

# Cebirsel Çözüm Çıkmazından Geometrik Çözüm Açılımına

Alpaslan Parlakçı\* / [aparlakci@bilgi.edu.tr](mailto:aparlakci@bilgi.edu.tr)



Cebirin kurucusu Horasanlı büyük bilim adamı Muhammed Bin Musa al-Harezmi tek bilinmeyenli ikinci dereceden denklemleri cebirsel yolla çözmüştür. O güne kadar bu tür



Al-Harezmi

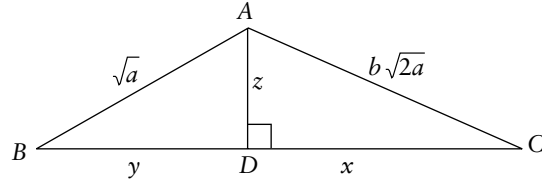
denklemlerin çözümü geometrik olarak yapılırdı, al-Harezmi cebirsel yöntemlere başvuran ilk matematikçidir<sup>1</sup>. Genel olarak cebirsel yöntem daha mekanik olduğundan daha kolaydır. Ancak bazen öylesi denklemlerle karşılaşabiliriz ki, verilen denklem sistemi tek bilinmeyene indirgeninceye kadar (o da indirgenebilirse) derecesi öylesine büyür ki sistemin çözümü cebirsel yoldan pek kolay olmaz, hatta belki olanaksızdır da. İşte bu durumda geometrik yöntem cebirsel yöntemle yeğlenebilir.

Aşağıda bu duruma örnek bir denklem sistemi ve bu sistemin geometrik çözümünü sunacağız. Bilinmeyen ve bulmak istediğimiz terimlerimize  $x$ ,  $y$  ve  $z$  diyelim, bilindiği ya da rastgele seçilebileceği varsayılan terimlere de  $a$  ve  $b$  diyelim. Sistemimiz şöyle<sup>2</sup>:

1.  $x \neq 0$
2.  $xy - z^2 \neq 0$
3.  $x^2 + z^2 = 2ab^2$
4.  $y^2 + z^2 = a$
5.  $z(x + y) = ab$

Tüm çözümleri değil, bir tek çözüm bulmak istiyoruz. Elbette, sistemin bir çözümü olması için, (4)'ten dolayı  $a \geq 0$  olmalıdır. Biz,  $a$  ve  $b$ 'yi pozitif alacağız.

**Çözüm.** Geometrik yöntemle çözümü açıklamak üzere aşağıdaki şekildeki gibi bir  $ABC$  üçgeni çizelim.



Burada,

$$AB = \sqrt{a}, AC = b\sqrt{2a}, m(\angle ADC) = 90^\circ$$

ve  $m(\angle BAC) = 135^\circ$ 'dir. Bu koşulları sağlayan bir üçgen elbette vardır. Şimdi  $DC = x$ ,  $BD = y$ ,  $AD = z$  olsun. Öncelikle  $DC$  sıfırdan farklı bir uzunluk olduğundan (1)'deki ifade açıktır.  $BAC$  açısı  $90^\circ$  olduğunda (2)'deki ifade Öklid bağıntısı gereği bir eşitlik olacaktı; bunun dışındaki durumlarda eşitsizlik durumu korunacaktır;  $BAC$  açısı geniş bir açı olduğundan " $>$ " yönlü bir eşitsizlik söz konusudur. (3) ve (4)'te verilen eşitlikler ise  $ADB$  ve  $ADC$  üçgenlerine Pisagor teoremi uygulandığında rahatça elde edilebilir. (5)'teki eşitlik için ise şunu diyebiliriz:  $BAC$  üçgeninin alanı iki ayrı yöntemle hesaplanabilir:

- a.  $AD$  ve  $BC$  uzunluklarını çarpıp ikiye bölersek  $z(x+y)$  değerini buluruz.
- b.  $AB$ ,  $AC$  uzunluklarını ve  $\sin(\angle BAC)$ 'yi çarpıp ikiye bölersek  $ab$ 'yi buluruz.

İlgili değerler yerine yazılıp bu farklı alan ifadeleri eşitlendiğinde (5)'teki eşitlik sağlanır.

Şimdi  $ABC$  üçgeni bilindiğinden,  $x$ ,  $y$  ve  $z$ 'yi bulmak sinüs ve kosinüs teoremlerini bilen biri için sorun değildir. †



\* İstanbul Bilgi Üniversitesi Bilgisayar Bölümü öğretim üyesi.

1 Bknz, MD 2004-IV, sayfa 73, Özer Çözer'in Polinom Denklemleri yazısı.

2 Bu denklem sistemi, Parlakci, M. N. A., E. M. Jafarov, Y. Stefanopoulos, Robust Position and Tracking Variable Structure PD-Controllers Design Methods for Robot Manipulators with Parameter Perturbations, WSEAS Transactions on Systems, Vol.2, No.4, pp.786-795, 2003'te ortaya konan somut bir problemten ortaya çıkmıştır.