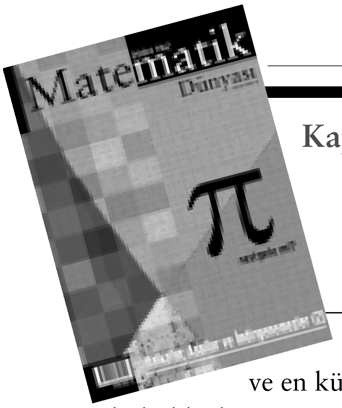


Kapak Konusu: Halkalar, Asallar ve İndirgenemezler (2)

Ebob'la Ekok

En büyük ortak bölen (ebob) ve en küçük ortak kat (ekok) daha ilkokuldayken öğrendiğimiz kavramlardır. Bu yazıda bu kavramları daha matematiksel ve teorik olarak ve belki de alışagelindiğinden biraz değişik olarak tanımlayacağız.

Bilindiği gibi, tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$ ile simgelenir:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}.$$

Eğer n bir tamsayıysa, $n\mathbb{Z}$, n'ye bölünen, yani n'nin katları olan tamsayılar kümesini simgeler:

$$n\mathbb{Z} = \{nz : z \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \ldots\}.$$

Örneğin, $7\mathbb{Z} = \{ \ldots, -21, -14, -7, 0, 7, 14, 21, \ldots \}$.

Aşağıda, $n\mathbb{Z}$ türünden yazılan kümelerin birkaç kolay özelliğini sıraladık:

- Elbette $(-n)\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$. Bu sayede, eğer istersek ve işimize yarayacaksa, $n\mathbb{Z}$'in n'sinin doğal sayı olduğunu varsayabiliriz.
- Aşağıdaki koşullardan biri gerçeklenirse hepsi gerçeklenir:

$$m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z};\ m \in n\mathbb{Z};\ n|m.$$

- $n\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ eşitliği sadece ve sadece $n = \pm m$ eşitliklerinden biri geçerliyse geçerlidir.
- $n(m\mathbb{Z}) = nm\mathbb{Z} = m(n\mathbb{Z})$ (Burada $n(m\mathbb{Z})$'in hangi anlamda kullanıldığı açık olmalı: $m\mathbb{Z}$'in elemanlarının n'yle çarpıyoruz.)
- Eğer $a, b \in n\mathbb{Z}$ ise, $a - b \in n\mathbb{Z}$. Yani $n\mathbb{Z}$ biçiminde yazılan kümeler çıkarma altında kapalıdırlar. Bunun tersi de doğrudur:

Önsav 1. $\mathbb{Z}$*'nin boş olmayan ve çıkarma altında kapalı her A altkümesi, bir* $n \in \mathbb{Z}$ *için (aslında bir ve bir tek* $n \in \mathbb{N}$ *için),* $n\mathbb{Z}$*'ye eşittir. Ayrıca,*

i. *Eğer* $A = \{0\}$ *ise,* $n = 0$*'dır.*

ii. *Eğer* $A \neq \{0\}$ *ise,* $A = n\mathbb{Z}$ *eşitliğini sağlayan tam iki tamsayı vardır. Bunlardan biri n ise diğeri* $-n$*'dir.*

iii. *Eğer* $A \neq \{0\}$ *ise ve n, A'nın en küçük pozitif elemanıysa,* $A = n\mathbb{Z}$*'dir.*

Kanıt: A, $\mathbb{Z}$'nin çıkarma altında kapalı ve boş olmayan bir altkümesi olsun. A'dan bir a elemanı alalım. A çıkarma altında kapalı olduğundan $0 = a - a \in A$. Dolayısıyla $0 \in A$.

Eğer $A = \{0\}$ ise, n'yi 0 almak yeterli. Bundan böyle A'nın $\{0\}$ olmadığını, başka elemanlar da içerdiğini varsayalım.

Eğer $x \in A$ ise, $-x$ de A'nın bir elemanıdır, çünkü $0 \in A$ olduğundan, $-x = 0 - x \in A$. Dolayısıyla $-A \subseteq A$ ve A'da pozitif sayılar olmak zorunda.

Şimdi n, A'nın pozitif sayılarının en küçüğü olsun. $A = n\mathbb{Z}$ eşitliğini kanıtlayacağız.

Her şeyden önce A toplama altında kapalıdır, yani $x, y \in A$ ise, $x + y$ de A'nın bir elemanıdır, çünkü, biraz önce gördüğümüz üzere, $-y \in A$ olduğundan, $x + y = x - (-y) \in A$.

$n\mathbb{Z} \subseteq A$ ilişkisinin kanıtı artık kolay: A toplama altında kapalı olduğundan ve $n \in A$ olduğundan, $n, 2n, 3n, \ldots \in A$. Ayrıca $-n \in A$ olduğundan, $2(-n), 3(-n), 4(-n), \ldots \in A$, yani $-n, -2n, -3n, \ldots \in A$. 0'ın A'nın bir elemanı olduğunu zaten biliyoruz. Demek ki $n\mathbb{Z} \subseteq A$.

Şimdi $A \subseteq n\mathbb{Z}$ ilişkisini kanıtlayalım. $x \in A$ olsun. x'in $n\mathbb{Z}$'te olduğunu kanıtlayacağız. Gerekirse x yerine $-x$ alarak, x'in pozitif olduğunu varsayabiliriz. x'i n'ye bölelim. n, x'te q kez olsun, kalan sayıya da r diyelim: $x = nq + r$. (Herkesin bildiği bu olguyu MD–2003–IV, sayfa 48–49'da kanıtlamıştık). Burada $q \in \mathbb{N}$ ve $r = 0, 1, \ldots, n-1$ dir. Daha önce kanıtladığımız $nq \in n\mathbb{Z} \subseteq A$ ilişkisinden dolayı ve A çıkarma altında kapalı olduğundan, $r = x - nq \in A$. Demek ki r, A'nın 0'la $n - 1$ arasında bir elemanı. Ama n, A'nın en küçük pozitif sayısıydı. Bundan $r = 0$ çıkar. Sonuç olarak, $x = nq + r = nq \in n\mathbb{Z}$.

Bir n doğal sayısı için $A = n\mathbb{Z}$ eşitliğini gördük. Eğer $n\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ ise, $n = \pm m$ olacağından, $A = n\mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan bir tek n doğal sayısı vardır. □

EKOK

$n\mathbb{Z}$ biçiminde yazılan altkümelerin herhangi ikisinin kesişimi gene bu türden bir kümedir; örneğin, $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}$, $12\mathbb{Z} \cap 30\mathbb{Z} = 60\mathbb{Z}$. Şimdi bunu kanıtlayalım.

Önsav 2. $a, b \in \mathbb{Z}$ *olsun.* $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ *çıkarma altında kapalıdır. Dolayısıyla bir* $m \in \mathbb{Z}$ *için,* $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ *eşitliği geçerlidir.*

Kanıt: Her şey apaçık olmalı: $a\mathbb{Z}$ ve $b\mathbb{Z}$ çıkarma altında kapalı olduklarından kesişimleri de çıkarma altında kapalıdır. Dolayısıyla, Önsav 1'e göre $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ kümesi belli bir $m \in \mathbb{Z}$ için $m\mathbb{Z}$ kümesine eşittir. □

Yukardaki önsav sadece iki $a\mathbb{Z}$ ve $b\mathbb{Z}$'nin kesişimi için değil, $a\mathbb{Z}$ biçiminde yazılan herhangi sayıda kümenin kesişimi için de doğrudur, kolayca kanıtlanabileceği üzere.

Eğer $a, b \in \mathbb{Z}$ verilmişse, $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan m tamsayılarına, ki bunlardan genelde iki tane olur, a ve b'nin **en küçük ortak katı** denir ve bu elemanlar ekok(a, b) olarak gösterilir. Örneğin ekok$(12, 8) = \pm 24$. Her ne kadar okullarda çoğunlukla ekok'un pozitif olduğu söylenirse de, her söylenene kulak asmamak gerekir. En doğrusu, ekok$(12, 8)$'i ± 24 olarak, ya da $\{24, -24\}$ kümesi olarak tanımlamaktır.

Kolay birkaç eşitlik:

$$\text{ekok}(0, b) = 0,$$
$$\text{ekok}(1, b) = \pm b,$$
$$\text{ekok}(a, b) = \text{ekok}(b, a),$$
$$\text{ekok}(ax, bx) = \text{ekok}(a, b)x,$$
$$\text{ekok}(\text{ekok}(a, b), c) = \text{ekok}(a, \text{ekok}(b, c)).$$

Bu eşitliklerin herbiri tanımın kendisinden çıkar. Son eşitlik, $(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}) \cap c\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} \cap (b\mathbb{Z} \cap c\mathbb{Z})$ eşitliğinden çıkar. Dolayısıyla ekok$((a, b), c)$ ya da ekok$(a, (b, c))$ yazacağımıza ekok(a, b, c) yazabiliriz.

Tanımdan da anlaşılacağı üzere, ekok$(a, b) = \pm m$ ise hem a'ya hem de b'ye bölünen sayılar (yani hem $a\mathbb{Z}$'de hem de $b\mathbb{Z}$'de olan sayılar) m'ye de bölünür. Ayrıca $m \in m\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}$ olduğundan, m, a'ya bölünür. Aynı şekilde m, b'ye bölünür. Demek ki m, hem a'ya hem de b'ye bölünür. Ayrıca $|m|$, bu koşulları sağlayan en küçük doğal sayıdır, yani m, a ve b'nin gerçekten en küçük ortak katıdır:

Önsav 3. ekok$(a, b) = \pm m$ *eşitliği için gerek ve yeter koşul* $|m|$*'nin a ve b'ye bölünen en küçük doğal sayı olmasıdır.*

Kanıt: Önce ekok$(a, b) = \pm m$ eşitliğini varsayalım. a ve b'nin m'yi böldüğünü biliyoruz. Eğer a ve b, bir n tamsayısını bölüyorlarsa, o zaman $n \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ ve n, m'ye bölünür.

Şimdi $|m|$, a ve b'nin böldüğü en küçük doğal sayı olsun. O zaman $m \in a\mathbb{Z}$ ve $m \in b\mathbb{Z}$. Demek ki $m\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}$ ve $m\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z}$. Yani $m\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = |\text{ekok}(a, b)|\mathbb{Z}$. Ama bundan $|\text{ekok}(a, b)| \leq |m|$ çıkar. Koşuldan dolayı $|\text{ekok}(a, b)| = |m|$. □

EBOB

Önsav 4. *a ve b iki tamsayı olsun. O zaman,* $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ *kümesi, yani* $\{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}$ *kümesi çıkarma altında kapalıdır. Dolayısıyla belli bir* $d \in \mathbb{Z}$ *için,* $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ *eşitliği geçerlidir.*

Kanıt: Her şey çok açık. □

Yukardaki önsav sadece iki $a\mathbb{Z}$ ve $b\mathbb{Z}$ sayı kümesinin toplamı için değil, $a\mathbb{Z}$ biçiminde yazılan herhangi sayıda kümenin toplamı için de doğrudur.

Eğer $a, b \in \mathbb{Z}$ verilmişse, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan d tamsayılarına a ve b'nin **en büyük ortak böleni** denir ve bu elemanlar ebob(a, b) olarak gösterilir. Örneğin ebob$(12, 8) = \pm 4$. Ebob hakında kolay birkaç eşitlik:

$$\text{ebob}(0, b) = \pm b,$$
$$\text{ebob}(1, b) = \pm 1,$$
$$\text{ebob}(a, b) = \text{ebob}(b, a)$$
$$\text{ebob}(ax, bx) = \text{ebob}(a, b)x$$
$$\text{ebob}(\text{ebob}(a, b), c) = \text{ebob}(a, \text{ebob}(b, c)).$$

$|\text{ebob}(a, b)|$'nin anlamı açık: ebob(a, b) kümesinin herhangi bir elemanının mutlak değeri.

Önsav 5. *Eğer a ya da* $b \neq 0$ *ise,* $|\text{ebob}(a, b)|$ *hem a'yı hem de b'yi bölen en büyük doğal sayıdır.*

Kanıt: ebob$(a, b) = \pm d$ olsun. $a \in a\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ ilişkilerinden d'nin a'yı böldüğü çıkar. Aynı şekilde d, b'yi de böler. Eğer e, a ve b'yi bölüyorlarsa, o zaman $a\mathbb{Z} \subseteq e\mathbb{Z}$ ve $b\mathbb{Z} \subseteq e\mathbb{Z}$, yani $d \in d\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \subseteq e\mathbb{Z}$ ve e, d'yi böler; yani, $d \neq 0$ olduğundan, $|e| \leq |d|$. □

Önsav 6 (Bézout Önsavı). $|\text{ebob}(a, b)| = ax + by$ *eşitliğini sağlayan* $x, y \in \mathbb{Z}$ *tamsayıları vardır. Ayrıca eğer a ya da* $b \neq 0$ *ise,* $|\text{ebob}(a, b)|$*, bu türden bir eşitliğin sağlandığı en küçük pozitif doğal sayıdır.*

Kanıt: $|\text{ebob}(a, b)| \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ olduğundan, x ve y'nin varlığı bariz. $|\text{ebob}(a, b)|$, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ kümesinin en küçük pozitif sayısı olduğundan (Önsav 1.iii), önsavın ikinci kısmı da bariz. □

Önsav 6'nın bir başka kanıtı için bknz. MD-2004-I, sayfa 16.

Eğer ebob$(a, b) = \pm 1$ ise, yani a ve b'nin ortak bölenleri sadece 1 ve -1 ise, o zaman, a ve b sayılarına **aralarında asal** denir. Örneğin, 6 ve -35 aralarında asaldır, ama 21 ve 49 aralarında asal değildirler.

> Bézout Önsavı'ndaki x ve y'den çiftinden birden fazla vardır. Örneğin, $|\text{ebob}(12, 42)| = 6$ ve
> $$6 = 12 \times (-3) + 42 \times 1 = 12 \times 4 + 42 \times (-1)$$
> Eğer $d = |\text{ebob}(a, b)|$ ve $ax + by = d$ ise, o zaman her $u, v \in \mathbb{Z}$ için, $a(x + bu/d) + b(y - au/d) = d$.

Önsav 7 (Bézout Önsavı). *a ve b'nin birbirine asal olmaları için gerek ve yeter koşul $ax + by = 1$ eşitliğini sağlayan x ve y sayılarının olmasıdır.*

Kanıt: Eğer a ve b aralarında asalsa, bir önceki önsavdan dolayı $ax + by = 1$ koşulunu sağlayan x ve y sayıları vardır. Eğer bu koşulu sağlayan x ve y sayıları varsa, o zaman a ve b'nin her ortak böleni $ax + by$'nin de, yani 1'in de bir bölenidir. Dolayısıyla a ve b'nin ortak bölenleri sadece 1 ve -1'dir, yani a'yla b aralarında asaldır. □

> Önsav 7, bize b'nin modülo a tersini veriyor:
> $by \equiv 1 \bmod a$.

Sonuç 8. *Eğer* $\text{ebob}(a, b) = \pm d$ *ise a/d ve b/d birbirine asal iki tamsayıdır.*

Kanıt: Önsav 6'ya göre, $ax + by = d$ eşitliğini sağlayan x ve y tamsayıları vardır. Demek ki, $(a/d)x + (b/d)y = 1$. Önsav 7'ye göre a/d ve b/d birbirine asaldırlar. □

Sonuç 9. *a, b ve c birer tamsayı ve $d = |\text{ebob}(a, b)|$ olsun. Eğer a, bc'yi bölüyorsa o zaman a, cd'yi böler.*

Kanıt: x ve y Önsav 6'daki gibi iki sayı olsun: $ax + by = d$. Demek ki $axc + byc = cd$. Ama a sol taraftaki hem axc hem de byc terimlerini bölüyor. Demek ki a, sağ taraftaki cd'yi de bölüyor. □

Algoritmalar

Önce $\text{ebob}(a, b)$'yi bulma algoritmasını açıklayalım.

En basit yöntemi bir örnekle gösterelim:
$$(210, 77) = (133, 77) = (56, 77) = (56, 21) = (35, 21) = (14, 21) = (14, 7) = (7, 7) = 7.$$
Şimdi daha zor ama daha yapıcı bir yöntem:

a ve b iki tamsayı olsun. $a = b$ ise $|\text{ebob}(a, b)| = a$ ve bu durumda sorun yok. Demek ki $a > b$ eşitsizliğini varsayabiliriz. Eğer $b = 0$ ise $|\text{ebob}(a, b)| = a$ ve bu durumda da sorun yok. Demek ki $a > b > 0$ eşitsizliğini de varsayabiliriz. Şimdi, a'yı b'ye bölelim: $a = bq + r$ ve $0 \le r < b$. Elbette a ve b'yi bölen her sayı b ve r'yi de böler. Ve b ve r'yi bölen her sayı a ve b'yi de böler. Dolayısıyla $\text{ebob}(a, b) = \text{ebob}(b, r)$. Demek ki $\text{ebob}(a, b)$ yerine $\text{ebob}(b, r)$'yi bulmak yeterli. Sayılar küçüldü: Eskiden a ve b'nin ebob'unu bulmak istiyorduk, şimdiyse b ve r'nin. $r = 0$ ise sorun yok: $\text{ebob}(a, b) = \text{ebob}(b, r) = b$. Eğer $r > 0$ ise b'yi r'ye bölelim ve devam edelim.

Bu yöntemi önce bir örnekle gösterelim. $a = 7980$, $b = 357$ olsun:
$$\begin{aligned}
7980 &= 357 \times 22 + 126\\
357 &= 126 \times 2 + 105\\
126 &= 105 \times 1 + 21\\
105 &= 21 \times 5 + 0.
\end{aligned}$$
Demek ki $\text{ebob}(7980, 357) = \text{ebob}(357, 126) = \text{ebob}(126, 105) = \text{ebob}(105, 21) = \text{ebob}(21, 0) = 21$, en sondan bir önceki satırdaki kalan.

Genel yöntem şöyle. Sürekli bölme yaparız. Önce a'yı b'ye böleriz; sonra b'yi bu bölmeden kalana böleriz; sonra iki önceki bölmeden kalanı bir önceki bölmeden kalana böleriz... Bunu böyle devam ederiz, ta ki kalan sıfır olana dek. O zaman, sıfır olmadan bir önceki kalan (aşağıda r_{k+1}) $\text{ebob}(a, b)$'dir:
$$\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1 && (1)\\
b &= r_1q_2 + r_2 && (2)\\
r_1 &= r_2q_3 + r_3 && (3)\\
&\;\;\ldots\\
r_{k-2} &= r_{k-1}q_k + r_k && (k)\\
r_{k-1} &= r_kq_{k+1} + r_{k+1} && (k+1)\\
r_k &= r_{k+1}q_{k+2} + 0. && (k+2)
\end{aligned}$$
Böylece iki sayının ebob'unu bulmuş olduk.

Şimdi $ax + by = |\text{ebob}(a, b)|$ eşitliğini sağlayan x ve y'yi bulalım.

Yazılımda düzen olsun diye $r_{-1} = a$ ve $r_0 = b$ yazalım.

En sondan bir önceki, yani $(k+1)$-inci bölmeden başlarız:
$$r_{k+1} = r_{k-1} - r_kq_{k+1}.$$
Bir sonraki adımda, r_k yerine k-inci bölmeden elde edilen $r_k = r_{k-2} - r_{k-1}q_k$ eşitliğini yerleştiririz:
$$\begin{aligned}
r_{k+1} &= r_{k-1} - (r_{k-2} - r_{k-1}q_k)q_{k+1}\\
&= r_{k-1}(1 + q_k\, q_{k+1}) - r_{k-2}q_{k+1}.
\end{aligned}$$
Bir sonraki adımda, $(k-1)$-inci bölmeyi kullanarak r_{k-1}'i yok ederiz. Böylece teker teker r'lerin endisleri küçülür ve en sona
$$r_{k+1} = r_{-1}x + r_0y = ax + by$$
biçiminde bir ifade kalır. $r_{k+1} = \text{ebob}(a, b)$ olduğundan istediğimiz x ve y'yi böylece bulmuş oluruz.

Bir önceki örneğe bu yöntemi uygulayacak olursak,

$$\begin{aligned} 21 &= 126 - 105 \\ &= 126 - (357 - 126 \times 2) \\ &= 126 \times 3 - 357 \\ &= (7980 - 357 \times 22) \times 3 - 357 \\ &= 7980 \times 3 - 357 \times (22 \times 3 + 1) \\ &= 7980 \times 3 - 357 \times 67 \end{aligned}$$

buluruz.

EBOB'la EKOK

Yukarda iki sayının ebob'unu hesaplamayı öğrendik. Burada ekok'u nasıl bulacağımızı göreceğiz. Aşağıdaki ilginç teorem hiçbir işe yaramasa en azından bu işe yarar.

Teorem 10. $|\text{ebob}(a, b)\text{ekok}(a, b)| = |ab|$.

Kanıt: a ya da b'den biri 0 ise, $\text{ekok}(a, b) = 0$ olduğundan, bu durumda teorem doğru. Şimdi ne a'nın ne de b'nin 0 olduğunu vasayalım. Gerekirse a yerine $-a$, b yerine $-b$ alarak, a ve b'nin her ikisinin de pozitif olduğunu varsayabiliriz.

$|\text{ebob}(a, b)| = d$ olsun. d, a'yı böldüğünden, ab/d bir doğal sayıdır. $ab/d = |\text{ekok}(a, b)|$ eşitliğini kanıtlayacağız.

$ab/d = (a/d)b = a(b/d)$ eşitliklerinden, a ve b'nin ab/d'yi böldüğü anlaşılır. Önsav 3'e göre, ab/d'nin a'nın ve b'nin böldüğü en küçük doğal sayı olduğunu kanıtlamalıyız. e, a ve b'nin böldüğü pozitif bir sayı olsun. ab/d'nin e'yi böldüğünü kanıtlayacağız ve böylece $ab/d \le e$ eşitsizliğini kanıtlamış olacağız.

a ve b, e'yi böldüğüne göre, x ve y tamsayıları için, $e = ax = by$ eşitlikleri geçerlidir. Demek ki a, by'yi bölüyor. Sonuç 9'a göre a, yd'yi de böler. Bundan a/d'nin y'yi böldüğü çıkar. Dolayısıyla ab/d, by'yi, yani e'yi böler. □

Ekok Matrisleri

S sonlu bir pozitif doğal sayı kümesi olsun. Eğer $S = \{x_1, ..., x_n\}$ ise, $M(S) = (\text{ekok}(x_i, x_j))_{i,j}$ olsun. $M(S)$, $n \times n$ boyutunda bir matristir. 1992'de Bourque ve Ligh, eğer her $x, y \in S$ için $\text{obeb}(x, y) \in S$ ise, $\det(M(S)) \neq 0$ sanısını ortaya attılar. $n < 8$ ise sanı gerçekten doğru, ancak Haukkanen, Wang ve Sillanpaa sanının $n = 8$ için yanlışlığını $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 45, 48\}$ karşıörneğiyle 1997'de gösterdiler. 1999'da S. Hong her $n \ge 8$ için bir karşıörnek buldu.

Sanı yanlış ama gene de ekok matrisleriyle sayılar kuramının önemli fonksiyonlarını içeren ilginç eşitlikler elde edilir.

Yukardaki bilgileri bize aktaran konunun uzmanlarından Gazi Üniversitesi'nden Ercan Altınışık'a teşekkürler. ♥

Alıştırmalar

1. $|\text{ebob}(a, b)| = 18$ ve $|\text{ekok}(a, b)| = 270$ ilişkilerini sağlayan tüm a ve b doğal sayılarını bulun.

2. $|\text{ekok}(p^n, p^m)|/|\text{ebob}(p^n, p^m)| = p^{|n-m|}$ eşitliğini kanıtlayın.

3. Eğer $\text{ebob}(a_1, a_2, ..., a_n) = d$ ise,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = d$$

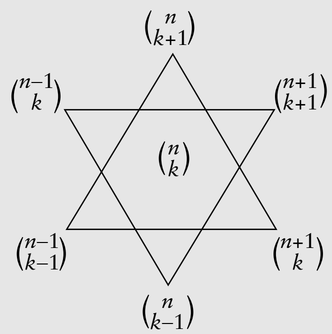
eşitliğini sağlayan $x_1, x_2, ..., x_n$ tamsayılarının varlığını kanıtlayın. ♥

Davud Yıldızı Teoremi

1972'de Gould, her $1 \le k < n$ doğal sayıları için,

$$\text{ebob}\left(\binom{n-1}{k}, \binom{n}{k-1}, \binom{n+1}{k+1}\right) = \text{ebob}\left(\binom{n-1}{k-1}, \binom{n}{k+1}, \binom{n+1}{k}\right)$$

eşitliğini gösterdi. Bu eşitliği Davud yıldızıyla görselleştirebiliriz:



Daha sonra bu sonuç D. Singmaster tarafından,

$$\begin{aligned} \text{ebob}\left(\binom{n-1}{k}, \binom{n}{k-1}, \binom{n+1}{k+1}\right) &= \text{ebob}\left(\binom{n-1}{k-1}, \binom{n}{k+1}, \binom{n+1}{k}\right) \\ &= \text{ebob}\left(\binom{n-1}{k-2}, \binom{n-1}{k-1}, \binom{n-1}{k}, \binom{n-1}{k+1}\right) \end{aligned}$$

olarak genişletilmiştir. Daha genel bir sonuç için, [Hitotumatu ve Sato, *Expansion of the Star of David Theorem of H. W. Gould and David Singmaster*, Abstracts Amer. Math. Soc. sayfa A-377, 1075]'e bakın. ♥