π'nin Tanımı, Çemberin Çevresi ve Dairenin Alanı

Ali Nesin* / *anesin@bilgi.edu.tr*

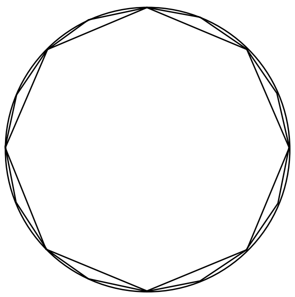
Ne yazık ki toplumda beyin yıkama her aşamada, her yerde... Matematik dersinde bile! Sadece Türkiye'de değil, dünyanın her yerinde! Çocuklarını düşündürtmemeye, sorgulamamaya yönelten, yani farkına varmadan kendi kuyusunu kazan ve bunda da bu kadar başarılı bir başka sistem daha düşünemiyorum.

İşte örnek: Lisede π sayısının nerden geldiği sorgulanmaz. Dairenin çevresi $2\pi r$*'dir*, alanı da πr^2'dir. Neden, niçin, kim kanıtlamış, nasıl kanıtlamış?.. Oradaki π sayısı nedir, kaçtır, nerden çıkmıştır, neyin nesi kimin fesidir, kimin umurunda? Neden her iki formülde de π vardır? Oysa eski Yunanlılardan beri hatta belki daha öncesinden bilinen bir olgu bu. Binlerce yıllık bir gerçek ve bugün kimsenin umurunda değil!

Her iki formülde de π sayısının olması kimseyi şaşırtmaz. Ayrıca π'nin ne olduğunu bilinmediği gibi $\pi^{\pi}\sqrt{\pi}$ gibi bir sayı da hiç rahatsızlık duyulmadan kullanılır.

Kendimi genelden ayrı tutmuyorum. Ben de herkes gibi bu formülleri sorgulamadan ezberledim. Ne de olsa ben de bu toplumun çocuğuyum. Uzaydan gelmedik ya!

Sadece ve sadece gerçeği sunan ve gerçeği kanıtlayarak sunan dergimiz başarılarına bir yenisini daha ekleyecek işbu yazıda: Dairenin çevresinin $2\pi r$, alanının πr^2 olduğunu kanıtlayacağız. Ama önce π'yi tanımlamalıyız. Herhalde, π sayısının ne olduğu bilinmeden π sayısı hakkında bir gerçeğin kanıtlanabileceğini ummuyorsunuz.



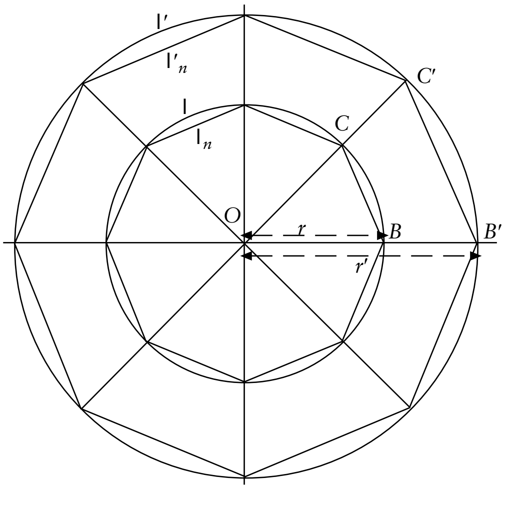
Düzgün Çokgenler. Bir çembere düzgün çokgenlerle yakınsayabiliriz. Örneğin, çemberin içine yerleştirilen bir düzgün sekizgenin çevresi, çemberin çevresine oldukça yakındır. Çemberin içine bir düzgün onaltıgen yerleştirirsek, çembere daha da yaklaşırız. Düzgün çokgenin kenar sayısını ne kadar artırırsak, çembere o kadar yakınsarız. Çemberin içine yerleştirilen bir çokgenin çevresi, çemberin çevresinden her zaman daha küçüktür, ama aradaki fark, kenar sayısı arttıkça küçülür, öyle ki "sonsuzda" bu iki çevre birbirlerine eşit olurlar.

Aynı şey çemberin içerdiği alan, ki ona "daire" denir, için de geçerlidir. Düzgün çokgenin alanı, kenar sayısı arttıkça, dairenin alanına yakınsar ve "sonsuzda" iki alan birbirine eşit olur. Neden diye soracak olursanız, "alanın tanımından dolayı" derim. Alan denen şey, biraz önce söylediğim doğru olacak biçimde tanımlanmıştır.

π'nin Tanımı. Pek yakında r yarıçaplı bir çemberin çevresinin $2\pi r$ olduğunu kanıtlayacağız. Bir an için bunu bildiğimizi varsayarsak, bir çemberin çevresinin yarıçapına bölündüğünde hep 2π elde edildiğini görürüz. Bu, bütün çemberler için geçerlidir. Yani herhangi bir çemberin çevresini çemberin yarıçapına bölersek, hep aynı sayıyı, bir sabiti elde ederiz. Bunu kanıtlayalım. Kanıttan hemen sonra π sayısını tanımlayacağız.

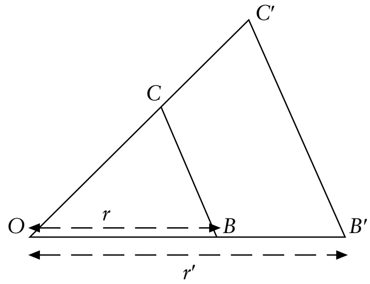
Aynı merkezli iki çember alalım. Bu çemberlerin içine düzgün çokgenler oturtalım.

Çokgenlerin kenar sayısına n diyelim. Küçük çemberin çevresine l, büyük çemberin çevresine l' diyelim. Küçük çemberin çapına r, büyük çemberin



* İstanbul Bilgi Üniversitesi öğretim üyesi.

çapına da r' diyelim. Birazdan $\ell/r = \ell'/r'$ eşitliğini kanıtlayacağız. Ayrıca, küçük çokgenin çevresine ℓ_n, büyük çokgenin çevresine ℓ'_n diyelim. Üçgenlerden birini aşağıdaki gibi büyültelim.



Elbette,

$$r = OB \text{ ve } r' = OB' \qquad (1)$$

ve

$$\ell_n = n \times BC \text{ ve } \ell'_n = n \times B'C''$$

eşitlikleri geçerlidir.

ℓ, aşağı yukarı ℓ_n'ye, yani $n \times BC$'ye eşit. n büyüdükçe BC küçülüyor ve $n \times BC$ sayısı ℓ'ye yakınsıyor. Demek ki

$$\ell \approx \ell_n = n \times BC \text{ ve } \ell' \approx \ell'_n = n \times B'C' \qquad (2)$$

aşağıyukarılıkları geçerli. Şimdi (1)'i, (2)'yi ve Tales'i kullanarak hesaplayalım:

$$\ell/r = \ell/OB \approx n \times BC/OB$$
$$= n \times B'C'/OB' \approx \ell'/OB' = \ell'/r'.$$

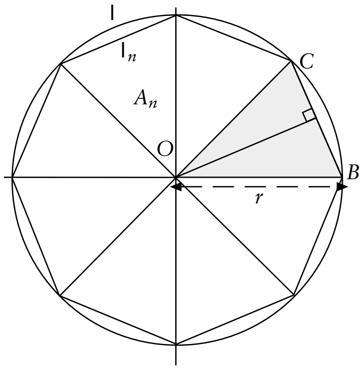
Böylece $\ell/r = \ell'/r'$ eşitliği "kanıtlanmış" oldu[1].

Demek ki, herhangi bir çemberin uzunluğunu yarıçapına bölersek hep aynı sayıyı buluruz. Yani ℓ/r sayısı, çember ne olursa olsun, değişmez, hep aynıdır, bir sabittir. Hiç değişmeyen bu ℓ/r sabitinin yarısı da, yani $\ell/2r$ sayısı da bir sabittir. Bu sabite özel bir ad verelim: π. İşte şimdi π'yi tanımladık:

$$\pi = \ell/2r \qquad (3)$$

Demek ki $\ell = 2\pi r$. Çemberin formülünü bulduk! π'nin tanımından çıktı!

Dairenin Alanı. Şimdi, r yarıçaplı bir dairenin alanını bulalım. Alanın πr^2'ye eşit olduğunu kanıtlayacağız. Aşağıdaki şekildeki gibi dairenin içine bir çokgen yerleştirip, çokgenin köşelerini kullanarak daireyi üçgenlere bölelim. Üçgen sayımıza n diyelim. Çokgenin çevresi ℓ_n, alanı da A_n olsun. Çemberin çevresi ℓ, alanı A olsun. n ne kadar büyükse ℓ_n ve A_n sayıları ℓ'ye ve A'ya o kadar yakındırlar. Üçgenlerin yüksekliğine h, tabanına b diyelim. Her üçgenin alanı $bh/2$'dir. n tane üçgen olduğundan, çokgenin alanı $nbh/2$'dir. Demek ki A_n = $nbh/2$ eşitliği geçerlidir. Öte yandan h aşağı yukarı r'ye eşittir. Yukardaki eşitlikteki h yerine r'yi koyarsak, $A_n \approx nbr/2$ elde ederiz. Ama nb çokgenin çevresine, yani ℓ_n'ye eşit.



Yukardaki aşağıyukarılıkta, nb yerine ℓ_n koyalım: $A_n \approx r\ell_n/2$ elde ederiz. Şimdi n'yi sonsuza götürelim. O zaman A_n sayısı A'ya, ℓ_n sayısı da ℓ'ye dönüşür ve bu aşağıyukarılık, $A = r\ell/2$ eşitliğine dönüşür. Yukarda $\ell = 2\pi r$ eşitliğini kanıtlamıştık. $A = r\ell/2$ formülünde ℓ yerine $2\pi r$ koyalım: $A = r(2\pi r)/2 = \pi r^2$ elde ettik. Dairenin alanını da bulduk.

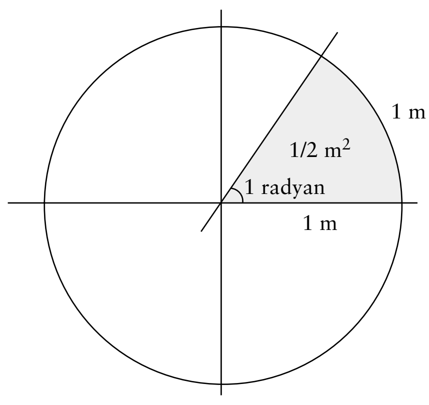
Artık π'yi ve çemberin uzunluğuyla dairenin alanını biliyoruz... ℓ_n'lerin ℓ'ye, A_n'lerin A'ya yakınsadıklarını geçiştirdik. Ama bunlar da kolaylıkla kanıtlanabilirler. Kanıtlar, burada vermediğimiz yakınsama'nın, uzunluk'un ve alan'ın matematiksel tanımlarından çıkar.

Radyan. Yarıçapı 1 olan daireye **birim daire** denir. Birim dairenin çevresi 2π, alanı da π'dir elbette ($r = 1$ alın). Şimdi yeni bir açı ölçüsü tanımlayacağız: radyan.

Tam dairenin açısı 360 derecedir. Çok böleni olduğundan, günlük hayatta 360 kullanışlı olsa da matematikte pek kullanışsızdır. Bundan böyle $360° = 2\pi$ radyan olsun. Yani 1 radyanı, $180/\pi$ derece olarak tanımlayalım:

$$1 \text{ rad} = 180/\pi \text{ derece} \approx 57{,}2958 \text{ derece.}$$

360 derecelik yani 2π radyanlık açıyı gören birim daire parçasının, ki bu bir tam dairedir, uzunluğu 2π, alanı da π'dir, bunu yukarda gördük. Dolayısıyla her radyana, 1 çember uzunluğu ve 1/2 birim kare alan düşer. ♠



1 Yukarıda, limit kavramını kullanarak, ≈ aşağıyukarılıklarını gerçek eşitlik yapabiliriz.