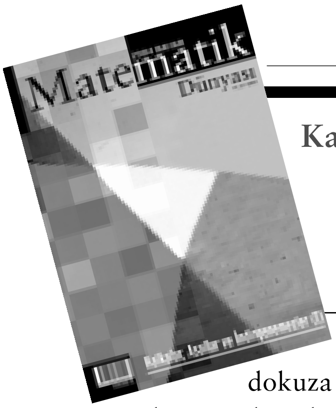

Kapak Konusu: Halkalar, Asallar ve İndirgenemezler (1)

Sayıları Sıfırlamak

Ali Nesin* / *anesin@bilgi.edu.tr*

Bir tamsayının üçe ya da dokuza tam olarak bölünüp bölünmediğini anlamak için çok bilinen bir yöntem vardır: Sayının basamakları toplanır, eğer bu toplam üçe/dokuza bölünüyorsa, sayı da üçe/dokuza bölünüyordur. Örneğin, 2571 üçe bölünür, çünkü 2 + 5 + 7 + 1, yani 15, üçe bölünür. Öte yandan 2571 dokuza bölünmez, çünkü 15 dokuza bölünmez.

Bu yöntemle, bir sayı üçe/dokuza bölündüğünde kalan da bulunabilir. Örneğin 1994 üçe bölündüğünde kalan 2'dir, çünkü 1 + 9 + 9 + 4, yani 23, üçe bölündüğünde kalan 2'dir. Aynı yöntemle, 1994 dokuza bölündüğünde kalanın 5 olduğu anlaşılır.

Onbire bölünebilme yöntemi de – yukardaki yöntemler kadar olmasa bile – oldukça iyi bilinir. Bir tamsayının onbire tam bölünüp bölünmediğini anlamak için, şunlar yapılır: 1) Tamsayının birinci, üçüncü, beşinci... tek sayılı basamakları toplanır; 2) Sonra ikinci, dördüncü, altıncı... çift sayılı basamakları toplanır; 3) Bu iki toplamdan küçüğü büyüğünden çıkarılır; 4) Eğer çıkarma sonucu bulunan sayı onbire bölünüyorsa tamsayımız da onbire bölünüyor demektir.

Örneğin, 2753087 onbire bölünmez, çünkü

$$2 + 5 + 0 + 7 = 14,$$
$$7 + 3 + 8 = 18$$

ve aralarındaki fark 4'tür. Öte yandan, 2678430964 onbire bölünür, çünkü

$$2 + 7 + 4 + 0 + 6 = 19,$$
$$6 + 8 + 3 + 9 + 4 = 30$$

ve aralarındaki fark 11'dir. Bu yöntemle kalan da bulunabilir, yazının sonunda umarım okur kalanın nasıl bulunabileceğini kendi kendine çıkaracaktır.

İşte bu yazının amacı yukardaki yöntemlerin neden başarılı olduklarını anlamaktır. Ayrıca 7'ye ve 13'e bölünme kuralları da bulacağız. Bulduğumuz kurallar bilinen en kolay kurallar olmayabilir ama olsun... Önemli olan sonuç değil, yöntem!

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi. Yazarın Matematik ve Oyun adlı kitabından derlenmiştir.

Modüler Aritmetik

Bundan böyle 7 sıfıra eşit olsun! "7 sıfıra eşit değil ki," deyip karşı çıkabilirsiniz. Elbette 7 sıfıra eşit değildir. Daha doğrusu **her zaman** eşit değildir. Ama kimi zaman 7 sıfıra eşittir. Bir örnekle bu savımı savunayım: Diyelim bugün günlerden pazar ve size şöyle bir soru soruldu: 145 gün sonra günlerden ne olacak? Her 7 gün sonra günler yinelendiğinden, 140 gün sonra gene pazar olacak, dolayısıyla 145 gün sonraki gün aslında 5 gün sonraki gün. Yani 145 gün sonra günlerden cuma olacak. Bu sorunun yanıtını bulmak için 7'yi sıfır yaptık (aşağıdaki hesapta, ancak 7 sıfıra eşitlendiğinde geçerli olan eşitlikleri $\equiv_7$ olarak gösterdim):

$$145 = 140 + 5 = (7 \times 20) + 5 \equiv_7 (0 \times 20) + 5$$
$$= 0 + 5 = 5.$$

Demek ki günleri hesaplamak için kullanılan aritmetikte 7 sıfıra eşitlenebiliyor.

Yine de dikkatli olmak gerekiyor. Günleri hesaplamakta bile olsa her 7 sıfıra eşit değildir. Bir örnekle bu noktaya açıklık getireyim: Diyelim bugün günlerden pazar ve 256 gün sonraki günü hesaplamak istiyoruz. $256 = (7 \times 36) + 4 \equiv_7 4$ olduğundan 256 gün sonra günlerden perşembe olur. Peki aşağıdaki hesaba ne dersiniz?

$$256 = 2^8 = 2^{7+1} \equiv_7 2^{0+1} = 2.$$

Bu kez değişik bir yanıt bulduk. Bir yerde bir yanlış yaptık, ama nerde?

İkinci hesabımız yanlış. Çünkü ikinci hesabımızda tepede bulunan 8, günleri değil ikileri saymakta kullanılıyor: 2^8 demekle 2'nin kendisiyle sekiz kez çarpılacağı söyleniyor. Yani buradaki sekizin görevi başka. Ama günleri saymakta kullanılan 7'leri hiç çekinmeden sıfırlayabiliriz.

Kimi zaman da 2'yi sıfıra eşitlemek işimize gelebilir. Örneğin, masanın üstünde duran bir paranın tura yüzü görünüyorsa ve bu parayı 145 kez çevirirsek, üste yazı yüzü gelir. Neden? Çünkü, her iki kez çevirdiğimizde, üstte yine tura gözükecek, sanki parayı hiç çevirmemişiz gibi...

Kimi zaman 24'ü sıfıra eşitlemekte yarar vardır. Kimi zamansa 12'yi, 60'ı... Okur örnek bulmakta zorluk çekmeyecektir.

Diyelim, 6'nın sıfır olduğuna karar verdik. Bunun sonuçlarını irdelemeye çalışalım. Eğer $6 \equiv_6 0$ ise,

$$7 = 6 + 1 \equiv_6 0 + 1 = 1.$$

Bunun gibi $8 \equiv_6 2$ ve $9 \equiv_6 3$. Peki -4 kaçtır? Hesaplayalım:

$$-4 = 0 - 4 \equiv_6 6 - 4 = 2.$$

Demek -4, 2'ye eşitmiş. Şimdi de -124'ü hesaplayalım:

$$\begin{aligned} -124 &= -120 - 4 = -(20 \times 6) - 4 \\ &\equiv_6 -(20 \times 0) - 4 = 0 - 4 \equiv_6 6 - 4 = 2. \end{aligned}$$

Demek -124 de 2'ye eşit. Kolayca anlaşılacağı gibi 6 sıfıra eşit olunca, her tamsayı $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin sayılarından birine eşittir.

"İyi, güzel, ama ne işe yarar?" diyebilirsiniz. Kimi zaman 6'yı sıfırlamak yararlıdır gerçekten. Örneğin, bir tamsayı altıya bölündüğünde kalanı hesaplamak istediğimiz zaman hiç çekinmeden 6'yı sıfırlayabiliriz; çünkü 6 altıya bölündüğünde kalan sıfırdır. Eğer $(17 \times 26) + 25$ altıya bölündüğünde kalanı bulmak istiyorsak, şöyle bir hesap yapabiliriz:

$$(17 \times 26) + 25 \equiv_6 (5 \times 2) + 1 = 11 \equiv_6 5,$$

ve bu sayı altıya bölündüğünde kalan 5'tir.

Yukarda yazdıklarımızın kanıtı oldukça kolaydır. Yavaş yavaş kanıtlayalım. Önce tanımdan başlayalım. n sıfır olmayan bir doğal sayı olsun. Bundan böyle eğer a ve b tamsayılarsa, $a \equiv_n b$ terimi, "$a - b$ sayısı n sayısına tam bölünür" anlamına, ya da başka bir deyişle, "eğer n sıfırsa, a sayısı b sayısına eşittir" anlamına gelecek. "$a \equiv_n b$" aynı zamanda, "a ve b sayıları n'ye bölündüğünde kalanları eşittir" anlamına da gelir.

Birinci tanımımızı kullanarak $\equiv_n$ kavramı üzerine birkaç olgu kanıtlayalım:

Olgu 1. $a \equiv_n a$.

Kanıt: $a - a$, yani 0, elbette n'ye bölünür. □

Olgu 2. *Eğer* $a \equiv_n b$ *ise*, $b \equiv_n a$.

Kanıt: Eğer $a-b$ sayısı n'ye bölünüyorsa, $b-a$ sayısı da n'ye bölünür. □

Olgu 3. *Eğer* $a \equiv_n b$ *ve* $b \equiv_n c$ *ise*, $a \equiv_n c$.

Kanıt: Eğer $a - b$ ve $b - c$ sayıları n'ye bölünüyorsa, $a - c$ sayısı da n'ye bölünür, çünkü

$$a - c = (a - b) + (b - c).$$ □

Olgu 4. *Eğer* $a \equiv_n x$ *ve* $b \equiv_n y$ *ise*, $a + b \equiv_n x + y$.

Kanıt: Eğer $a - x$ ve $b - y$ sayıları n'ye bölünüyorsa, $(a + b) - (x + y)$ sayısı da n'ye bölünür, çünkü $(a + b) - (x + y) = (a - x) + (b - y)$. □

Olgu 5. *Eğer* $a \equiv_n x$ *ve* $b \equiv_n y$ *ise*, $ab \equiv_n xy$.

Kanıt: $ab - xy = a(b - y) + y(a - x)$ olduğundan ve $a - x$ ve $b - y$ sayıları n'ye bölündüğünden, $ab - xy$ sayısı da n'ye bölünür. □

Olgu 6. *Eğer* $a \equiv_n x$ *ise ve* $m > 0$ *bir tamsayıysa* $a^m \equiv_n x^m$.

Kanıt: Olgu 5 kullanılarak bu olgu m üzerine tümevarımla kolaylıkla kanıtlanır. Kanıtlayalım. Eğer $m = 1$ ise sorun yok. Olgumuzun varsayımına göre $a \equiv_n x$. Şimdi bu olgunun m sayısı için geçerli olduğunu varsayalım (tümevarım varsayımı) ve $m + 1$ sayısı için kanıtlayalım. Yani tümevarım varsayımımıza göre $a^m \equiv_n x^m$ eşitliğini biliyoruz; $a^{m+1} \equiv_n x^{m+1}$ eşitliğini kanıtlamaya çalışacağız. Şimdi $a^m \equiv_n x^m$ (tümevarım varsayımı) ve $x \equiv_n a$ (olgumuzun varsayımı) eşitliklerinden ve Olgu 5'ten, $a^{m+1} = a^m a \equiv_n x^m x = x^{m+1}$ eşitliği çıkar. □

Bu olguları kullanarak birkaç alıştırma yapalım:

Alıştırma 1. 17^{25}, 8'e bölündüğünde kaç kalır?

Yanıt: $17^{25} \equiv_8 1^{25} = 1$ olduğundan kalan 1'dir.

Alıştırma 2. 17^{25}, 9'a bölündüğünde kaç kalır?

Yanıt: $17^{25} \equiv_9 (-1)^{25} = -1 \equiv_9 8$ olduğundan, yanıt 8'dir.

Alıştırma 3. 17^{25}, 7'ye bölündüğünde kaç kalır?

Yanıt: Bu kez çözüm biraz daha zor. Önce $17 \equiv_7 3$ olduğundan, $17^{25} \equiv_7 3^{25}$ eşitliğini buluruz. Demek 3^{25}'i hesaplamalıyız. Şimdi de, $3^3 = 27 \equiv_7 -1$ eşitliğinden,

$$3^{25} = 3^{3\times 8 + 1} = (3^3)^8 \times 3 \equiv_7 (-1)^8 \times 3 = 3$$

çıkar.

Alıştırma 4. m herhangi bir doğal sayı olsun. 10^m üçe ya da dokuza bölündüğünde kaç kalır?

Yanıt: $10 \equiv_3 1$ ve $10 \equiv_9 1$ olduğundan, 10^m sayısı üçe ya da dokuza bölündüğünde 1 kalır.

Şimdi bir sayının üçe ve dokuza bölünebilme yönteminin neden başarılı olduğunu anlayabiliriz. Herhangi bir sayı alalım, diyelim 58246309. Ve şimdilik n, ya 3 ya da 9 olsun. Dördüncü alıştırmayı gözönünde bulundurarak kolaylıkla hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned}58246309 &= (5\cdot10^7) + (8\cdot10^6) + (2\cdot10^5) + (4\cdot10^4)\\ &\quad + (6\cdot10^3) + (3\cdot10^2) + (0\cdot10^1) + 9\\ &\equiv_n (5\cdot1^7) + (8\cdot1^6) + (2\cdot1^5) + (4\cdot1^4) +\\ &\quad (6\cdot1^3) + (3\cdot1^2) + (0\cdot1^1) + 9\\ &= 5 + 8 + 2 + 4 + 6 + 3 + 0 + 9 = 37.\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi, 58246309 sayısının üçe ya da dokuza bölündüğünde kalanı, 37 sayısının aynı sayıya bölündüğünde kalanına eşit.

Son olarak onbire bölünebilme kuralına bakalım. $10 \equiv_{11} -1$ olduğundan,

$10^n \equiv_{11} 1$ eğer n çiftse

$10^n \equiv_{11} -1$ eğer n tekse.

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}58246309 &= 5\cdot10^3 + 8\cdot10^6 + 2\cdot10^5 + 4\cdot10^4 +\\ &\quad 6\cdot10^3 + 3\cdot10^2 + 0\cdot10^1 + 9\\ &\equiv_{11} - 5 + 8 - 2 + 4 - 6 + 3 - 0 + 9 = 11 \equiv_{11} 0.\end{aligned}$$

Demek ki 58246309 onbire bölünür.

Onluk tabanda yazılan bir sayının 7'ye ya da 13'e bölünüp bölünmeyeceğini anlamanın kolay bir yolu vardır. Sayının rakamlarını soldan başlayarak üçer üçer ayırıp bu üç haneli sayıları bir çıkarıp bir toplarız. Elde edilen sayıyla başladığımız sayının, 7'ye ya da 13'e bölündüğünde kalanları aynıdır. Örneğin,

$$45248942567$$

sayısı 7'ye bölündüğünde kalan 3'tür:

$$+567 - 942 + 248 - 45 = -172 \equiv_7 3;$$

ve 13'e bölündüğünde kalan 4'tür:

$$+567 - 942 + 248 - 45 = -172 \equiv_{13} 4.$$

Bunun nedeni,

$$1001 = 7 \times 11 \times 13$$

eşitliğidir. Bu eşitlik sayesinde

$$10^3 \equiv_7 -1 \text{ ve } 10^3 \equiv_{13} -1$$

elde edilir. Bundan da,

$$10^{3n} \equiv_7 (-1)^n \text{ ve } 10^{3n} \equiv_{13} (-1)^n$$

çıkar. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. ♠

Bir Başka 7'ye ve 13'e Bölünme Kuralı

- 564236 gibi herhangi bir sayı alalım. En sondaki 6'yı atıp geri kalan 56423'ten 2 × 6'yı çıkaralım. Eğer bulduğumuz sayı 7'ye bölünüyorsa, ilk sayımız da 7'ye bölünür.

  Genel olarak, verilmiş bir n sayısını $10a + b$ biçiminde yazalım. O zaman,
  $n = 10a + b \equiv_7 10a + b - 21b = 10(a - 2b)$.
  Dolayısıyla, sayfa 16'daki Sonuç 5'ten dolayı, $n \equiv_7 0$ ancak ve ancak $a - 2b \equiv_7 0$ ise.

- 564236 gibi herhangi bir sayı alalım. En sondaki 6'yı atıp geri kalan 56423'e 4 × 6'yı ekleyelim. Eğer bulduğumuz sayı 13'e bölünüyorsa, ilk sayımız da 13'e bölünür.

  Genel olarak, $10a + b$ biçiminde yazılan bir sayının 13'e bölünmesi için gerek ve yeter koşul $a + 4b$'nin 13'e bölünmesidir. Neden?

- $27 \times 37 = 999 = 10^3 - 1$,
  $41 \times 271 \times 9 = 99999 = 10^5 - 1$,
  $73 \times 137 = 10001 = 10^4 + 1$
  eşitliklerinden, bir sayının bu çarpımlarda beliren asallardan birine bölünüp bölünmediğini "kolaylıkla" anlayabiliriz. ♠

$10^k \equiv_n 1$ Denklemini Çözmek

n verilmiş bir sayı olsun. $10^k \equiv_n 1$ denklemini sağlayan en küçük pozitif k sayısını bulmak istiyoruz.

Eğer n, 2'ye ya da 5'e bölünüyorsa böyle bir k yoktur elbet. Ama eğer n, 2'ye ve 5'e bölünmüyorsa, yani 10'a asalsa böyle bir k vardır, üstelik 1'le n–1 arasında vardır böyle bir k. Çünkü,

$$10^0, 10^1, 10^2, ..., 10^n$$

sayılarını n'ye böldüğümüzde hep değişik bir kalan bulamayız. (Yukardaki listede $n + 1$ tane sayı var ve kalanlar 0'la n arasındaki sayılardan olabilir ancak.) Eğer $0 \le j < i < n$ için, 10^i ve 10^j sayılarının n'ye bölündüğünde kalanları aynıysa, o zaman $10^i \equiv_n 10^j$, dolayısıyla $10^j(10^{i-j} - 1) \equiv_n 0$ olur ve sayfa 16'daki Sonuç'tan dolayı $10^{i-j} \equiv_n 1$'dir. Ayrıca k'yı $\varphi(n)$'yi bölen bir sayı olarak seçebiliriz. (Bknz. sayfa 39).

Böyle bir k'yı nasıl bulabiliriz? $1/n$ sayısını 10'luk tabanda yazalım. n, 2 ve 5'e bölünmediğinden, $1/n$ sayısı, 10'luk tabanda yazıldığında belli aralıklarla tekrarlanır, yani belli bir devri vardır. İşte k sayısı o devire eşittir.

Örneğin, $n = 21$ ise,

$$1/21 = 0{,}047619047619047619047619...$$

olduğundan, 1/21'in devri 6'dır ve $10^6 \equiv_{21} 1$. ♠