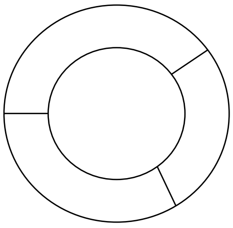
Dört Renk Problemi ve Teoremi

İbrahim C. Arkut*
iarkut@gau.edu.tr

1852'de ünlü matematikçi De Morgan'ın eski bir öğrencisi olan Francis Guthrie bir İngiltere haritasını renklendirirken, komşu şehirler değişik renkte olacak biçimde şehirleri dört renge boyayabileceğini gördü. Aynı yıl, tam olarak 23 Ekim'de, Francis'in kardeşi Frederick, şimdi Dört Renk Problemi olarak anılan soruyu De Morgan'a sordu: *Bir haritanın ülkeleri, sınırdaş ülkeler ayrı renklerde olacak biçimde her zaman dört değişik renge boyanabilir mi*? Soruya bayılan De Morgan soruyu hemen, aralarında filozof William Whewell'in de bulunduğu arkadaşlarıyla paylaştı. Whewell, De Morgan'ın Buluşun Felsefesi adlı kitabına yazdığı eleştiri yazısında bu sorudan sözetti. Soru bir süre unutuldu. 13 Haziran 1878'de ünlü matematikçi Cayley Londra Matematik Derneği'ne bu sorunun çözümünün bulunup bulunmadığını sordu.



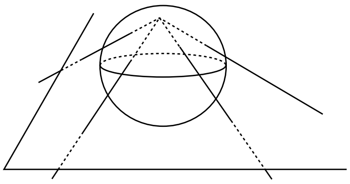
Dörtten daha az renge boyanamayan bir harita

Problemin bir çizge (graf) problemi olduğu belli; haritayı düzlemsel bir çizge olarak görebiliriz: Çizgenin noktaları en az üç değişik ülkenin sınırlarının kesişimi olsun, kenarları da iki ülkenin ortak sınırı. Sorun, çizgenin kenarlarından oluşan bölgeleri, birbiriyle sınırı olan bölgeler aynı renk olmayacak biçimde boyamak. Yalnız, iki bölgenin sınırdaş olması için iki bölgenin kenarlarının birkaç noktada kesişmeleri yetmez; iki bölge ancak ortak kenarları varsa sınırdaş sayılırlar.

Problem tümevarıma çok yatkın bir problem. Ülke sayısı, sınır sayısı, nokta sayısı üzerine ya da hepsi üzerine tümevarım yapabiliriz.

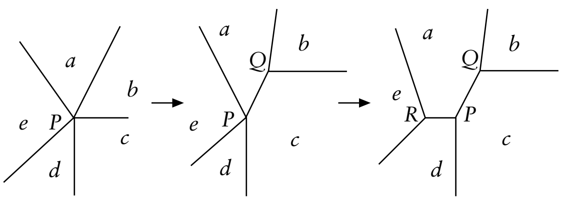
Cayley de problemi çözemedi ama en azından zorluğun nereden kaynaklandığını buldu:

Önsav [Cayley]. *Problemi üçten fazla ülkenin aynı noktada kesişmediği haritalar için çözmek yeterlidir.*



Kuzey kutbundan geçen doğrularla kürenin kuzey kutbu dışındaki her noktasını düzlemin bir noktasına (sürekli bir biçimde) tekabül ettirebiliriz. Bu sayede, düzlemdeki bir haritanın boyanmasıyla kürenin üstündeki bir haritanın boyanmasının eşdeğer olduğu kolaylıkla görülür.

Kanıt: En az dört ülkenin bir noktada kesiştiği bir harita alalım. O noktalardan birine P diyelim. Bu noktada k (≥ 4) ülkenin kesiştiğini varsayalım. Haritayı hafifçe değiştirerek yeni bir harita elde edeceğiz, öyle ki bu yeni haritada en az dört ülkenin kesiştiği nokta sayısı, eski haritanın bu tür nokta sayısından daha az olacak. Şöyle yapacağız bunu (aşağıdaki şekilden takip edin): P noktasından iki nokta yaratacağız: Üç ülkenin kesiştiği bir nokta ve k−1 ülkenin kesiştiği bir başka nokta. Ayrıca yeni harita dört renge boyandığında eski harita da dört renge boyanacak, yani eski haritada komşu olan ülkeler yeni haritada da komşu olacaklar (ama yeni haritada yeni komşuluklar belirecek. Belirsin!) Eğer $k-1 > 3$ ise bu işlemi tekrarlayacağız. Bunu böylece $k - 3$ kez yapacağız. En sonunda elde ettiğimiz haritanın P noktasında üçten fazla ülke kesişmeyecek. Bu işlemi diğer noktalarda da yaparsak üçten fazla ülkenin hiçbir zaman bir noktada kesişmediği bir harita elde ederiz. Ve bu son harita boyandığında ilk harita da boyanmış olur. □



H haritası. Komşular: *ab, bc, cd, de, ea*

H_1 haritası. Komşular: *ab, bc, cd, de, ea, ac*

H' haritası. Komşular: *ab, bc, cd, de, ea, ac, ad*

Bundan böyle haritalarımızda sadece üç ülkenin tek bir noktada kesiştiğini varsayacağız.

* Girne Amerikan Üniversitesi. Bu makale geniş ölçüde [5]'ten yararlanılarak yazılmıştır.

Kempe 1879'da verilen herhangi bir haritanın biri dışında tüm ülkelerinin boyandığını varsayarak (tümevarım varsayımı) henüz boyanmamış ülkenin boyanabileceğini, boyanamazsa da boyanmış ülkelerin renkleri değiştirilerek düzeltilebileceğini gösterdiğini sandı. Kanıtı yanlıştı ama ilginçti ve daha sonra bu yanlış kanıt çok işimize yaradı. Herhalde bu, matematik tarihinin en meşhur yanlış kanıtıdır! Kempe aşağıdaki iki sava dayandı:

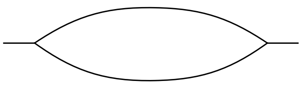
Önsav. *Her haritada en fazla beş komşusu olan bir ülke vardır.*

Kanıt: MD 2003-III, sayfa 24'te kanıtlanan Euler formülünü kullanacağız. Eğer haritanın (çizgenin) ülke (bölge) sayısı b, sınır (kenar) sayısı k ve üç ülkenin kesiştiği nokta sayısı n ise, o zaman $b - k + n = 2$'dir[1].

İkinci olarak, $\{(P, s) : P, s$ sınırı üzerinde bulunan nokta$\}$ kümesinin öğe sayısı iki değişik türde sayacağız. Eğer s'yi sabitlersek, her sınırda iki uç nokta olduğundan, bu kümede $2k$ öğe olduğunu anlarız. Eğer P'yi sabitlersek, her P'ye tam üç sınır değdiğinden, bu kez bu kümede $3n$ öğe olduğunu anlarız. Demek ki $2k = 3n$, yani $n = 2k/3$.

Üçüncü olarak, $\{(s, ü) : s$ biri $ü$ olan iki ülkenin sınırı$\}$ kümesini iki türlü sayacağız. Her sınır tam iki ülkenin sınırı olduğundan, birinci koordinatı sabitlersek bu kümenin $2k$ öğesi olduğunu anlarız. Öte yandan ikinci koordinatı sabitlersek, bu kümenin öğe sayısının ülkelerin sınır sayılarının toplamı olduğunu, yani savımız yanlışsa en az $6b$ olduğunu görürüz. Demek ki savımız yanlışsa, o zaman, $2k \geq 6b$, yani $k/3 \geq b$.

Şimdi yukardaki üç sonucu kullanıp çelişki elde edelim: $2 = b - k + n = b - k + 2k/3 = b - k/3 \leq 0$, çelişki. □

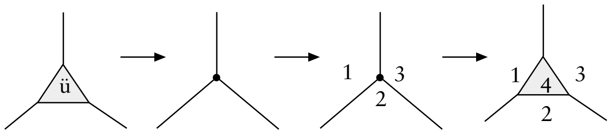


iki kenarlı ülke

Demek ki her haritada iki kenarlı (bu tür ülkelere **ikigen** diyeceğiz), üçgen, kare veya beşgen ülkeler vardır. Ama ikigen ya da üçgen ülkeleri olan haritaları boyamak kolay:

Önsav. *Haritada ikigen ya da üçgen ülke olmadığını varsayabiliriz.*

1 Haritanın dışını da bir ülke olarak sayıyoruz, yoksa yukardaki değil, $b - k + n = 1$ formülü geçerlidir.



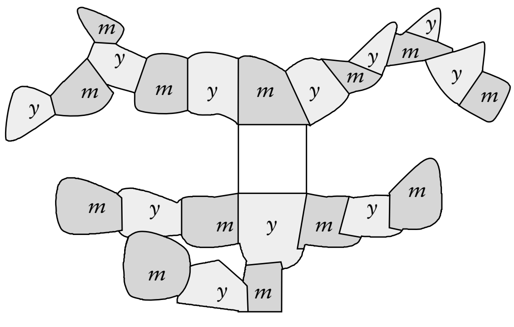
Kanıt: Boyamayı ülke sayısına göre tümevarımla yapabileceğimizden, küçük sayıda ülkesi olan haritaları boyamayı bildiğimizi varsayabiliriz. Şimdi ikigen ya da üçgen bir $ü$ ülkesi içeren bir H haritası alalım. Daha sonra tekrar yerine koymak üzere, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, $ü$ ülkesini tek bir noktaya indirgeyelim. Böylece elde ettiğimiz H' haritasında daha az ülke olduğundan, H' haritasını dört renge boyayabileceğimizi varsayabiliriz. Şimdi H haritasının ülkelerini H' haritasındaki renklere boyayalım. $ü$ dışında H'nin tüm ülkeleri boyanmış oldu. $ü$'nün en fazla üç sınırdaş ülkesi olduğundan, $ü$'yü dördüncü renge boyayabiliriz. Böylece H de boyanmış olur. □

Demek ki haritada ya dört ya da beş kenarlı bir ülke olduğunu varsayabiliriz. Kempe, bu durumda, günümüzde **Kempe zinciri** diye bilinen yöntemi kullanarak herhangi bir haritanın dört renkle boyanacağını kanıtladığını sandı. Şimdi Kempe'den doğru bir kanıt sunuyoruz.

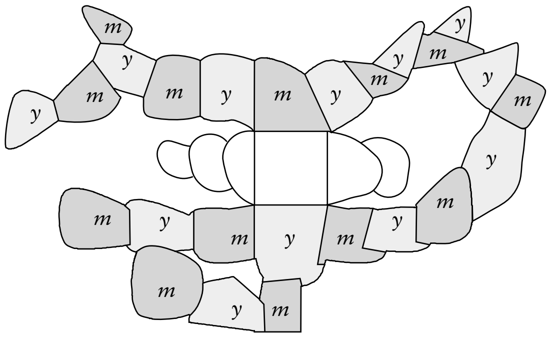
Teorem [Kempe]. *Haritada kare bir ülke varsa, harita dört renge boyanır.*

Kanıt: Haritamızda kare şeklinde bir bölge olsun. Bu kareyi haritadan çıkarırsak, haritada bir eksik ülke olacağından, tümevarım varsayımına göre, bu eksik haritayı dört renge boyayabileceğimizi varsayabiliriz. Öyle yapalım. O kare dışındaki ülkeler uygun biçimde dört renge boyansınlar.

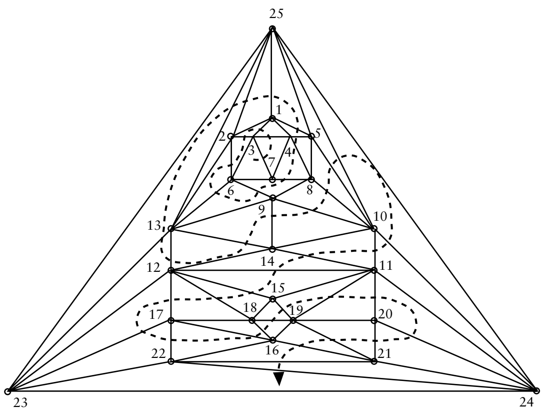
Karenin kuzey komşuşu maviye (m) ve güney komşusu yeşile (y) boyanmış olsun. Karenin kuzeyindeki ve güneyindeki bir mavi bir yeşil ülkelerden oluşan ülkeler silsilesine bakalım. Biri kuzeyde, biri güneyde olmak üzere iki ülkeler grubu elde ederiz. İki şık var: Bu iki grup ya kesişir ya kesişmez.



Eğer bu iki grup yukarıdaki şekildeki gibi kesişmiyorsa, güney grubunun ülkelerinin renklerini değiştirelim: maviler yeşil olsun, yeşiller mavi. Bu değişiklikten sonra alt ve üst kareye komşu bölgeler mavi olduğundan kareye mavi bir ülke dokunmamaktadır ve bu kare maviye boyanabilir.



Eğer yukardakinin tam tersine, karenin kuzey ve güney grubu kesişiyorsa, o zaman doğu ve batı grupları kesişemez ve yukardaki kanıtı kuzey-güney yerine doğu-batı için yaparız. □



Heawood'un Kempe'nin kanıtına verdiği karşıörnek. Noktalar ülkeleri, çizgiler sınırları temsil ediyor.

Kempe, buna benzer bir kanıtı haritada dörtgen ülke olmadığı (yani beşgen ülke olduğu) durumda da verdi ve böylece dört renk probleminin çözdüğünü iddia etti. Kanıtı 11 yıl boyunca Cayley dahil olmak üzere pek çok kişi tarafından inandırıcı bulundu. 1890'da Heawood'un Kempe'nin yöntemine göre her haritanın dört renge boyanamadığını belirten makalesi büyük şaşkınlık yarattı.

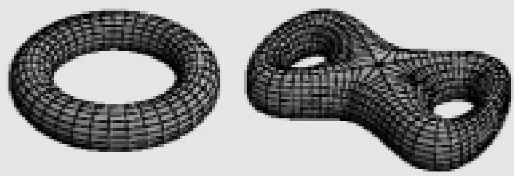
Heawood, bu makalesinde, Kempe'nin yöntemini kullanarak, her haritanın beş renge boyanabileceğini kanıtlamıştır, ki bu da başlıbaşına bir başarıdır.

Heawood bu kadarla yetinmemiş, başka yüzeylerde haritaların kaç renge boyanabileceği sorusunu sormuştur.

Heawood harita boyama sorusunu düzlem yerine torus veya alaturka deyişle simit halkası gibi başka topolojik yüzeyler için sormuştur. Heawood, doğru yanıtı öngörerek, eğer yüzeyde g delik varsa, o zaman bu yüzeyde çizilen bir haritayı boyamak için

$$N = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rfloor$$

tane rengin yeterli olması gerektiğini söylemiştir. Bu sanı, $g \geq 1$ için, 78 yıl sonra 1967'de G. Ringel ve T. Youngs tarafından kanıtlanmıştır [7]. $g = 0$ için dokuz yıl daha beklemek gerekti.



$g = 1$ $\qquad$ $g = 2$

Heawood'un Kempe'nin kanıtından 11 yıl sonra Kempe'nin yönteminin yeterli olmadığını göstermesi ve yanlış kanıtın tamiri mümkün olmaması problemin çözümünü 1976'ya kadar geciktirdi. Bu tarihte bilgisayar yardımıyla verilen Appel ve Haken kanıtı da Kempe zincirini kullandığından bunu burada etraflı şekilde açıklayacağız.

İşler kızışıyor. Her harita {ikigen, üçgen, kare, beşgen} kümesindeki şekillerden en az birini bulundurmak zorunda olduğundan, bu ve bu tür kümelere **kaçınılmaz küme** diyelim. Kümedeki ilk üç şekille başa çıkmasını öğrendik, bunlar sorunsuz şekiller, ama beşgeni nasıl alt edeceğimizi şimdilik bilmiyoruz. Dolayısıyla yukardaki kümeden beşgeni atıp onun yerine bir veya birkaç başka şekil almaya çalışacağız.

İkigen, üçgen veya kare içermeyen haritanın yalnız bir beşgen değil aynı zamanda ya iki komşu beşgen veya bir altıgenle komşu bir beşgen içermesi gerektiği gösterilebilir. Buradan da yeni bir kaçınılmazlar kümesi elde edilir: {ikigen, üçgen, kare, iki komşu beşgen, altıgene komşu beşgen}.

Birkhoff'un kaçınılmaz indirgenebilir şekli

G. Birkhoff 1913'te dört komşu beşgenden oluşan şeklin "sorunsuz" olduğunu gösterdi, yani eğer haritada şekildeki gibi dört beşgen varsa, o zaman o dört ülkeyi yoksayarak dört renge boyanabilen bir harita, o dört ülke eklendiğinde de dört renge boyanabilir. Bunlara **sorunsuz şekil** adını verelim.

Problemi çözmek için, sorunsuz şekillerden oluşan bir kaçınılmaz şekiller kümesi bulmamız gerek, ancak o zaman her haritayı dört renge boyayabiliriz. Birkoff'un kanıtından sonra binlerce sorunsuz şekil keşfedildi. 1976'ya birçok matematikçi kaçınılmaz şekiller avı ve bu şekilleri içeren haritalara çözüm arayışlarıyla girdi. Alman matematikçi Heinrich Heesch yaşamının kırk yılını bu işe adadı. Illinois Üniversitesi'nden Kenneth Appel ve Wolfgang Haken, Heesch'in fikirlerinden de yararlanarak ve bilgisayar işini üstlenen bilgisayar bölümü doktora öğrencisi John Koch'un da yardımıyla, dört yıllık yoğun bir arayış sonunda 1936 sorunsuz şekilden oluşan kaçınılmaz küme buldular. Böylece problem çözülmüş oldu.

Ancak kanıtta bilgisayar kullanılmış olması matematikçileri haklı olarak rahatsız etti. Her şeyden önce kanıt estetik değildi, matematikçilerin sanatçı ruhunu zedeliyordu. Sonra, bilgisayarın hata yapmayacağından emin olamazdık... Ayrıca, böyle bir kanıt okunamazdı, ancak bilgisayar programı tekrar tekrar çalıştırılırdı. Bilgisayarın tekrar tekrar aynı hatayı yapmayacağı ne malum? Matematikçilere göre kanıt daha kavramsal, daha insancıl, daha estetik, daha ele avuca sığar olmalıydı.

Aslında daha önce çok uzun kanıtlar verildi. Örneğin basit grupların sınıflandırılması 10 bin sayfayı aşar. Ama gene de insan gücünün sınırında bu kanıtlar. Yanlış olsa da yanlışı anlayabiliriz. Ama buna ne demeli? Matematik bu duruma "düşmeli" mi?

"Doğru nedir, gerçek nedir, kanıt nedir" gibi felsefi tartışmalar kaçınılmazdı. Bugün bile bu tartışmalar büyük ölçüde devam ediyor.

Appel ve Haken daha sonra bu 1936 şekli 1482'ye indirdi. Benzer yöntemle, Robertson, Sander, Seymour ve Thomas kanıtta kullanılan şekil sayısını 633'e indirdiler, bilgisayarla yapılan işlemleri kısalttılar (bir dizüstü bilgisayarda birkaç saat). Bu matematikçileri biraz rahatlattıysa da, bugün hâlâ daha bu teoremin bilgisayar kullanmayan bir yanıtı bilinmiyor. ♠

Kaynakça

[1] M. Hall, Jr. ve J. H. Van Lint (eds.), **Combinatorics**, Proc. of the Advanced Study Institute on Combinatorics, Mathematical Centre Tracts 56, cilt I ve II, Nijenrode Castle, Breukelen, The Netherlands, Temmuz 8-20, 1974.

[2] K. Appel and W. Haken, **The Four-Color Problem: Mathematics Today-Twelve Informal Essays**, Springer Verlag, New York, 1978.

[3] N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, and R. Thomas, *A new proof of the four colour theorem*, Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society 2 (1) 1996, 84-96.

[4] E.R. Swart, *The philosophical implications of the four-color theorem*, American Math. Monthly 87, 1980, 697-707.

[5] R. Wilson, *Four colours suffice*, EMS, Aralık 2002, sayfa 15-19.

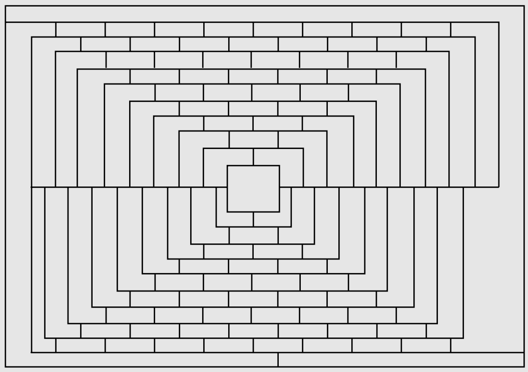
[6] R. Thomas, *An update on the four-color theorem*, Notices of the AMS 45 (7), Ağustos 1998, 848-859.

[7] G. Ringel, **Map Color Theorem**, Springer, 1974.

[8] S. Wagon, *An April fool's hoax*, Mathematica in Education and Research 7(1), 1998, 46-52.

[9] J. Hutchinson ve S. Wagon, *The four color theorem*, Mathematica in Education and Research, 6(1), 1997, 42-51.

Martin Gardner'in 1 Nisan Şakası



Gardner'in haritası (beş renk gerekiyor!)

Martin Gardner 1953'ten emekliye ayrıldığı 1984'e kadar Scientific American dergisindeki matematik köşesini yürütmüş ve birçok ilginç yazıya imza atmıştır. Akademinin içinden olmamakla birlikte matematik, fizik, felsefe ve daha birçok konuda 60 kitap yazmıştır. Kitapları günümüzde yeni okurları hâlâ çekmektedir. Renkli kişiliği köşesinde ara sıra yaptığı şakalarda kendisini göstermektedir. Bunlardan biri Nisan 1975'te yukardaki haritanın ancak beş renge boyanacağını dünyaya duyurmasıydı!

Birçok Scientific American okuru bunun bir 1 Nisan şakası olduğunun farkına varamamıştır. Yıllar sonra Macalester Koleji'nden ünlü matematikçi çift Stan Wagon ve Joan Hutchinson Martin Gardner'in haritasından esinlenerek bir dizi çalışma yapmışlardır [8, 9].

1980'de, kütüphane Scientific American dergilerini karıştırırken yukardaki harita ilk kez gözüme iliştiğinde, kalem kâğıt kullanmadan bir çırpıda bunun 1 Nisan şakası olduğunun farkına vardım. Siz de bunu görebiliyor musunuz?