

# Yayın Dünyası

## David Blatner'in " $\pi$ Coşkusu"

Ali Nesin\* / [anesin@bilgi.edu.tr](mailto:anesin@bilgi.edu.tr)

Biraz sağduyuya sahip herhangi birine 123456789 ve 259285714 sayılarından hangisi rastgeledir diye sorulsa, alınacak yanıt hiç değişmez. Sözelimi, numaraları böyle olan iki pi-yango biletinden birini seçmek zorunda kalan "sağduyulu" kişi, ikincisini seçer, daha rastgele olduğundan (ne demekse!), ikramiyenin bu bilete çıkma olasılığının nedense daha yüksek olduğunu düşünür.

Politikacılar sık sık "halkımızın sağduyusuna güveniyoruz" derler. Kimse de bundan gocunmaz. Oysa halkın sağduyusuna güvenmek, halkın aklına güvenmemek demektir. Akli olduğu düşünülen birinin sağduyusuna değil aklına güvenilir.

Matematik bir anlamda sağduyuyu ve sezgiyi kâğıda dökebilme, simgeleştirebilme, biçimselleştirebilme, yani sağduyuyu akla dönüştürme (ya da eğer sağduyu yanılıyorsa, dönüştürememe) sanatıdır.

Sağduyu bazen yanılır: Sözelimi, sağduyu, 0,99999... (burada sonsuz tane 9 var, hepsini yazamadık!) sayısının 1'den küçük olduğunu söyler. Oysa bu sayı tam 1'e eşittir! Burada sağduyu yanılmaktadır. Elbette böyle bir şeyi kanıtlayabilmek için 0,99999... sayısının ve 1'in ne demek olduğunu bilmek gerekir, terimlerinin anlamı bilinmeyen bir önerme kanıtlanamaz.

123456789'un rastgele bir sayı olmadığı belli, ardışık rakamlar teker teker sıralanmış. Ama ikinci sayı da pek rastgele sayılmaz:

$$1/1 + 1/2 + \dots + 1/7 = 2,59285714285714\dots$$

Zaten hangi sayı rastgele olabilir ki? Her sayı yazıldığı anda, rastgele olmaktan çıkar, çünkü o sayı o anda yazılmış olma özelliğine sahiptir ve artık rastgele değildir.

Rastgele bir sayının ne demek olduğunu bilmediğimi ve hiçbir zaman da bilemeyeceğimi kavradığımda koca adamdım. Çok şaşırıştım.

Eğer matematikçi olmasaydım rastgele sayının ne demek olduğunu bildiğimi sanacaktım hayatım boyunca. Ve bilmediğim bir şeyi bildiğime inanarak yanlış bir dünyada yaşayacaktım. Ama keşke rastgele kavramını daha erken sorgulasaydım! Oca yılım bu kavramı kabul ederek geçmiş.

$\pi$ 'nin ne demek olduğunu bilmediğimi biraz daha erken - ama gene de geç - farkettim ve o zaman daha da şaşırđım. Çünkü  $\pi$  ne de olsa rastgele sayıdan daha sık ve daha inanarak kullandığım bir kavramdı.  $\pi$  yazdığımda, yazdığımın ne anlama geldiğini bildiğimden şuncacık kuşkum olmazdı. Nasıl da kandırılmışım! Sadece  $\pi$  yazmakla kalmaz

$\pi^{\sqrt{2}}$  bile yazardım gülünçlüğe varan bir kendine güvenle. Ne olduğunu bilmeden ve ne olduğunu bilmediğimi de bilmeden, dahası bildiğimi sanarak, hayır bildiğimi sanarak bile değil, bunun kıyısına köşesine yaklaşılabilecek bir soru bile sormadan!

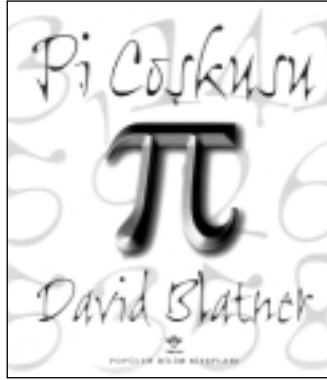
Nasıl bir beyin yıkamanın içinden geçmişsem!

Beyni yıkanan insan sabit bir düşüncenin doğru olduğuna inanır,

ama benimkisi inanç bile değildi. "İnanıyorum" bile demiyordum ki inanç olsun! Demek ki beyin yıkamanın ötesinde bir süreçten geçirilmişim.

Dairenin çevresi  $2\pi r$ , alanı da  $\pi r^2$ . Hep söylendi, o kadar söylendi ve o kadar erken söylendi ki varlığımın bir parçası oldu. Neden her iki ölçümde de  $\pi$  var? Nerden çıktı? Kim söyledi? En başta eli öpülesi Seçim öğretmen olmak üzere herkes aynı şeyi söyledi. Bilinen bir gerçektir. Bu böyleydi! Allah'ın emri bile değil, doğanın gereği bile değil, eşyanın tabiatı da değil, bu böyleydi o kadar. Okula öğrenmek için gitmiştik ve öğreniyorduk!

Bunlar ayrımına vardığım beyin yıkamalar. Ya ayrımına varmadıklarım? Kimbilir ne hasarlar yarattı bende bu eğitim sistemi.



\* İstanbul Bilgi Üniversitesi, Matematik Bölümü öğretim üyesi.

İkinci kez dünyaya gelecek olsam, daha ilk günden itibaren duyduğum her şeyi sorgularım, ama ikinci kez gelmeyeceğim ki. Gitti gider geçen zaman, bugünkü beni yaratarak...

$\pi$  rastgele bir sayı değildir elbet. Ne de olsa dairenin çevresinin çapına bölümüne eşittir. Doğanın bize sunduğu bir sabittir.  $\pi$ 'den bir tane vardır. Bir tane olan bir sayı elbette rastgele olamaz!

$\pi$  rastgele değil de ya ne rastgele?  $[0, 1]$  kapalı aralığında "rastgele"nin ne demek olduğunu bilmesek de rastgele bir sayı seçelim. Sayının gerçekten rastgele olmasına da özellikle dikkat edelim!

Bu sayı herhalde,

0,101010101010...

gibi bir sayı olamaz. Rastgele bir sayıda her rakam aynı oranda yani  $1/10$  oranında belirmeli. Hissettığımız bu olguyu matematikselleştirelim.

$a$ , 0'la 1 arasında seçilmiş herhangi bir sayı olsun.  $a$ 'yı onluk tabanda,

$$a = 0,a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$$

olarak yazalım ve virgülden sonraki her rakamın belirme oranını hesaplayalım. 0, yüzde kaç beliriyor, 1 yüzde kaç beliriyor?.. Eğer  $a$  "rastgele"yse, her rakam yüzde on oranda belirmeli, ne fazla ne eksik, sağduyumuz öyle söylüyor. Ama bu belirme oranı başlangıçta değil, sonlarda yüzde on olmalı, yani ilk birkaç değil, ilk 1 milyar rakamda örneğin, ve daha sonra da, yani  $a$ 'yı yeterince uzun yazdığımızda rakamların belirme oranları yüzde ona yakınsamalı.

Rastgelenin tanımı sadece bu olsaydı,

0,012345678901234567890123456789...

diye yazılan 0123456789 sonlu dizisinin tekrarlandığı sayı da rastgele bir sayı olurdu ki, sağduyumuz bunun rastgele olmaması gerektiğini söylüyor. Sağduyumuza güveniyoruz! Bu aşamada başka çaremiz yok. Ama memnun kaldığımız tanımı verdikten sonra sağduyuya ihtiyacımız kalmayacak.

Demek ki bir  $a = 0,a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$  sayısının rastgeleliğini anlamak için sadece beliren rakamların yoğunluğuna bakmak yeterli değil. Ayrıca beliren rakam guruplarının da yoğunluğuna bakmalı. Örneğin,  $0,(a_1a_2)(a_3a_4)(a_5a_6) \dots$  yazılımında, sözgelimi 91 sayısının ikilik gruplarda belirme oranı yüzde bir olmalı. Aynı şekilde  $0,(a_1a_2a_3)(a_4a_5a_6)(a_7a_8a_9) \dots$  yazılımında 524 sayısının üçlük gruplarda belirme oranı binde bir olmalı.

Yukardaki, 0,01234567890123456789012... örneğinde 0123456789 dizisinin onluk gruplarda belirme oranı yüzde yüz olduğundan, bu sayının rastgele sayılmaması gerekir. Rastgele bir sayıda bu sayı  $1/10^{10}$  oranda belirmeliydi.

Eğer bir sayının yukarda belirtilen özelliği varsa, yani  $k$  uzunluğundaki her dizinin, sayının  $k$ 'lik grupların da belirme oranı  $1/10^k$ 'ye yakınsıyorsa, o zaman bu sayıya rastgele demek geçiyor içimizden.

Ama o zaman da, sayıları 10 tabanında yazdığımız için,  $10$ 'a özel bir anlam vermiş oluruz. Bal gibi de 10 tabanında bize rastgele gelen bir sayı, 3 tabanında, 0,2011201120112011... gibi düzenli bir biçimde yazılabilir. Bu yüzden yukardaki özelliği sağlayan bir sayıya **10-normal** diyelim.

$2/7$  gibi kesirli sayılar  $10$ 'luk tabanda belli bir zaman sonra hep yinelandıklarından, kesirli sayılar 10-normal değildir.

2-normalin ne demek olması gerektiği belli: Sa-

yıyı ikilik tabanda yazdığımızda 0 ve 1 rakamları yüzde 50, yani  $1/2$  oranında beliriyorsa, 00, 01, 10 ve 11 dizilerinin herbiri  $1/4$  oranında beliriyorsa, genel olarak, her  $k$  uzunluğundaki 0-1 dizisi sayının ikilik tabanda açılımında  $1/2^k$  oranında beliriyorsa o zaman sayıya 2-normal diyelim.

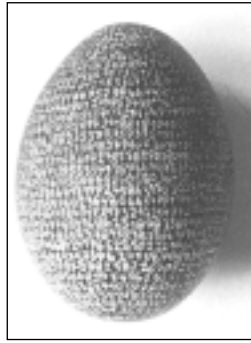
Bir sayının **b-normal** olması için, sayının  $b$  tabanında açılımında, 0'la  $b - 1$  arasındaki rakamlardan oluşan her  $k$

uzunluğundaki dizinin belirme oranı sonsuza doğru  $1/b^k$  olmalı, tanım böyle.

Eğer bir sayı her  $b \geq 2$  doğal sayısı için  $b$ -normalse, bu sayıya **normal sayı** adını verelim.

Bu kavram, 1909'da rastgele sayıların tanımını bulmak isteyen Fransız matematikçisi Emile Borel tarafından bulunmuştur. Ama rastgele sayı kavramını matematikselleştirmek isteyen her **sağduyu sahibi** ve **aklı başında** kişi Emile Borel'in geçtiği yoldan geçmek zorundadır. Matematiksel buluşlar rastlantısal değil, kaçınılmazdırlar. Belki her konuda bu böyledir ama bunun böyle olduğu matematikte çok belirgindir.

İyi güzel de normal sayılar var mı? Hem de çok! Bu da Emile Borel'in bir teoremi. Teoremin ne dediğinin anlaşılması için bir iki açıklama gerekiyor.  $[0, 1]$  aralığının uzunluğu 1'dir. Bu aralıktan sonlu sayıda sayı atarsak uzunluk değişmez, gene 1 kalır. Ama  $[0, 1/2]$  aralığının uzunluğu  $1/2$ 'dir. Fransız



matematikçisi Lebesgue [0, 1] aralığının hemen hemen her altkümesinin bir uzunluğu olduğunu gösterdi. Bunu yapmak için de önce uzunluk kavramını tanımladı elbet. (Terimlerinin anlamı bilinmeyen bir önerme kanıtlanamaz!) Emile Borel, normal sayılar kümesinin uzunluğunun 1 olduğunu, yani bir anlamda sayıların pek çoğunun normal olduğunu kanıtlamıştır.

Madem ki bu kadar çok var, bir normal sayı örneği bulabilmeliyiz... Ne yazık ki bugüne kadar normal bir sayı bulunamadı!

Yakın zamanda, D. Champenowne, Cambridge Üniversitesi'nde bir lisans öğrencisiyken,

0,1234567891011121314151617181920...

sayısının 10-normal olduğunu kanıtladı. Pek rastgele olmayan bu sayının normal olmadığını ummak isterim, ama normalmiş gibi bir his var içimde, sağduyum öyle söylüyor!

Rastgele bir sayının normal olması gerektiği belli. Ama her normal sayı "rastgele" olmalı mı? Ne yazık ki hayır. Normal bir sayı alalım. Bunu onluk tabanda yazalım. Sonra bu sayının 1inci, 4üncü, 9uncu, 16ıncı, 25inci, yani karelere tekabül eden rakamlarını silip yerine 0 yazalım. Elde ettiğimiz sayının rastgele olmaması gerektiği belli, çünkü tamkare sırada yer alan rakamlarının hepsi 0. Öte yandan yeni sayının normal olduğu kanıtlanabilir.

Şimdi canalcı soruyu soralım:  $\pi$  rastgele bir sayı mı? Daha doğrusu, 0'la 1 arasında yer alan  $\pi - 3$ ? Rastgele sayının ne demek olduğunu bilmediğimizden, bu soru üzerine matematiksiz olarak düşüneyiz, ama  $\pi$  doğanın doğal bir sabiti olduğundan  $\pi$  rastgele bir sayı olmamalı.

$\pi$ 'nin rastgele bir sayı olmaması için bir neden daha var:  $\pi$ 'nin  $n$ -inci rakamı daha önceki rakamları bilinmeden bile, tek bir formülle hesaplanabilir. Oysa rastlantısal bir rakamda böyle bir formül olmamalı. Nitekim  $n$ -inci rakamı bir formülle veri-

len sayıların sayısı formül sayısı kadardır, yani sayılabilir sonsuzluktadır, oysa 0'la 1 arasında sayılamayacak sonsuzlukta sayı vardır. Herkesin anlamadığı sanmadığım bu son tümceden sonra  $\pi$ 'nin normal olup olmadığı sorusuna gelelim.

$\pi$  sayısı 3,14159 diye başlayan ve hiç durmadan ve kendini tekrarlamadan sonsuza kadar devam eden bir sayıdır.  $\pi$ 'nin tüm rakamlarını bilmiyoruz – nasıl bilebiliriz ki? – ama bugün hızlı formüller ve bilgisayarlar sayesinde  $\pi$ 'nin milyonlarca rakamı hesaplandı. Görünen o ki  $\pi$  normal bir sayı.

İşte... Ele aldığımız kitap bu  $\pi$  sayısı üzerine... Ve söyledikleri de üç aşağı beş aşağı (yukarı değil!) yukarda söylediklerimizden ibaret. Normallikten hiç söz etmiyor. Gösterişli ve albenisi olan ama içeriği

sayfa sayısına göre çok zayıf bir kitap. Zaten yazarı David Blatner de matematikçi değil, grafiker. Yazarın matematikçi olmadığı birçok yerde kendini belli ediyor. Sadece benim değil, benim gibi iki matematikçinin de anlam veremediği tümceler az değil. Çeviri de bu konuda bize hiç yardımcı olmadığı gibi galiba tam tersine anlaşılacak tümceler Türkçeye çevrilip daha da anlaşılmaz hale getirilmiş, sağda solda tanımlar unutulmuş örneğin. Oysa çevirmen Nermin Arık birçok başarılı çeviriye imza atmış biri. Bu kitap sanırım aceleyle gelmiş.

Birileri de kalkıp  $\pi$  üzerine halkımızın sağduyusuna seslenecek, buram buram çeviri kokmayan kitap yazsa...

Rastlantısal sayı tartışmasını noktalayalım. Böyle mutlak bir kavram bildiğim kadarıyla yok. Yalnız Joe'nun, Smith'in, şunun bunun rastlantısallık testleri var. Bu testleri geçen Joe ya da Smith rastlantısal olarak kabul edilir. Bu testler örneğin  $\pi$ 'yi rastlantısal olarak kabul edip verilen sayıyı  $\pi$ 'yle karşılaştırabilir. Bu yüzden  $\pi$ 'nin normal olup olmadığı önemli bir konu ve bunun bir kanıtını bulana dek,  $\pi$ 'nin yüz milyonlarca rakamını bulup normallliği yönünde delil topluyor bazı bilgisayarlılar. Bunu yaparken bir yandan da bilgisayarlarını gücünü ve hızını sınıyorlar. ♥

$\pi = 3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679821480865132823066470938446095508223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527120190914564856629346034861045432664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882046652138414695194151160943305727036575959195309218611738193261179310511854807446237962749567351885752724891227938183011949129833673362440656643086021394946395224737190702179860943702770539217176293176752384674818467669405132000568127145263560827785771342757896091736371787214684409012249534301465495853710507922796892589235420199561121290219608640344181598136297747713099605187072113499999837297804995105973173281609631859502445945534690830264252308253344685035261931188171010003137838752886587533208381420617177669147303598253490428755468731159562863882353787593751957781857780532171226806613001927876611195909216420198938095257201065485863278865936153381827968230301952035301852968995773622599413891249721775283479131515574857242454150695950829533116861727855889075098381754637464939319255060400927701671139009848824012858361603563707601047101819429559619894676783744944825537977472684710404753464620804668425906949129331367702898915210475216205696602405803815019351125338243003558764024749647326391419927260426992279678235478163600934172164121992458631503028618297455570674983850549458858692699569092721079750930295532116534498720275596023648066349911988183479775356636980742654252786255181841757467289097772793800081647060016145249192173217214772350141441973568548161361157352552133475741849468438523239073941433345477624168625189835694855620992192221842725502542568876717904946016534668049886272327917860857843838279679766814541009538837863609506800642251252051173929848960841284886269456042419652850222106611863067442786220391949450471237137869609563643719172874677646575739624138908658326459958133904780275900994657640789512694683983525957098258226205224894077267194782684826014769909026401363944374553050682034962524517493996514314298091906592509372216964615157098583874105978859597279754989301617539284681382686838689427741559918559252459539594310499725...$