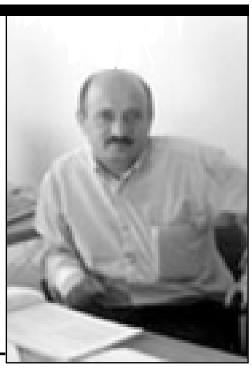
Problemler ve Çözümleri



Refail Alizade*
rafailalizade@iyte.edu.tr

Bu, bir yıl sürecek bir yarışmadır. Grup halinde, okul olarak ya da bireysel olarak katılabilirsiniz.

Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Ayrıca lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

Her sorunun çözümünü ayrı bir kâğıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

Kâğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenciyseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla İzmir adresine 1 Ağustos 2004 tarihine kadar adıma gönderiniz.

Doğru yanıt yollayanlar:
Osman Arşın, Ortaklar Anadolu Öğretmen Lisesi, Aydın (Y286, Y287), **Alper Çay**, Erciyes Üniversitesi, Matematik Bölümü (Y287), **Mustafa Dönmez**, Halil Kale Fen Lisesi ve **Yaşar Dönmez**, Turgutlu Lisesi, Turgutlu, Manisa (Y286, Y287), **Nurdan Aksu Güner**, Şanlıurfa Kız Lisesi (Y287), **Ahmet Ceyhan**, İstanbul Atatürk Fen Lisesi (Y287), **Serdar Karatekin**, İstanbul Lisesi (Y287), **Kürşat Hakan Oral**, İstanbul (Y286, Y287), **İzzet Burak Yıldız**, ODTÜ, Matematik Bölümü (Y286, Y287).

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A296. Karelerinin toplamı asal olan tüm ardışık asal sayı üçlülerini bulunuz.

A297. $ABCD$ paralelkenarının AD ve DC kenarları üzerinde, $|AN|:|AD| = 1:3$ ve $|DM|:|DC| = 1:4$ olacak şekilde sırasıyla N ve M noktaları alınmıştır. BM ve CN doğrularının kesişimine O diyelim. $|OM|:|OB|$'yi bulunuz.

A298. 1'den 2004'e kadar olan tüm tamsayılar bir çember boyunca saat yönünde küçükten büyüğe sırayla yazılmıştır. 1'den başlayarak ve saat yönünde giderek, her adımda daha önce silinmemiş olan her ikinci sayıyı siliyoruz. En sona kalan sayı kaçtır?

A299. $(a_n)_n$ dizisi, $a_1 = a_2 = 1$ ve her $n \geq 1$ için $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n/2$ olarak tanımlanmıştır. Her n için $a_n < 3$ olduğunu kanıtlayınız.

A300. $n \geq 3$ olmak üzere,
$$2^1 - 1,\ 2^2 - 1,\ 2^3 - 1,\ \ldots,\ 2^{n-1} - 1$$
sayıları verilmiştir. Bu sayılardan en az birinin n'ye bölündüğünü gösteriniz.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y296. Bir n pozitif tamsayısı için
$$2n + 1 \text{ ve } 3n + 1$$
sayıları tamkarelerdir. n'nin 8'e bölündüğünü gösteriniz.

Y297. ABC ikizkenar üçgeninin ($|AB| = |AC|$) içinde, $m(PBA) = m(PBC)$, $m(PCA) = 10°$ ve $m(PCB) = 30°$ olacak şekilde bir P noktası alınmıştır. $m(PAC)$ kaç derecedir? (Soruyu öneren: Onur Baysal, İYTE, Matematik Bölümü.)

Y298. 15 beyaz ve 15 siyah dama taşı çember boyunca herhangi sırayla dizilmiştir. Her hamlede herhangi iki taşın yerini değiştirebiliyoruz. Başlangıçtaki durum ne olursa olsun, belli bir n hamlede, tüm komşu taşların farklı renkte olması sağlanabilir. n en az kaç olabilir?

Y299. $g(x) = f(x) + \sin f(x)$ fonksiyonu devirli (periyodik) olacak şekilde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiştir. $f(x)$ fonksiyonunun da periyodik olduğunu gösteriniz.

Y300. Düzlem üzerinde yedi doğru verilmiştir. Bunlar 13 noktada kesişiyorlar. Bu noktaların on birinde ikişer doğru, birinde üç doğru ve birinde de dört doğru kesişiyor. Doğrulardan ikisinin birbirine paralel olduğunu kanıtlayınız.

* İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü öğretim üyesi.

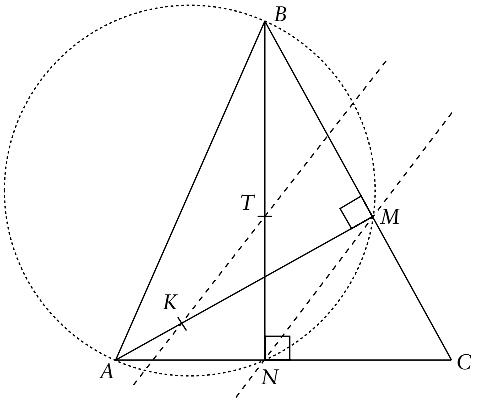
ESKİ SORULARA ÇÖZÜMLER

(Güz 2003, yıl 12, sayı 3)

A286. *İki basamaklı ab sayısı c'ye, bc sayısı a'ya ve ca sayısı da b'ye bölünecek şekilde birbirinden ve sıfırdan farklı a, b, c rakamları bulunur mu?*

Çözüm. Koşulu sağlayan a, b, c rakamlarının olduğunu varsayalım. Bu rakamlardan biri çiftse, diğerleri de çift olmak zorunda. Bu durumda $a/2$, $b/2$, $c/2$ rakamları da koşulu sağlar, dolayısıyla a, b ve c rakamlarının tek sayı olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca bu rakamlardan biri 5 olursa, bir diğeri de 5 olmak zorunda. Dolayısıyla bu rakamlar sadece 1, 3, 7, 9 olabilir. O halde rakamlardan biri, örneğin a, 3 veya 9'dur. Bu durumda bc sayısı 3'e bölünmek zorunda. b, c rakamları 1, 7 ve 3 veya 9 rakamlarından oluştuğundan bu mümkün değildir.

A287. *$m(ACB) \neq 45°$ olmak üzere ABC dar açılı üçgeninde AM ve BN yükseklikleri çizilmiştir. MA ve NB ışınları üzerinde, $|MK| = |MB|$ ve $|NT| = |NA|$ olmak üzere K ve T noktaları alınmıştır. $KT \parallel MN$ olduğunu kanıtlayınız.*



Çözüm. $m(ACB) > 45°$ olduğu ve K ve T noktalarının yukardaki şekildeki gibi yerleşmiş olduğu durumları inceleyelim. Diğer durumlar benzer şekilde incelenir. M ve N noktaları, çapı AB olan çemberin üzerindedir. O halde $m(TAK) = m(TAN) - m(MAN) = 45° - m(MBN) = m(KBM) - m(MBN) = m(KBT)$'dir. Dolayısıyla $AKTB$ de kirişler dörtgenidir. Bu durumda $m(TKM) = 180° - m(AKT) = m(ABT) = m(ABN) = m(AMN)$ elde edilir. Bu da $KT \parallel NM$ demektir.

A288. *Bir toplulukta birbiriyle tanışık iki kişinin ortak tanıdığı bulunmuyor ve birbiriyle tanışık olmayan iki kişinin tam iki ortak tanıdığı bulunuyor. Bu toplumdaki tüm kişilerin tanıdık sayılarının aynı olduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm. Herhangi A ve B kişilerinin aynı sayıda tanıdığı olduğunu göstereceğiz.

Birinci Durum: A ile B tanışıyor.

Bu durumda A'nın tanıdıklarıyla B'nin tanıdıkları arasında birebir eşleme yapalım. A'nın bir C tanıdığını alalım. A ile B'nin ortak tanıdıkları bulunmadığından B ile C tanışmıyor. O halde B ile C'nin tam iki tanıdığı bulunur. Bunlardan biri A'dır, diğeri de C_1 olsun. C'ye C_1'i karşılık getirelim. Böylece A'nın her tanıdığına B'nin bir tanıdığını karşılık getirmiş oluruz. Aynı şekilde B'nin de her tanıdığına A'nın bir tanıdığını karşılık getirebiliriz. Birinci eşlemede C'ye C_1 karşılık gelmişse, ikinci eşlemede C_1'e C karşılık geleceği açıktır ve tersine. Dolayısıyla, A ile B'nin tanıdık sayısı birinci durumda aynıdır.

İkinci Durum: A ile B tanışmıyor.

Bu durumda A ile B'nin ortak tanıdığı C'yi alalım. A ile C tanıştığından birinci durumdan A ile C'nin tanıdık sayısının aynı olduğu elde edilir. Benzer şekilde B ile C'nin de tanıdık sayısı aynıdır. Dolayısıyla A ile B'nin de tanıdık sayısı aynıdır.

A289. *$x^8 + ax^4 + 1 = 0$ denkleminin, aritmetik dizi oluşturan dört kökünün bulunmasını sağlayan tüm a gerçel sayılarını bulunuz.*

Çözüm. Söylendiği gibi dört kökün olduğunu varsayalım. $x^4 = b$ şeklinde olan bir denklemin en fazla iki gerçel kökü olabileceğinden, $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ denkleminin dört kökü olması için $y^2 + ay + 1 = 0$ denkleminin y_1, y_2 gibi iki kökü ve $x^4 = y_i$ ($i = 1, 2$) denklemlerinin de $\pm x_i$ gibi ikişer kökünün olması gerekmektedir. Genelliği bozmadan $0 < x_1 < x_2$ kabul edebiliriz. $-x_2$, $-x_1$, x_1, x_2 sayıları bir aritmetik dizi oluşturduğundan

$$x_2 = x_1 + [x_1 - (-x_1)] = 3x_1$$

dir. Bu durumda x_1^4 ve $81x_1^4$ sayıları $y^2 + ay + 1 = 0$ denkleminin kökleri olacağından köklerin toplamı $-a$, çarpımı 1 olmalı. Dolayısıyla $81x_1^8 = 1$, yani $x_1^4 = 1/9$; buradan da

$$a = -(x_1^4 + 81x_1^4) = -82x_1^4 = -82/9$$

elde edilir.

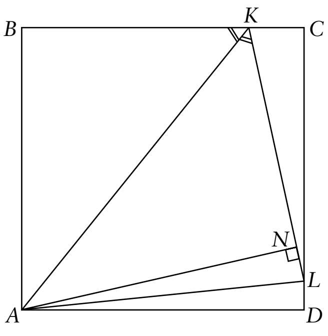
A290. *Yirmi birbirinden farklı gerçel sayıdan oluşan M kümesinde $a < b$ olmak üzere her $a, b \in M$ için $a < -x < b$ olacak şekilde bir $x \in M$ bulunur. M kümesinde kaç pozitif sayı olabilir?*

Çözüm. $a_1 < a_2 < ... < a_{20}$ olmak üzere $M = \{a_1, a_2, ..., a_{20}\}$ olsun. Negatif olmayan sayıların negatif sayılardan fazla olduğunu varsayalım. O zaman, $a_{10} \geq 0$'dır. Her $i = 10, 11, ..., 19$ için $a_i < -x_i < a_{i+1}$ olacak şekilde $x_i \in M$ sayıları bulunur. Bu durumda $x_{10}, x_{11}, ..., x_{19}$ sayıları birbirinden farklıdır ve negatifdir. O halde M kümesinde en az 10 + 11 = 21 eleman bulunması gerekirdi. Benzer şekilde pozitif olmayan sayılar da pozitif sayılardan fazla olamaz. Dolayısıyla M kümesi 10 pozitif, 10 negatif sayıdan oluşur.

Y286. *p bir asal sayı, r de p'nin 210'a bölünmesinden elde edilen kalandır. r'nin bileşik sayı olduğu ve iki tamkarenin toplamı şeklinde gösterilebildiği bilinmektedir. r'yi bulunuz.*

Çözüm. $0 < r < 210$ olmak üzere $p = 210n + r$ şeklinde yazalım. $p = 2, 3, 5$ veya 7 olsaydı, sırasıyla $r = 2, 3, 5$ veya 7 olacaktı. r bileşik sayı olduğundan bunlar olamaz. Dolayısıyla $p > 7$'dir. r'nin en küçük asal böleni q olsun. O halde $q \leq m$ olmak üzere $r = qm$'dir. $210 > r = qm \geq q^2$ olduğundan $q \leq 13$'tür. r sayısı 2, 3, 5, 7 sayılarından birine bölünseydi, 210 da bu sayılara bölündüğünden, p de aynı sayıya bölünecekti, dolayısıyla $q > 7$'dir. $q = 11$ olduğunu varsayalım. Verilen koşuldan dolayı $r = a^2 + b^2$ şeklinde gösterilebilir. Bir tamkare 11 modunda 0, 1, 3, 4, 5, 9 değerleri alabilir, bunlardan 0 dışında hiçbir ikilisinin toplamı 11 modunda 0'a eşit değil, dolayısıyla $a \equiv b \equiv 0 \pmod{11}$ olmalıdır. Bu durumda $a^2 \equiv b^2 \equiv 0 \pmod{121}$ ve $r \geq 121 + 121 = 242 > 210$ elde edilir. Böylece sadece $q = 13$ durumu kaldı. $m < 210/q < 17$ ve m'nin en küçük asal böleninin 13'ten küçük olmadığından, $m = 13$ olmalıdır. Gerçekten bu durumda $r = mq = 169 = 12^2 + 5^2$ ve $p = 379$ alınabilir.

Y287. *$ABCD$ karesinin BC ve CD kenarları üzerinde, $m(AKB) = m(AKL)$ olacak şekilde sırasıyla K ve L noktaları alınmıştır. $m(KAL)$'yi bulunuz.*



Çözüm. $AN \perp LK$ olmak üzere $[LK]$ üzerinde bir N noktası alalım. ABK ve ANK üçgenleri eşit. Dolayısıyla $|AN| = |AB| = |AD|$'dir. Bu durumda ANL ve ADL diküçgenleri de eşittir. Dolayısıyla $m(KAL) = m(KAN) + m(NAL) = m(KAB) + m(LAD)$'dir. Buradan da $m(KAL) = m(BAD)/2 = 45°$ çıkar.

Y288. *Bir uluslararası konferansta bir araya gelen dokuz matematikçiden her üçünden en az ikisi aynı dili biliyor ve herbiri en fazla üç dil biliyor. Bu dokuz matematikçiden en az üçünün aynı dili bildiğini kanıtlayınız.*

Çözüm. Hiçbir üçlünün aynı dili bilmediğini varsayalım. Herhangi bir A matematikçisini ele alalım. A, en fazla üç dil biliyor ve bu dillerin her birini en fazla bir matematikçi daha biliyor (aksi taktirde en az üç matematikçi aynı dili bilecekti). O halde A ile aynı dili paylaşan matematikçi sayısı en fazla dörttür, dolayısıyla A ile hiçbir ortak dili bilmeyen en az beş kişi bulunur. Bunlardan biri B olsun. Benzer şekilde B ile aynı dil bilen en fazla üç matematikçi daha bulunur, dolayısıyla A ile aynı dili bilmeyen beş kişi arasında en az biri (bu da C olsun) B ile de aynı dili bilmiyor. Bu durumda A, B, C üçlüsününden hiçbir ikilisi aynı dili bilmez.

Y289. *Her $x \in \mathrm{R}$ ve her $y \in \{f(x) \mid x \in \mathrm{R}\}$ için $f(x-y) = f(x) + xy + f(y)$ eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.*

Çözüm. f, yukardaki eşitliği sağlayan bir fonksiyon olsun.

Eğer f sabit bir fonksiyonsa ve $f(x) = c$ ise, $c = f(x - c) = f(x) + cx + f(c) = cx + 2c$, yani $cx = -c$ eşitliği her $x \in \mathrm{R}$ için doğru olduğundan $c = 0$ elde edilir. Sabit olmayan f fonksiyonlarını bulmak için,

$$R = \{f(x) : x \in \mathrm{R}\}$$

alalım. Her $y \in R$ için $f(0) = f(y - y) = f(y) + y^2 + f(y)$ eşitliğinden,

$$f(y) = [-y^2 + f(0)]/2 \qquad (1)$$

elde edilir. f sabit olmadığından $f(a) = b \neq 0$ olacak şekilde bir $a \in \mathrm{R}$ bulunur. Her $z \in \mathrm{R}$ için

$$f(z - b) = f(z) + bz + f(b)$$

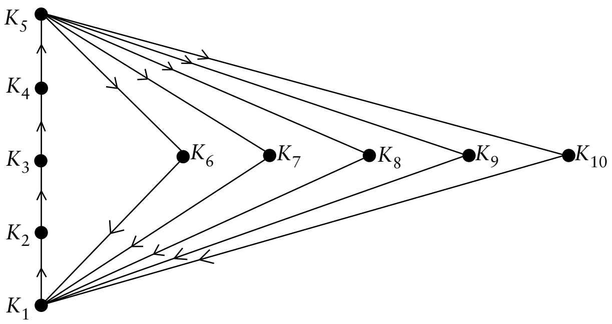
eşitliğinden

$$f(z - b) - f(z) = bz + f(b)$$

elde edilir. $b \neq 0$ olduğundan $bz + f(b)$, z değiştikçe, tüm gerçel değerleri alabilir. Dolayısıyla, her $x \in \mathrm{R}$ için, $x = bz + f(b) = f(z - b) - f(z)$ eşitliğini sağlayan bir $z \in \mathrm{R}$ bulunur. $y_1 = f(z-b)$ ve $y_2 = f(z)$ alırsak, (1) eşitliğinden, $f(x) = f(y_1 - y_2) = f(y_1) + y_1y_2 + f(y_2) = [-y_1^2 + f(0)]/2 + [-y_2^2 + f(0)]/2 + y_1y_2 = (y_1 - y_2)^2/2 + f(0) = -x^2/2 + f(0)$ elde edilir. Diğer taraftan $f(-b) = f(0 - b) = f(0) + 0b +$

$f(b) = f(0) + f(b)$ eşitliğinden $-(-b)^2/2 + f(0) = -b^2/2 + 2f(0)$, buradan da $f(0) = 0$ elde edilir. Böylece koşulu sağlayan iki fonksiyon bulunur: $f(x) = 0$ sabit fonksiyonu ve $f(x) = -x^2/2$.

Y290. *Bir ülkenin 10 kentinin bazılarını birleştiren tek yönlü hava yollarıyla, her kentten diğer her kente bir veya birkaç hava yolunu kullanarak ulaşmak mümkündür. Kentlerin birinden çıkıp tüm kentleri dolaşarak aynı kente dönmek için gerekli olan en az havayolu sayısı n ise, n'nin en büyük değeri ne olabilir?*



Çözüm. Kentler $K_1, K_2, ..., K_{10}$ olsun. K_i kentinden K_j kentine ulaşmak için gerekli olan en az havayolu sayısını a_{ij} ile, $\max_{i \neq j} a_{ij}$'yi de m ile gösterelim. Genelliği bozmadan, m havayolu sayısının K_1'den K_{m+1}'e ulaşmak için gerekli olduğunu ve bu ulaşımın $K_1, K_2, ..., K_m, K_{m+1}$ şeklinde olacağını varsayabiliriz. $K_1, K_2, ..., K_m, K_{m+1}$ kentleri birbirinden farklıdır, çünkü aksi takdirde yolun K_i, ..., K_i kısmını kısaltarak K_1'den K_{m+1}'e daha kısa bir yol bulurduk. Şimdi K_{m+1}'den K_{m+2}'ye en fazla m havayolu kullanılarak ulaşabiliriz. Aynı şekilde K_{m+2}'den K_{m+3}'e, ..., K_9'dan K_{10}'a ve son olarak K_{10}'dan K_1'e en fazla m'şer havayolu kullanılarak ulaşılabilir. Böylece toplam en fazla

$$m + (10 - m)m$$

havayolu kullanarak K_1'den çıkıp tüm kentleri dolaşarak K_1'e dönmek mümkündür. Aritmetik ve geometrik ortalama arasındaki eşitsizliği kullanarak

$$m + (10 - m)m = m(11 - m) \leq \left[\frac{m + (11 - m)}{2}\right]^2 = 121/4$$

elde ederiz. Dolayısıyla en fazla 30 havayolu kullanılarak tüm kentleri dolaşmak üzere K_1'den çıkıp K_1'e dönmek mümkündür. Yukarıdaki şekilde verilen örnekte n'nin en büyük değeri tam 30'dur. Şekilde $m = 4$ ve en kısa yol

$K_1K_2K_3K_4K_5K_6K_1K_2K_3K_4K_5K_7K_1K_2K_3$...

diye başlar ve uzunluğu 30'dur. ♠