar işaretlenir. AFD ve CAF açıları da eşittir elbette. Bu açıya α_1 adını verelim:

$$\alpha_1 = m(AFD) = m(FAC) = m(FAB) = 180/2 - x/2.$$

İkinci Aşama. Kâğıdın alt kısmını oluşturan FE kenarı AF kenarının üstüne gelecek biçimde katlanır ve böylece FG doğrusu elde edilir (Şekil 4). AFG ve EFG açıları eşittir elbette (Şekil 5). Kolay bir hesapla bu açıların $180/2 - 180/4 + x/4$ olduğu hesaplanır. AGF ve EFG açıları da eşittir. Bu açılara α_2 diyelim:

1 Atatürk Üniversitesi Matematik Eğitimi Bölümü 4. sınıf öğrencisi.
2 Atatürk Üniversitesi Matematik Eğitimi Bölümü öğretim üyesi.

$\alpha_2 = m(AFG) = m(EFG) = m(FGA)$
$= 180/2 - 180/4 + x/4.$

Üçüncü Aşama. Bir sonraki aşamada, kâğıt, *CG* kenarı *GF* kenarının üstüne gelecek biçimde katlanacaktır. Kâğıdı bir alttan bir üstten katlayarak bu böylecene devam eder.

α_1 ve α_2 açılarını yukarda elde etmiştik. Bu yöntemle α_3, α_4, ... açıları elde edilir. Eğer $\alpha_0 = x$ ise,

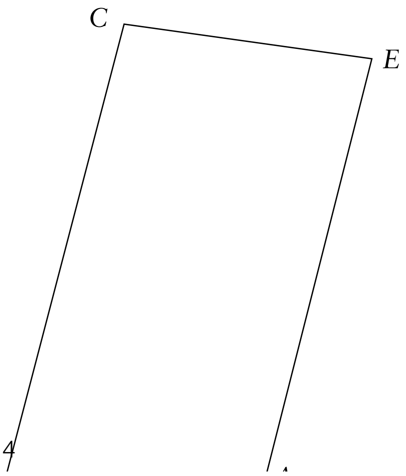
$$\alpha_{n+1} = 180/2 - \alpha_n/2$$

ilişkisi bulunur.

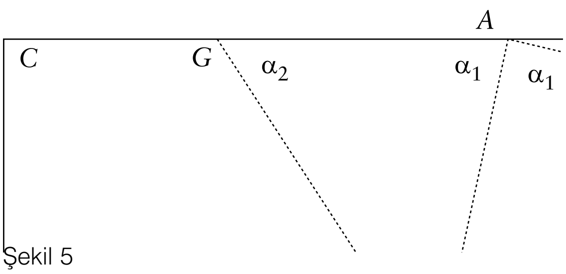
Bir an için α_n dizisinin limiti olduğunu varsayarsak ve bu limite α dersek, yukarıdaki formülden,

$$\alpha = 180/2 - \alpha/2,$$

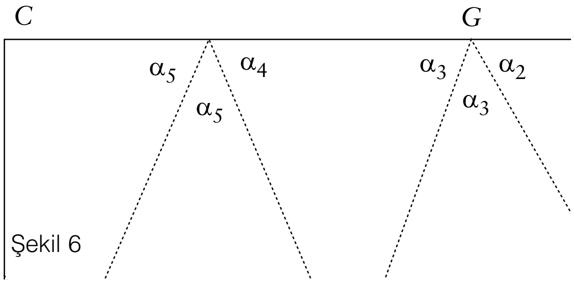
yani $\alpha = 60^o$ bulunur, başladığımız açı olan x'ten bağımsız bir sonuç! İşte öğrenciden bu sonucu bulması beklenmektedir. Bu da dersin keşif bölümünü oluşturur.



Şekil 4



Şekil 5



Şekil 6

Keşif. Dersin keşif bölümünde, öğrenciler kâğıdın şeritlerini en az altı kez katlarlar, yani en azından α_6'yı üretirler ve ürettikleri açıları ya gönyeleriyle ölçerler ya da kuramsal olarak hesaplarlar. (Bakınız şekil 6). Bunun için, şerit oldukça uzun olmalıdır.

Öğrenciler ilk açının ne olduğunun önemli olmadığını keşfetmeli. Birinci, ikinci ve üçüncü ve sonraki katlamalar sonunda oluşturulan açılar bazen 60°'den fazla bazen 60°'den az olmasına karşın, 60°'ye yakınsarlar.

Geometri sınıfında bu etkinlik bir analiz yöntemi de geliştirebilir: Öğretmen başlangıç açısının bir değişken olduğunu belirterek öğrencilerin analize başlamalarına yardımcı olabilir. Öğrenciler katlama ve iki eşit parçaya bölme sonucu üretilen diğer açıları bulurlar. İpucu olarak öğretmen başlangıç açısına özel bir değer verebilir. Örneğin *TAB* için 20° der ve bu sayı temel alınarak oluşturulan açılar ölçülür ve not edilir. Sonunda öğretmen öğrencileri cesaretlendirir, ikişerli veya dörderli gruplar halinde çalışmaya yöneltir. Bulunan sonuçları kaydettirir. Aşağıdaki tablo bir örnektir, ama öğrenciler kendi sonuçlarını düzenlemek için kendi yollarını oluşturabilirler.

	Açı	Örnek: $x = 17^o$
Başlangıç	$\alpha_0 = x$	17^o
Birinci adım:	$\alpha_1 = 180/2 - x/2$	$81{,}5^o$
İkinci adım:	$\alpha_2 = 180/2 - 180/4 + x/4$	$49{,}25^o$
Üçüncü adım:	$\alpha_3 = 180/2 - 180/4 + 180/8 - x/8$	65,375
Dördüncü adım:	$\alpha_4 = 180/2 - 180/4 + 180/8 - 180/16 + x/16$	57,3125

Genel formül olarak, $\alpha_n = 180/2 - 180/4 + 180/8 + \ldots + (-1)^{n-1}180/2^n + (-1)^n x/2^n$ ifadesi bulunur. Son terim dışında, bu bir geometrik seridir ve n sonsuza gittiğinde son terim kaybolur ve

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{180}{2^n} = \frac{180}{3} = 60°$$

bulunur. ♣

Kaynakça

[1] Hilton, Peter ve Pederson, **Build Your Own Polyhedra**, Menlo Park, Calif.: Addison–Wesley Publishing Co.,1994.

[2] Sallee, Tom; Judith Kysh, Elaine Kasimatis ve Brian Hoey, **Mathematics**, Sacramento, Calif.: CPM Educational Program, 2001.