Cauchy-Schwartz ve Minkowski Eşitsizlikleri

Alper Çay*/alpercay2000@yahoo.com

Matematikte çok çok basit sonuçlar çok çok önemli olabilirler, önemli matematikçilerin adlarıyla anılabilirler, o kadar ki, sonucun önemini bilmeyen biri, bu kadar basit bir sonuca o kadar büyük bir matematikçinin adının verilmesine şaşabilir. Bu yazıda konu edeceğimiz Cauchy-Schwartz ve Minkowski eşitsizlikleri bu tür sonuçlardandır.

Cauchy-Schwartz Eşitsizliği. *$a_1, ..., a_n$ ve $b_1, ..., b_n$ herhangi $2n$ gerçel sayıysa,*
$(a_1b_1 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2)$.

Kanıt: $p(X) = (a_1X - b_1)^2 + ... + (a_nX - b_n)^2$ olsun. Kareleri alıp parantezleri açalım. Eğer

$$A = a_1^2 + ... + a_n^2$$
$$B = b_1^2 + ... + b_n^2$$
$$C = a_1b_1 + ... + a_nb_n$$

ise,

$$p(X) = AX^2 - 2CX + B$$

elde ederiz. Her $x \in \mathsf{R}$ için, $p(X)$ karelerin toplamı olduğundan, $p(x) \ge 0$ çıkar. Demek ki her $x \in \mathsf{R}$ için,

$$Ax^2 - 2Cx + B = p(x) \ge 0.$$

Her gerçel sayı için geçerli olan böyle bir eşitsizlik ancak $AX^2 - 2CX + B$ polinomunun diskriminantı 0'dan küçükeşitse mümkündür. Demek ki $C^2 - AB \le 0$, yani $C^2 \le AB$, yani
$(a_1b_1 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2)$.
Cauchy-Schwartz eşitsizliği kanıtlanmıştır. □

Minkowski Eşitsizliği. *$a_1, ..., a_n$ ve $b_1, ..., b_n$ herhangi $2n$ gerçel sayıysa,*

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2}.$$

Kanıt: Cauchy-Schwartz eşitsizliğini kullanacağız. O kanıttaki A, B ve C'yi anımsarsak, kanıtlamak istediğimiz eşitsizliğin tam tamına,

$$(A + 2C + B)^{1/2} \le A^{1/2} + B^{1/2}$$

olduğu anlaşılır. Biz, yukardaki kanıtta, $C^2 \le AB$ eşitsizliğini kanıtlamıştık. A ve B negatif olmadıklarından, bundan $C \le A^{1/2}B^{1/2}$ eşitsizliği çıkar. Bu eşitsizliği kullanarak, $A + 2C + B \le A + 2A^{1/2}B^{1/2} + B = (A^{1/2} + B^{1/2})^2$ buluruz, yani $A + 2C + B \le (A^{1/2} + B^{1/2})^2$, Şimdi her iki tarafın da karekökünü alırsak istediğimiz eşitsizliği elde ederiz. □

Minkowski eşitsizliğinin önemini vurgulayan bir notla yazımızı bitirelim.

- Gerçel sayılar doğrusu R üstünde bulunun ve koordinatları a_1 ve b_1 olan A ve B noktaları arasındaki mesafe $|a_1 - b_1|$'dir. Bu mesafeyi $d(A, B)$ olarak gösterelim. $|a_1 - b_1| = ((a_1 - b_1)^2)^{1/2}$ olduğundan,

$$d(A,B) = \left((a_1 - b_1)^2\right)^{1/2}$$

olarak yazabiliriz.

- R^2 düzleminde bulunan ve koordinatları (a_1, a_2) ve (b_1, b_2) olan A ve B noktaları arasındaki mesafeye $d(A, B)$ dersek,

$$d(A,B) = \left((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2\right)^{1/2}$$

eşitliği geçerlidir.

- İçinde yaşadığımız üç boyutlu R^3 uzayında bulunan ve koordinatları (a_1, a_2, a_3) ve (b_1, b_2, b_3) olan A ve B noktaları arasındaki mesafeye $d(A, B)$ dersek,

$$d(A,B) = \left((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2\right)^{1/2}$$

eşitliği geçerlidir.

- Yukardaki d fonksiyonlarının herbiri, her A, B ve C noktası için, üçgen eşitsizliği adı verilen $d(A, B) < d(A, C) + d(C, B)$ eşitsizliğini sağlar; daha gündelik bir dille: A noktasından B'ye gitmek için C'den geçmek AB yolunu kısaltamaz.

- n herhangi bir doğal sayı olsun. n boyutlu R^n uzayının bir noktası, tanım gereği, $a_1, ..., a_n$ gerçel sayıları için, $(a_1, ..., a_n)$ olarak yazılır. $A(a_1, ..., a_n)$ ve $B(b_1, ..., b_n)$ noktaları arasındaki mesafeyi

$$d(A,B) = \left((a_1 - b_1)^2 + ... + (a_n - b_n)^2\right)^{1/2}$$

olarak tanımlarsak, Minkovski eşitsizliğinden, bu “mesafe kavramının da üçgen eşitsizliğini sağladığı kolaylıkla kanıtlanır. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. ♠

* Erciyes Üniversitesi Matematik Bölümü öğrencisi.