Cebirsel Çözüm Çıkmazından Geometrik Çözüm Açılımına

Alpaslan Parlakçı* / *aparlakci@bilgi.edu.tr*

Cebirin kurucusu Horasanlı büyük bilim adamı Muhammed Bin Musa al-Harezmi tek bilinmeyenli ikinci dereceden denklemleri cebirsel yolla çözmüştür. O güne kadar bu tür denklemlerin çözümü geometrik olarak yapılırdı, al-Harezmi cebirsel yöntemlere başvuran ilk matematikçidir[1]. Genel olarak cebirsel yöntem daha mekanik olduğundan daha kolaydır. Ancak bazen öylesi denklemlerle karşılaşabiliriz ki, verilen denklem sistemi tek bilinmeyene indirgeninceye kadar (o da indirgenebilirse) derecesi öylesine büyür ki sistemin çözümü cebirsel yoldan pek kolay olmaz, hatta belki olanaksızdır da. İşte bu durumda geometrik yöntem cebirsel yönteme yeğlenebilir.

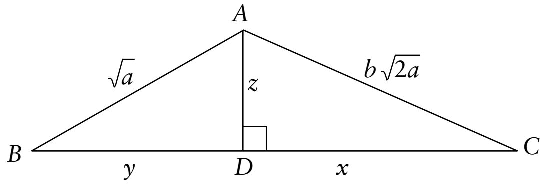
Al-Harezmi

Aşağıda bu duruma örnek bir denklem sistemi ve bu sistemin geometrik çözümünü sunacağız. Bilinmeyen ve bulmak istediğimiz terimlerimize x, y ve z diyelim, bilindiği ya da rastgele seçilebileceği varsayılan terimlere de a ve b diyelim. Sistemimiz şöyle[2]:

1. $x \neq 0$
2. $xy - z^2 \neq 0$
3. $x^2 + z^2 = 2ab^2$
4. $y^2 + z^2 = a$
5. $z(x + y) = ab$

Tüm çözümleri değil, bir tek çözüm bulmak istiyoruz. Elbette, sistemin bir çözümü olması için, (4)'ten dolayı $a \geq 0$ olmalıdır. Biz, a ve b'yi pozitif alacağız.

Çözüm. Geometrik yöntemle çözümü açıklamak üzere aşağıdaki şekildeki gibi bir ABC üçgeni çizelim.



Burada,

$$AB = \sqrt{a},\ AC = b\sqrt{2a},\ m(ADC) = 90°$$

ve $m(BAC) = 135°$'dir. Bu koşulları sağlayan bir üçgen elbette vardır. Şimdi $DC = x$, $BD = y$, $AD = z$ olsun. Öncelikle DC sıfırdan farklı bir uzunluk olduğundan (1)'deki ifade açıktır. BAC açısı 90° olduğunda (2)'deki ifade Öklid bağıntısı gereği bir eşitlik olacaktı; bunun dışındaki durumlarda eşitsizlik durumu korunacaktır; BAC açısı geniş bir açı olduğundan ">" yönlü bir eşitsizlik söz konusudur. (3) ve (4)'te verilen eşitlikler ise ADB ve ADC üçgenlerine Pisagor teoremi uygulandığında rahatça elde edilebilir. (5)'teki eşitlik için ise şunu diyebiliriz: BAC üçgeninin alanı iki ayrı yöntemle hesaplanabilir:

a. AD ve BC uzunluklarını çarpıp ikiye bölersek $z(x+y)$ değerini buluruz.

b. AB, AC uzunluklarını ve $\sin(BAC)$'yi çarpıp ikiye bölersek ab'yi buluruz.

İlgili değerler yerine yazılıp bu farklı alan ifadeleri eşitlendiğinde (5)'teki eşitlik sağlanır.

Şimdi ABC üçgeni bilindiğinden, x, y ve z'yi bulmak sinüs ve kosinüs teoremlerini bilen biri için sorun değildir. ♠

---

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Bilgisayar Bölümü öğretim üyesi.

1 Bknz, MD 2004-IV, sayfa 73, Özer Çözer'in Polinom Denklemleri yazısı.

2 Bu denklem sistemi, Parlakci, M. N. A., E. M. Jafarov, Y.Istefanopulos, **Robust Position and Tracking Variable Structure PD-Controllers Design Methods for Robot Manipulators with Parameter Perturbations**, *WSEAS Transactions on Systems,* Vol.2, No.4, pp.786-795, 2003'te ortaya konan somut bir problemden ortaya çıkmıştır.