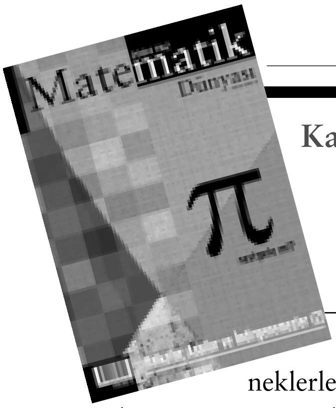

Kapak Konusu: Halkalar, Asallar ve İndirgenemezler (2)

Bölüm Cisimleri ve Yerelleştirme

1. Örnekler. Yazımıza örneklerle başlayalım, ne yapmak istediğimizi en iyi örneklerle anlatabileceğiz.

a) Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$ bir halkadır, ama bir cisim değildir, çünkü bir cisimde – cismin tanımı gereği – sıfır olmayan her elemanın çarpımsal tersi olmalıdır ve bu özellik $\mathbb{Z}$'de doğru değildir. Örneğin 2'nin çarpımsal tersi olan 1/2 sayısı $\mathbb{Z}$'de değildir.

Öte yandan kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$, tamsayıları içeren bir cisimdir, hatta $\mathbb{Q}$, şu anlamda tamsayıları içeren cisimlerin en küçüğüdür: Bu özelliği sağlayan her cismin içinde $\mathbb{Q}$'nün bir kopyası bulunur.

b) $p \in \mathbb{Z}$ sabit bir asal olsun. p asalı $\mathbb{Z}$'de tersinir değildir, çünkü $1/p \notin \mathbb{Z}$. Şimdi,

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{a/p^n : n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{Z}\}$$

olsun. $\mathbb{Z}_{(p)}$, $\mathbb{Q}$'nün toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalı bir altkümesidir, ayrıca 1'i de içerir, yani $\mathbb{Q}$'nün bir **althalka**sıdır. Bu halkanın tersinir elemanları bir $n \in \mathbb{Z}$ için $\pm p^n$ biçiminde yazılan sayılardır.

$\mathbb{Z}_{(p)}$, belli ki, $\mathbb{Z}$'yi içeren ve p'nin tersinir olduğu $\mathbb{Q}$'nün en küçük althalkasıdır.

c) Katsayıları gerçel sayılar olan polinomları ele alalım.

$$\frac{X^2+1}{X-1}$$

türünden ifadeler polinom değiller. Polinom olmasalar da bu tür terimler matematikte sık sık kullanılırlar. “Kesirli sayılar” ifadesinden esinlenerek bu tür nesnelere **kesirli polinom** adını verelim. Bir kesirli polinom, tanımı gereği, $f, g \in K[X]$ ve $g \neq 0$ için, f/g biçiminde yazılan bir terimdir. Kesirli polinomlar kümesi $\mathbb{R}(X)$ olarak gösterilir:

$$\mathbb{R}(X) = \{f/g : f, g \in \mathbb{R}[X] \text{ ve } g \neq 0\}.$$

Basit ama önemli bir olgu: Eğer $fk = gh$ ise, f/g kesirli polinomu h/k kesirli polinomuna eşittir. Bunun tersi de doğrudur: Eğer $f/g = h/k$ ise, $fk = gh$ eşitliği doğrudur.

Kesirli polinomlar kümesinde toplama, çıkarma ve çarpma yapmasını okur herhalde biliyordur:

$$\frac{f}{g} \pm \frac{h}{k} = \frac{fk \pm gh}{gk},$$
$$\frac{f}{g} \times \frac{h}{k} = \frac{fh}{gk}.$$

Böylece tanımlanan toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri altında kesirli polinomlar kümesi bir halkadır. Hatta bir cisimdir de: $f/g \neq 0$ ise, bu kesirli polinomun çarpımsal tersi g/f kesirli polinomudur.

Her f polinomunu $f/1$ biçiminde yazarsak, her polinomun aslında kesirli bir polinom olduğunu anlarız.

Ne yaptık? $\mathbb{R}[X]$ polinom halkasını $\mathbb{R}(X)$ diye bir cismin içinde soktuk. Birinci örnekte de $\mathbb{Z}$ halkasını $\mathbb{Q}$ cisminin içine sokmuştuk.

d) Şimdi şu kümeye bakalım:

$$S = \{f(X)/aX^n : f \in \mathbb{Z}[X],\ a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

S, elbette $\mathbb{Q}(X)$ cisminin bir altkümesidir ve $\mathbb{Z}[X]$ halkasını içerir ($f(X)/aX^n$ ifadesinde $a = 1$ ve $n = 0$ alın.) Ayrıca, toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalı olduğundan S bir halkadır. Bu halkada X tersinirdir, çünkü $1/X \in S$. Dikkatle incelenecek olursa, S halkasının, sıfır olmayan tamsayılarla X'in tersinir olduğu ve $\mathbb{Z}[X]$'i içeren $\mathbb{Q}[X]$'in en küçük althalkası olduğu kolaylıkla anlaşılır. Bu halkada, örneğin $1 + X$ tersinir değildir.

e) Yukarda yaptıklarımızı güç serileriyle yapalım. K bir cisim olsun. X'in $K[[X]]$ halkasının tek asalı olduğunu biliyoruz (sayfa 34, Sonuç 3). $K[[X]]$'i içeren ve X'in tersinir olduğu daha büyük bir halka (dolayısıyla bir cisim) bulmak istiyoruz. Çok basit: Güç serilerinde X'in güçleri 0'dan başlar, güç serilerinin negatif bir sayıdan başlamasına izin verirsek istediğimize kavuşmuş oluruz. Elde edilen halkanın elemanları bir $n \in \mathbb{Z}$ için, $\sum_{i \geq n} a_i X^i$ olarak, halkanın kendisi de $K((X))$ olarak yazılır.

2. Amaç. Bu örneklerden sonra yazının amacını açıklamaya çalışalım. Amacımız, bir R halkası ve R'nin bir A altkümesi verildiğinde, A'nın elemanlarının içinde tersinir olduğu R'den daha büyük bir halka bulmak ve bunu en ekonomik biçimde yapmak. Uygulamada en çok, R'nin bir tamlık bölgesi olduğu ve A'nın da $R \setminus \{0\}$ olduğu durum kullanılır.

Bulmak istediğimiz bu halkayı $R_{(A)}$ olarak yazalım. $R_{(A)}$'dan özetle şunları istiyoruz:

I. $R_{(A)}$, R'yi içeren bir halka olsun.

II. $R \leq R_{(A)}$ olsun. Yani her iki halkanın da birim elemanları aynı olsun ve her $x, y \in R$ için, $x + y$ ve xy'nin değerleri, R'de de hesaplansa, $R_{(A)}$'da da hesaplansa aynı olsun.

III. A'nın her elemanı $R_{(A)}$'da tersinir olsun.

IV. $R_{(A)}$'da sadece yukardaki özellikleri sağlayacak kadar eleman olsun, gereksiz elemanlar olmasın.

Yukardaki beş örnekte R, A ve $R_{(A)}$ şöyle:

a) $R = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ve $R_{(A)} = \mathbb{Q}$.

b) $R = \mathbb{Z}$ ve $A = \{p\}$ ve $R_{(A)} = \mathbb{Z}_{(p)}$.

c) $R = \mathbb{R}[X]$, $A = \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ ve $R_{(A)} = \mathbb{R}(X)$.

d) $R = \mathbb{Z}[X]$, $A = (\mathbb{Z}\setminus\{0\}) \cup \{X\}$ ve $R_{(A)} = S$.

e) $R = K[[X]]$, $A = \{X\}$ ve $R_{(A)} = K((X))$.

3. Arayış. Bir an için dilediğimiz gibi bir $R_{(A)}$ halkasının varolduğunu varsayıp bu halkanın ne menem bir şey olduğunu anlamaya çalışalım. Ancak $R_{(A)}$'nın ne menem bir şey olması gerektiğini anladıktan sonra $R_{(A)}$ halkasını inşa edeceğiz.

Şunu da belirtelim ki, illa yukardaki özellikleri sağlayan $R_{(A)}$ diye bir halka olmak zorunda değildir. Böyle bir $R_{(A)}$ halkası olmayabilir de... $R_{(A)}$'nın varlığı ve yokluğu A'ya göre değişebilir, bazı A'lar için olabilir bazı A'lar için olmayabilir. $R_{(A)}$ halkasının hangi A'lar için olduğunu da bulacağız.

Eğer $A = \emptyset$ ise, $R_{(A)} = R$ alırsak problemi çözmüş oluruz. Bundan böyle $A \neq \emptyset$ olsun.

Yukardaki (II) özelliğinden, her iki halkanın da sıfır elemanlarının aynı olduğu ve her $x \in R_{(A)}$ için $0x = 0$ eşitliği kolaylıkla çıkar (sayfa 22, Önsav 3.i.)

$a \in A$ ise, a, $R_{(A)}$ halkasında tersinirdir, çünkü öyle olsun istiyoruz. a'nın $R_{(A)}$ halkasındaki tersini, alışıldığı üzere, a^{-1} ya da $1/a$ olarak gösterelim.

A'nın elemanları $R_{(A)}$ halkasında tersinir olduklarından, A'nın hiçbir elemanı ne R'de ne de $R_{(A)}$'da bir sıfırbölen olabilir. Bunun özel bir hali olarak, $0 \notin A$ çıkar. Bundan böyle A'nın hiçbir elemanının sıfırbölen olmadığını varsayalım (yoksa istediğimiz özellikleri sağlayan bir $R_{(A)}$ halkası bulamayız.)

Eğer $r \in R$ ise, $r \in R_{(A)}$ olmalı, çünkü $R_{(A)}$'nın R'yi içermesini istiyoruz. Demek ki her $r \in R$ ve $a \in A$ için, $R_{(A)}$ halkasında r ile $1/a$ elemanlarını çarpabilmeliyiz. $R_{(A)}$ halkasında olması gereken bu çarpımı r/a olarak yazalım. Elbette $r/a = ra^{-1}$ ve $a(r/a) = r$ ve $s(r/a) = (sr)/a$ gibi eşitlikler $R_{(A)}$ halkasında sağlanmalı.

Bir halka olduğundan, $R_{(A)}$'nın r/a biçiminde yazılmış elemanlarını toplayıp çarpabilmeliyiz. r/a ve s/b elemanlarının bir halkada nasıl toplanıp çarpılmaları gerektiği belli: Halkanın en basit özelliklerinden,

$$\frac{r}{a} \pm \frac{s}{b} = \frac{rb \pm sa}{ab} \quad \text{ve} \quad \frac{r}{a} \times \frac{s}{b} = \frac{rs}{ab}$$

çıkar.

Yukardaki üç formüle bakarsak, $a, b \in A$ ise, ab'nin de A'da olmasının yani A'nın çarpma altıda kapalı olmasının yararlarını görürüz, çünkü o zaman yukardaki üç işlemin herbirinin sonucunun paydasında hep A'nın elemanları olmuş olur. Zaten, eğer A çarpma altında kapalı değilse, A yerine A'nın elemanlarının tüm sonlu çarpımlarının kümesini alarak, A'nın çarpma altında kapalı olduğunu varsayabiliriz, çünkü bu sonlu çarpımlar da tersinlenmeli. Bundan böyle A'nın gerçekten çarpma altında kapalı olduğunu varsayalım. Yeni A'nın da, eski A gibi, sıfırbölen içermediğini dikkatinize sunarım.

A artık çarpma altında kapalı olduğundan, yukardaki formüllerden,

$$\{r/a : r \in R, a \in A\}$$

kümesinin toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalı olduğunu anlarız.

Sezgilerimiz, $R_{(A)}$ halkasının, eğer varsa, yukardaki gibi bir küme olması gerektiğini söylüyor. Demek ki $R_{(A)}$ adayımız,

$$\{r/a : r \in R, a \in A\}$$

kümesi olmalı.

Bu, hemen hemen doğru, tam doğru değil, çünkü R halkası bu aday kümenin bir altkümesi olmayabilir. Nitekim, R'nin her elemanı illa belli bir $r \in R$ ve $a \in A$ için r/a biçiminde yazılmak zorunda değil. Ama 1'i de A'nın içine atarsak, yani A yerine $A \cup \{1\}$ kümesini alırsak, o zaman, $r = r/1$ eşitliğinden, R'nin yukarıdaki aday kümenin bir altkümesi olduğu anlaşılır. (Ayrıca yeni A kümesi de eskisi gibi çarpma altında kapalıdır ve sıfırböleni gene yoktur.)

Bundan böyle $A \subseteq R$, sıfırböleni olmayan, çarpma altında kapalı ve 1'i içeren bir küme olsun. O zaman $R_{(A)}$ halkası, eğer varsa,

$$\{r/a : r \in R, a \in A\}$$

olmalı. Toplama, çıkarma ve çarpma da yukarda açıklandığı gibi olmalı.

Olmalı ama r/a diye bir eleman yok ki evrenimizde! Kendinizi tamsayıları bilen ama kesirli sayıların ne demek olduğunu bilmeyen bir çocuk yerine koyarsanız ne demek istediğimi anlarsınız. 2/3 gibi, r/a diye elemanlar yaratmalıyız, çünkü elimizde sadece r ve a diye nesneler var, r/a diye bir nesne yok. Adına r/a diyeceğimiz nesneler yaratmalıyız, yaratacağız da, yaratması da kolay. Bunun için adına r/a diyeceğimiz yepyeni, daha önce olmayan soyut şeyler yaratmak yeterli! Eğer bütün r/a elemanları birbirinden değişik olsalardı gerçekten de böyle yapardık. Ama, örneğin, eğer $b \in A$ ise, $r/a = (rb)/(ab)$ olmak zorunda. Sözünü etmek istediğimiz sorun şu: $R_{(A)}$ halkasının bir r/a elemanı, $s \neq r$ ve $b \neq a$ için aynı halkanın s/b elemanına eşit olmak zorunda olabilir ve o zaman soyut r/a ve s/b elemanları yaratmak bu eşitliği gözardı eder ve eşit olmaları gereken r/a ve s/b birbirine eşit olmaz.

$R_{(A)}$ halkasının bir r/a elemanı ne zaman aynı halkanın bir s/b elemanına eşit olur, daha doğrusu olmak zorunda kalır? $r/a = s/b$ eşitliğini ab'yle çarparsak, R'de geçerli olan $rb = sa$ eşitliğini buluruz. Bunun tersi de doğrudur: Eğer R'de $rb = sa$ eşitliği sağlanıyorsa, o zaman $R_{(A)}$ halkasında, bu eşitliği ab'ye bölerek, $r/a = s/b$ eşitliğinin geçerli olduğunu anlarız.

Şimdi artık $R_{(A)}$ halkasının elemanlarının ne olması gerektiğini aşağı yukarı biliyoruz. Yukardaki bilgileri biçimsel bir hale sokmalıyız.

4. Plan. Yukardaki uzun tartışmadan sonra $R_{(A)}$ halkasını yaratacak planı kuralım. $R_{(A)}$ halkasının r/a elemanlarını yaratacağız. Evrenimizde r/a diye elemanlar yok ama (r, a) diye çiftler var, bunlar $R \times A$ kümesinin elemanları. $R_{(A)}$ halkasının r/a elemanını (r, a) çifti olarak göreceğiz. Yukarda sözettiğimiz sorun çıkacak karşımıza: (r, a) çifti, (s, b) çiftine eşit olmayabilir; öte yandan $R_{(A)}$ halkasında $r/a = s/b$ eşitliği boy gösterebilir. O zaman da eşit olmaları gereken (r, a) ve (s, b) çiftleri birbirine eşit olmazlar. Biz de eşit olmasını istediğimiz bu çiftlere birbirine **denk** çiftler diyelim ve bunu $\equiv$ olarak yazalım. Matematiksel tanım az sonra, bizi izlemeye devam edin.

5. Matematiksel Tanımlar. Nihayet matematik yapabileceğiz. Yukarda söylenen her şeyi unutun, en azından unutmuş gibi davranın! Baştan başlıyoruz. Önce tanımlar.

R bir halka. A, R'nin çarpma altında kapalı, 1'i içeren ama 0'ı içermeyen (dolayısıyla sıfırbölen de içermeyen) bir altkümesi.

Eğer $(r, a), (s, b) \in R \times A$ ise,

$$(r, a) \equiv (s, b)$$

ilişkisini,

$$br = as$$

olarak tanımlayalım ve bu durumda (r, a), (s, b) elemanlarına **birbirine denk** diyelim. Bu denklik daha sonra $r/a = s/b$ olarak yorumlanacak, ama daha değil.

Eğer $(r, a) \in R \times A$ ise, $[r, a]$ kümesini,

$$[r, a] = \{(s, b) \in R \times A : (r, a) \equiv (s, b)\}$$
$$= \{(s, b) \in R \times A : br = as\}$$

olarak tanımlayalım. $[r, a]$'ların $R \times A$ kümesinin bir altkümesi olduğunu unutmayalım. Örneğin,

$$[1, 1] = \{[a, a] : a \in A\},$$
$$[0, 1] = \{[0, a] : a \in A\}$$

ve her $r \in R$, $a, b \in A$ için $(br, ba) \in [r, a]$

Önsav 1. *$R \times A$'nın $[r, a]$ ve $[s, b]$ altkümeleri ya birbirine eşittir ya da ayrıktırlar. Yani her, $(r, a), (s, b) \in R \times A$ için, ya $[r, a] = [s, b]$ ya da $[r, a] \cap [s, b] = \emptyset$'dir. Ayrıca birinci şık ancak ve ancak $(r, a) \equiv (s, b)$ ise mümkündür.*

Kanıt: Sadece tanımları uygulamak yeterli. □

İleride, $R_{(A)}$'nın r/a elemanını $[r, a]$ olarak tanımlayacağız. Şimdilik sadece $R_{(A)}$ kümesini tanımlamakla yetinelim:

$$R_{(A)} = \{[r, a] : r \in R, a \in A\}.$$

Daha $R_{(A)}$ üzerine işlem tanımlamadık, $R_{(A)}$ daha sadece bir küme şimdilik. İşlemleri şimdi tanımlıyoruz: $(r, a), (s, b) \in R \times A$ olsun.

$$[r, a] + [s, b] \text{ ve } [r, a] \times [s, b]$$

işlemlerini tanımlayacağız. Eğer $[r, a]$'nın r/a ve $[s, b]$'nin s/b anlamına geleceğini hesaba katarsak, tanımın nasıl olması gerektiği belli:

$$[r, a] + [s, b] = [rb + sa, ab],$$
$$[r, a] \times [s, b] = [rs, ab].$$

Yalnız bu tanımlarda bir sorun çıkabilir. Örneğin şöyle bir şey olabilir: $[r, a] = [r', a']$ ve $[s, b] = [s', b']$

olabilir ve o zaman $[r, a] + [s, b]$'nin $[r', a'] + [s', b']$ elemanına eşit olması gerekir, ki toplama işlemi gerçekten iyi tanımlanmış bir işlem olsun, ne de olsa birbirine eşit elemanlar toplandığında aynı toplamlar bulunmalı! Bir sonraki önsav bunun bir sorun olmadığını söylüyor:

Önsav 2. $(r, a), (r', a'), (s, b), (s', b') \in R \times A$ *olsun. Eğer* $[r, a] = [r', a']$ *ve* $[s, b] = [s', b']$ *ise o zaman* $[rb + sa, ab] = [r'b' + s'a', a'b']$ ve $[rs, ab] = [r's', a'b']$.

Kanıt: Sadece tanımları uygulamak yeterli. □

Artık yukarda önerdiğimiz gibi,

$$[r, a] + [s, b] = [rb + sa, ab],$$
$$[r, a] \times [s, b] = [rs, ab]$$

toplama ve çarpma tanımlarını yapabiliriz, buna hakkımız olduğunu gördük.

Önsav 3. $R_{(A)}$ *kümesi yukardaki işlemlerle bir halkadır.* $[0, 1]$ *halkanın sıfır elemanı,* $[1, 1]$ *halkanın birim elemanıdır,* $[-r, a]$ *elemanı* $[r, a]$ *elemanının toplama için tersidir. Ayrıca eğer* $a \in A$ *ise,* $[a, 1]$ *elemanı halkada tersinirdir ve bu elemanın tersi* $[1, a]$ *elemanıdır.*

Kanıt: Sadece tanımları uygulamak yeterli. □

Şimdi R'nin $R_{(A)}$ halkasının bir altkümesi olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Ama bu yanlış! Hatta iki küme çoğu zaman kesişmez bile. Evet, R, $R_{(A)}$'nın bir altkümesi değil ama, $R_{(A)}$'da R'ye çok benzeyen bir althalka var: $[r, 1]$ türünden yazılan elemanların kümesi $R_{(A)}$'nın R'ye çok benzeyen althalkasıdır. Nitekim, her $r, s \in R$ için,

$$[r, 1] + [s, 1] = [r + s, 1],$$
$$[r, 1][s, 1] = [rs, 1].$$

Görüldüğü gibi, R'deki toplama ve çarpma doğrudan $R_{(A)}$'nın $\{[r, 1] : r \in R\}$ altkümesine yansıyor.

Önsav 4. $i : R \to R_{(A)}$ *fonksiyonu* $i(r) = [r, 1]$ *kuralıyla tanımlanmış olsun. O zaman,*

a) *i birebirdir.*

b) *i toplamaya ve çarpmaya saygı duyar, yani, her* $r, s \in R$ *için,*

$$i(r + s) = i(r) + i(s),$$
$$i(rs) = i(r)i(s).$$

c) *i, R halkasının birim elemanını* $R_{(A)}$ *halkasının birim elemanına götürür.*

Kanıt: Sadece tanımları uygulamak yeterli. □

Yukardaki önsavı dikkate alarak, bundan böyle R'nin r elemanıyla $R_{(A)}$'nın $i(r)$ elemanı arasında bir fark gözetmeyeceğiz. Bir başka deyişle, $R_{(A)}$ kümesinden $i(R)$ altkümesini kesip, onun yerine R kümesini koyacağız. Elde ettiğimiz yeni kümede toplamayı ve çarpmayı ona göre yeniden düzenleyeceğiz. Yani artık, $R_{(A)}$ yerine

$$(R_{(A)} \setminus i(R)) \cup R$$

kümesini alacağız. Böylece $R_{(A)}$'dan $[r, 1]$ elemanını silip yerine r'yi koymuş oluruz ve R yapay yolla da olsa $R_{(A)}$'nın bir altkümesi olur. Örneğin, eğer $r, s \in R$ ve $a \in A \setminus \{1\}$ ise,

$$r[s, a] = [r, 1][s, a] = [rs, a].$$

Eskiden $[0, 1]$ ve $[1,1]$ olan toplama ve çarpmanın etkisiz elemanları artık 0 ve 1 oldular. Her $a \in A$ için $[a, a] = 1$ eşitliğine ayrıca dikkatinizi çekerim.

Şimdi $a \in A$ olsun. O zaman,

$$a[1, a] = [a, 1][1, a] = [a, a] = 1.$$

Demek ki A'nın elemanları $R_{(A)}$'da tersinir oldular:

$$a^{-1} = [1, a].$$

Son olarak, $[r, a] = [r, 1][1, a] = ra^{-1} = r/a$. Yani

$$R_{(A)} = \{r/a : r \in R, a \in A\},$$

tam istediğimiz gibi.

Eğer R bir tamlık halkasıysa, A yerine $R \setminus \{0\}$ alabiliriz. O zaman, $R_{(A)}$ bir cisim olur. $R_{(A)}$ cismine R'nin **bölüm cismi** adı verilir.

Eğer R bir tamlık bölgesiyse ve $p \in R$ bir asalsa, $pR = \{pr : r \in R\}$ ve $A = R \setminus pR$ olsun. Kolayca görüleceği üzere, p asal olduğundan, A çarpma altında kapalıdır ve $1 \in A$'dır. Demek ki $R_{(A)}$ diye bir halkadan sözedebiliriz. Burada açıklanması uzun sürecek geometrik nedenlerden, bu halkaya R'nin p'de **yerelleştirilmişi** adı verilir. Örneğin eğer p, $\mathbb{Z}$'nin ya da $\mathbb{Z}[X]$'in bir asalıysa,

$$\{a/n : a, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, \mathrm{ebob}(p, n) = 1\}$$

ve

$$\{a/b : a, b \in \mathbb{Z}[X], b \neq 0, \mathrm{ebob}(p, b) = 1\}$$

bu tür yerel halkalardandır. Bu halkalarda p'ye bölünmeyen her eleman tersinirdir. ♥