Yayın Dünyası

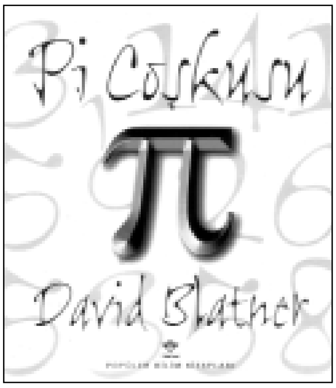
David Blatner'in "π Coşkusu"

Ali Nesin* / *anesin@bilgi.edu.tr*

Biraz sağduyuya sahip herhangi birine 123456789 ve 259285714 sayılarından hangisi rastgeledir diye sorulsa, alınacak yanıt hiç değişmez. Sözgelimi, numaraları böyle olan iki piyango biletinden birini seçmek zorunda kalan "sağduyulu" kişi, ikincisini seçer, daha rastgele olduğundan (ne demekse!), ikramiyenin bu bilete çıkma olasılığının nedense daha yüksek olduğunu düşünür.

Politikacılar sık sık "halkımızın sağduyusuna güveniyoruz" derler. Kimse de bundan gocunmaz. Oysa halkın sağduyusuna güvenmek, halkın aklına güvenmemek demektir. Aklı olduğu düşünülen birinin sağduyusuna değil aklına güvenilir.

Matematik bir anlamda sağduyuyu ve sezgiyi kâğıda dökebilme, simgeleştirebilme, biçimselleştirebilme, yani sağduyuyu akla dönüştürme (ya da eğer sağduyu yanılıyorsa, dönüştürememe) sanatıdır.



Sağduyu bazen yanılır: Sözgelimi, sağduyu, 0,999999... (burada sonsuz tane 9 var, hepsini yazamadık!) sayısının 1'den küçük olduğunu söyler. Oysa bu sayı tam 1'e eşittir! Burada sağduyu yanılmaktadır. Elbette böyle bir şeyi kanıtlayabilmek için 0,999999... sayısının ve 1'in ne demek olduğunu bilmek gerekir, terimlerinin anlamı bilinmeyen bir önerme kanıtlanamaz.

123456789'un rastgele bir sayı olmadığı belli, ardışık rakamlar teker teker sıralanmış. Ama ikinci sayı da pek rastgele sayılmaz:

$1/1 + 1/2 + ... + 1/7 = \underline{2{,}59285714}285714...$

Zaten hangi sayı rastgele olabilir ki? Her sayı yazıldığı anda, rastgele olmaktan çıkar, çünkü o sayı o anda yazılmış olma özelliğine sahiptir ve artık rastgele değildir.

Rastgele bir sayının ne demek olduğunu bilmediğimi ve hiçbir zaman da bilemeyeceğimi kavradığımda koca adamdım. Çok şaşırmıştım.

Eğer matematikçi olmasaydım rastgele sayının ne demek olduğunu bildiğimi sanacaktım hayatım boyunca. Ve bilmediğim bir şeyi bildiğime inanarak yanlış bir dünyada yaşayacaktım. Ama keşke rastgele kavramını daha erken sorgulasaydım! Onca yılım bu kavramı kabul ederek geçmiş.

π'nin ne demek olduğunu bilmediğimi biraz daha erken - ama gene de geç - farkettim ve o zaman daha da şaşırdım. Çünkü π ne de olsa rastgele sayıdan daha sık ve daha inanarak kullandığım bir kavramdı. π yazdığımda, yazdığımın ne anlama geldiğini bildiğimden şuncacık kuşkum olmazdı. Nasıl da kandırılmışım! Sadece π yazmakla kalmaz $\pi^{\sqrt{2}}$ bile yazardım gülünçlüğe varan bir kendine güvenle. Ne olduğunu bilmeden ve ne olduğunu bilmediğimi de bilmeden, dahası bildiğimi sanarak, hayır bildiğimi sanarak bile değil, bunun kıyısına köşesine yaklaşacak bir soru bile sormadan!

Nasıl bir beyin yıkamanın içinden geçmişsem!

Beyni yıkanan insan sabit bir düşüncenin doğru olduğuna inanır, ama benimkisi inanç bile değildi. "İnanıyorum" bile demiyordum ki inanç olsun! Demek ki beyin yıkamanın ötesinde bir süreçten geçirilmişim.

Dairenin çevresi $2\pi r$, alanı da πr^2. Hep söylendi, o kadar söylendi ve o kadar erken söylendi ki varlığımın bir parçası oldu. Neden her iki ölçümde de π var? Nerden çıktı? Kim söyledi? En başta eli öpülesi Seçim öğretmen olmak üzere herkes aynı şeyi söyledi. Bilinen bir gerçekti. Bu böyleydi! Allah'ın emri bile değil, doğanın gereği bile değil, eşyanın tabiatı da değil, bu böyleydi o kadar. Okula öğrenmek için gitmiştik ve öğreniyorduk!

Bunlar ayrımına vardığım beyin yıkamalar. Ya ayrımına varmadıklarım? Kimbilir ne hasarlar yarattı bende bu eğitim sistemi.

* İstanbul Bilgi Üniversitesi, Matematik Bölümü öğretim üyesi.

İkinci kez dünyaya gelecek olsam, daha ilk günden itibaren duyduğum her şeyi sorgularım, ama ikinci kez gelmeyeceğim ki. Gitti gider geçen zaman, bugünkü beni yaratarak...

π rastgele bir sayı değildir elbet. Ne de olsa dairenin çevresinin çapına bölümüne eşittir. Doğanın bize sunduğu bir sabittir. π'den bir tane vardır. Bir tane olan bir sayı elbette rastgele olamaz!

π rastgele değil de ya ne rastgele? [0, 1] kapalı aralığından "rastgele"nin ne demek olduğunu bilmesek de rastgele bir sayı seçelim. Sayının gerçekten rastgele olmasına da özellikle dikkat edelim!

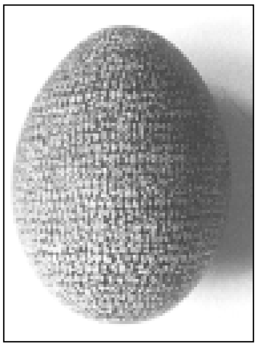
Bu sayı herhalde,

$$0,101010101010...$$

gibi bir sayı olamaz. Rastgele bir sayıda her rakam aynı oranda yani 1/10 oranında belirmeli. Hissettiğimiz bu olguyu matematikselleştirelim.

a, 0'la 1 arasında seçilmiş herhangi bir sayı olsun. a'yı onluk tabanda,

$$a = 0,a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$$



olarak yazalım ve virgülden sonraki her rakamın belirme oranını hesaplayalım. 0, yüzde kaç beliriyor, 1 yüzde kaç beliriyor?.. Eğer a "rastgele"yse, her rakam yüzde on oranda belirmeli, ne fazla ne eksik, sağduyumuz öyle söylüyor. Ama bu belirme oranı başlangıçta değil, sonlarda yüzde on olmalı, yani ilk birkaç değil, ilk 1 milyar rakamda örneğin, ve daha sonra da, yani a'yı yeterince uzun yazdığımızda rakamların belirme oranları yüzde ona yakınsamalı.

Rastgelenin tanımı sadece bu olsaydı,

$$0,012345678901234567890123456789...$$

diye yazılan 0123456789 sonlu dizisinin tekrarlandığı sayı da rastgele bir sayı olurdu ki, sağduyumuz bunun rastgele olmaması gerektiğini söylüyor. Sağduyumuza güveniyoruz! Bu aşamada başka çaremiz yok. Ama memnun kaldığımız tanımı verdikten sonra sağduyuya ihtiyacımız kalmayacak.

Demek ki bir $a = 0,a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots.$ sayısının rastgeleliğini anlamak için sadece beliren rakamların yoğunluğuna bakmak yeterli değil. Ayrıca beliren rakam guruplarının da yoğunluğuna bakmalı. Örneğin, $0,(a_1a_2)(a_3a_4)(a_5a_6)\ldots.$ yazılımında, sözgelimi 91 sayısının ikilik gruplarda belirme oranı yüzde bir olmalı. Aynı şekilde $0,(a_1a_2a_3)(a_4a_5a_6)(a_7a_8a_9)\ldots$ yazılımında 524 sayısının üçlük gruplarda belirme oranı binde bir olmalı.

Yukardaki, 0,01234567890123456789012... örneğinde 0123456789 dizisinin onluk gruplarda belirme oranı yüzde yüz olduğundan, bu sayının rastgele sayılmaması gerekir. Rastgele bir sayıda bu sayı $1/10^{10}$ oranda belirmeliydi.

Eğer bir sayının yukarda belirtilen özelliği varsa, yani k uzunluğundaki her dizinin, sayının k'lik grupların da belirme oranı $1/10^k$'ye yakınsıyorsa, o zaman bu sayıya rastgele demek geçiyor içimizden.

Ama o zaman da, sayıları 10 tabanında yazdığımız için, 10'a özel bir anlam vermiş oluruz. Bal gibi de 10 tabanında bize rastgele gelen bir sayı, 3 tabanında, 0,20112011201120112011... gibi düzenli bir biçiminde yazılabilir. Bu yüzden yukardaki özelliği sağlayan bir sayıya **10-normal** diyelim.

2/7 gibi kesirli sayılar 10'luk tabanda belli bir zaman sonra hep yinelendiklerinden, kesirli sayılar 10-normal değildir.

2-normalin ne demek olması gerektiği belli: Sayıyı ikilik tabanda yazdığımızda 0 ve 1 rakamları yüzde 50, yani 1/2 oranında beliriyorsa, 00, 01, 10 ve 11 dizilerinin herbiri 1/4 oranında beliriyorsa, genel olarak, her k uzunluğundaki 0-1 dizisi sayının ikilik tabanda açılımında $1/2^k$ oranında beliriyorsa o zaman sayıya 2-normal diyelim.

Bir sayının ***b*-normal** olması için, sayının b tabanında açılımında, 0'la $b - 1$ arasındaki rakamlardan oluşan her k uzunluğundaki dizinin belirme oranı sonsuza doğru $1/b^k$ olmalı, tanım böyle.

Eğer bir sayı her $b \geq 2$ doğal sayısı için b-normalse, bu sayıya **normal sayı** adını verelim.

Bu kavram, 1909'da rastgele sayıların tanımını bulmak isteyen Fransız matematikçisi Emile Borel tarafından bulunmuştur. Ama rastgele sayı kavramını matematikselleştirmek isteyen her **sağduyu sahibi** ve **aklı başında** kişi Emile Borel'in geçtiği yoldan geçmek zorundadır. Matematiksel buluşlar rastlantısal değil, kaçınılmazdırlar. Belki her konuda bu böyledir ama bunun böyle olduğu matematikte çok belirgindir.

İyi güzel de normal sayılar var mı? Hem de çok! Bu da Emile Borel'in bir teoremi. Teoremin ne dediğinin anlaşılması için bir iki açıklama gerekiyor. [0, 1] aralığının uzunluğu 1'dir. Bu aralıktan sonlu sayıda sayı atarsak uzunluk değişmez, gene 1 kalır. Ama [0, 1/2] aralığının uzunluğu 1/2'dir. Fransız matematikçisi Lebesgue [0, 1] aralığının hemen hemen her altkümesinin bir uzunluğu olduğunu gösterdi. Bunu yapmak için de önce uzunluk kavramını tanımladı elbet. (Terimlerinin anlamı bilinmeyen bir önerme kanıtlanamaz!) Emile Borel, normal sayılar kümesinin uzunluğunun 1 olduğunu, yani bir anlamda sayıların pek çoğunun normal olduğunu kanıtlamıştır.

Madem ki bu kadar çok var, bir normal sayı örneği bulabilmeliyiz... Ne yazık ki bugüne kadar normal bir sayı bulunamadı!

Yakın zamanda, D. Champernowne, Cambridge Üniversitesi'nde bir lisans öğrencisiyken,

0,1234567891011121314151617181920...

sayısının 10-normal olduğunu kanıtladı. Pek rastgele olmayan bu sayının normal olmadığını ummak isterim, ama normalmiş gibi bir his var içimde, sağduyum öyle söylüyor!

$\pi = 3{,}14$1592653589793238462643383279502884197169399375105
8209749445923078164062862089986280348253421170679821480865132
8230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852
1105559644622948954930381964428810975665933446128475648233786
7831652712019091456485669234603486104543266482133936072602491
4127372458700660631558817488152092096282925409171536436789259
0360011330530548820466521384146951941511609433057270365759591
9530921861173819326117931051185480744623799627495673518857527
2489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473
7190702179860943702770539217176293176752384674818467669405132
0005681271452635608277857713427577896091736371787214684409012
2495343014654958537105079227968925892354201995611212902196086
4034418159813629774771309960518707211349999998372978049951059
7317328160963185950244594553469083026425223082533446850352619
3118817101000313783875288658753320838142061717766914730359825
3490428755468731159562863882353787593751957781857780532171226
8066130019278766111959092164201989380952572010654858632788659
3615338182796823030195203530185296899577362259941389124972177
5283479131515574857242454150695950829533116861727855889075098
3817546374649393192550604009277016711390098488240128583616035
6370766010471018194295559619894676783744944825537977472684710
4047534646208046684259069491293313677028989152104752162056966
0240580381501935112533824300355876402474964732639141992726042
6992279678235478163600934172164121992458631503028618297455570
6749838505494588586926995690927210797509302955321165344987202
7559602364806654991198818347977535663698074265425278625518184
1757467289097777279380008164706001614524919217321721477235014
1441973568548161361157352552133475741849468438523323907394143
3345477624168625189835694855620992192221842725502542568876717
9049460165346680498862723279178608578438382796797668145410095
3883786360950680064225125205117392984896084128488626945604241
9652850222106611863067442786220391949450471237137869609563643
7191728746776465757396241389086583264599581339047802759009946
5764078951269468398352595709825822620522489407726719478268482
6014769909026401363944374553050682034962524517493996514314298
0919065925093722169646151570985838741059788595977297549893016
17539284681382686838689427741559918559252459539594310499725...

Rastgele bir sayının normal olması gerektiği belli. Ama her normal sayı "rastgele" olmalı mı? Ne yazık ki hayır. Normal bir sayı alalım. Bunu onluk tabanda yazalım. Sonra bu sayının 1inci, 4üncü, 9uncu, 16ıncı, 25inci, yani karelere tekabül eden rakamlarını silip yerine 0 yazalım. Elde ettiğimiz sayının rastgele olmaması gerektiği belli, çünkü tamkare sırada yer alan rakamlarının hepsi 0. Öte yandan yeni sayının normal olduğu kanıtlanabilir.

Şimdi canalıcı soruyu soralım: π rastgele bir sayı mı? Daha doğrusu, 0'la 1 arasında yer alan $\pi - 3$? Rastgele sayının ne demek olduğunu bilmediğimizden, bu soru üzerine matematiksel olarak düşünemeyiz, ama π doğanın doğal bir sabiti olduğundan π rastgele bir sayı olmamalı.

π'nin rastgele bir sayı olmaması için bir neden daha var: π'nin n-inci rakamı daha önceki rakamları bilinmeden bile, tek bir formülle hesaplanabilir. Oysa rastlantısal bir rakamda böyle bir formül olmamalı. Nitekim n-inci rakamı bir formülle verilen sayıların sayısı formül sayısı kadardır, yani sayılabilir sonsuzluktadır, oysa 0'la 1 arasında sayılamayacak sonsuzlukta sayı vardır. Herkesin anladığını sanmadığım bu son tümceden sonra π'nin normal olup olmadığı sorusuna gelelim.

π sayısı 3,14159 diye başlayan ve hiç durmadan ve kendini tekrarlamadan sonsuza kadar devam eden bir sayıdır. π'nin tüm rakamlarını bilmiyoruz – nasıl bilebiliriz ki? – ama bugün hızlı formüller ve bilgisayarlar sayesinde π'nin milyonlarca rakamı hesaplandı. Görünen o ki π normal bir sayı.

İşte... Ele aldığımız kitap bu π sayısı üzerine... Ve söyledikleri de üç aşağı beş aşağı (yukarı değil!) yukarda söylediklerimizden ibaret. Normallikten hiç söz etmiyor. Gösterişli ve albenisi olan ama içeriği sayfa sayısına göre çok zayıf bir kitap. Zaten yazarı David Blatner de matematikçi değil, grafiker. Yazarın matematikçi olmadığı birçok yerde kendini belli ediyor. Sadece benim değil, benim gibi iki matematikçinin de anlam veremediği tümceler az değil. Çeviri de bu konuda bize hiç yardımcı olmadığı gibi galiba tam tersine anlaşılabilecek tümceler Türkçeye çevrilip daha da anlaşılmaz hale getirilmiş, sağda solda tanımlar unutulmuş örneğin. Oysa çevirmen Nermin Arık birçok başarılı çeviriye imza atmış biri. Bu kitap sanırım aceleye gelmiş.

Birileri de kalkıp π üzerine halkımızın sağduyusuna seslenecek, buram buram çeviri kokmayan kitap yazsa...

Rastlantısal sayı tartışmasını noktalayalım. Böyle mutlak bir kavram bildiğim kadarıyla yok. Yalnız Joe'nun, Smith'in, şunun bunun rastlantısallık testleri var. Bu testleri geçen Joe ya da Smith rastlantısalı olarak kabul edilir. Bu testler örneğin π'yi rastlantısal olarak kabul edip verilen sayıyı π'yle karşılaştırabilir. Bu yüzden π'nin normal olup olmadığı önemli bir konu ve bunun bir kanıtını bulana dek, π'nin yüz milyonlarca rakamını bulup normallliği yönünde delil topluyor bazı bilgisayarcılar. Bunu yaparken bir yandan da bilgisayarların gücünü ve hızını sınıyorlar. ♥