



Kapak Konusu: Halkalar, Asallar ve İndirgenemezler (2)

Tek Çarpanlama Bölgeleri ve Polinomlar

Bu yazıda, bir polinom halkasının ne zaman bir tek çarpanlama bölgesi (TÇB) olduğunu bulacağız. Tanımı anımsatalım: Tersinir ve sıfırbölen olmayan her elemanın sonlu sayıda asalın çarpımı olarak yazıldığı halkalara **tek çarpanlama halkası** (TÇH) denir. Eğer halka ayrıca bir tamlık bölgesiyse, o zaman **tek çarpanlama bölgesinden** ya da kısaca TÇB'den sözedilir.

Tam olarak şu teoremi kanıtlayacağız.

Ana Teorem. *R bir halka olsun. $R[X]$ 'in bir TÇB olması için R 'nin TÇB olması yeterli ve gerekli koşuldur.*

Bundan da şu sonuç çıkar:

Sonuç. *$Z[X_1, X_1, \dots, X_n]$ ve, eğer K bir cisimse, $K[X_1, X_1, \dots, X_n]$ halkaları TÇB'dirler.*

Sayfa 31'de K bir cisimse $K[X]$ 'in bir TÇB olduğunu kanıtlamıştık. Bu sonucu bu yazıda kullanarak genelleştireceğiz.

Eğer $R[X]$ halkası TÇB'ye, R 'nin de TÇB olması gerektiğinin kanıtı oldukça kolay. Bunu hemen şimdi yapabiliriz. Önce bir önsav.

Önsav 1. *R bir halka olsun. $R[X]$ 'te asal olan R 'nin bir elemanı R 'de de asaldır.*

Kanıt: Okura alıştırmaya bırakılmıştır. \square

Teorem 2. *Eğer $R[X]$ halkası TÇB'ye, R de TÇB'dir.*

Kanıt: Her şeyden önce $R[X]$ bir tamlık bölgesi olduğundan, R de bir tamlık bölgesidir. $r \in R$ olsun. Aynı zamanda $r \in R[X]$ olduğundan, r 'yi $R[X]$ 'teki p asallarının sonlu çarpımı olarak yazabiliriz. Ama derecelere bakacak olursak p asallarının aslında R 'de olduklarını görürüz. Yukardaki önsava göre bu p 'ler R 'de de asaldır. \square

R 'nin TÇB olduğunu kabul edip $R[X]$ 'in TÇB olduğunu kanıtlamak biraz daha zor.

Yazımız birbirinden bağımsız iki bölümden oluşacak.

A) Polinomlarda İndirgenemezler yazımızda, eğer K bir cisimse, $K[X]$ polinom halkasının TÇB olduğunu kanıtlamıştık. Bu sonuçtan $Q[X]$ halkasının TÇB olduğu çıkar. Önce, bu sonucu kullanarak, $Z[X]$ halkasının bir TÇB olduğunu kanıtlayacağız.

B) Sonra, eğer R bir TÇB'ye, yukardaki bölümdeki yöntemi kullanarak, $R[X]$ polinom halkasının da TÇB olduğunu kanıtlayacağız.

Dileyen okur A bölümünü atlayıp doğrudan B bölümüne geçebilir. Daha önce de dediğimiz gibi bu iki bölüm birbirinden bağımsızdır.

A. $Z[X]$ TEK ÇARPANLAMA BÖLGESİDİR

$Z[X]$ halkasının 0, 1 ve -1 olmayan her elemanının indirgenemezlerin çarpımı olarak yazıldığını biliyoruz [sayfa 27, Teorem 10; bunu ayrıca bir de bir sonraki bölümde kanıtlayacağız.] Ayrıca sayfa 31'den $Q[X]$ halkasının TÇB olduğunu biliyoruz, yani bu halkada her indirgenemez bir asaldır. Şimdi aynı sonucu $Z[X]$ için de kanıtlamak istiyoruz, yani $Z[X]$ 'in her indirgenemezinin bir asal olduğunu kanıtlamak istiyoruz.

Önce sık sık kullanacağımız bir sonucu ortalığa çıkaralım:

Hayat Zor!

$Z/6Z[X]$ halkasında

$$X(X-1) = (X-3)(X-4)$$

eşitliği geçerli olduğundan, indirgenemez olan

$$X, X-1, X-3, X-4$$

polinomlarının hiçbiri $Z/6Z[X]$ halkasında asal değildir. Dolayısıyla, $Z/6Z$, TÇH olmasına karşın, $Z/6Z[X]$, TÇH değildir. Hangi n 'ler için $Z/nZ[X]$ bir TÇH'dir?

Önsav 3. *g ve $f \in Z[X]$ olsun. g 'nin katsayılarının ± 1 'den başka ortak böleni olmasının (yani aralarında asal olsunlar.) Eğer g, f 'yi $Q[X]$ 'te bölüyorsa, o zaman $Z[X]$ 'te de böler. Yani eğer $h \in Q[X]$ için, $f = gh$ ise, $h \in Z[X]$.*

Kanıt: h 'nin katsayılarının paydalarının en küçük ortak katı n ise, bir $k \in Z[X]$ için $h = k/n$ yazabiliriz. Gerekirse (aslında gerekmez ya!) sadeleştirme yaparak, n 'nin hiçbir asal böleninin k 'nin tüm katsayılarını bölmediğini varsayabiliriz. $n = \pm 1$ eşitliğini kanıtlayacağız. Böylece h 'nin $Z[X]$ 'te olduğu anlaşılacak.

Demek ki $f = gh = gk/n$, yani $nf = gk$. Şimdi p , n 'nin asal bir böleni olsun. Z 'nin p asalı $Z[X]$ halkasında gk çarpımını böldüğüne göre, Gauss Önsavı'na göre (sayfa 25, Önsav 7), p , g 'nin ya da h 'nin tüm katsayılarını böler, ki bu da bir çelişkidir. Demek ki $n = \pm 1$ olmalı ve $h = k/n = \pm k \in Z[X]$. \square

Teorem 4. $Z[X]$ 'in bir indirgenemezi ya Z 'nin ya da $Q[X]$ 'in bir indirgenemezidir.

Kanıt: $f, Z[X]$ halkasında bir indirgenemez olsun. $g, h \in Q[X]$ için, $f = gh$ olarak yazalım. Ya g 'nin ya da h 'nin bir sabit polinom olduğunu kanıtlayacağız.

İlk olarak, g 'yi kesirli bir sayıyla çarparak ve h 'yi aynı sabite bölerek, g 'nin $Z[X]$ 'te olduğunu ve katsayılarının ortak böleni olmadığını varsayacağız. Bunu şöyle yapacağız: n , g 'nin katsayılarının paydalarının çarpımı olsun. O zaman ng polinomu $Z[X]$ 'tedir. $g_1 = ng$ olsun. Şimdi g_1 'in katsayılarının en büyük ortak böleni m olsun. Demek ki, katsayılarının ortak böleni olmayan bir $g_2 \in Z[X]$ için, $g_1 = mg_2$. Hesap yapalım:

$f = gh = (g_1/n)h = (mg_2/n)h = g_2(mh/n)$.
 $h_2 = mh/n$ yazarsak, $f = g_2h_2$ eşitliğini elde ederiz. Unutmayalım ki $g_2 \in Z[X]$ ve g_2 'nin katsayılarının ortak böleni yok.

Demek ki g_2, f 'yi $Q[X]$ halkasında bölüyor: $f = g_2h_2$. Önsav 3'e göre $h_2 \in Z[X]$ olmalı. Ama $f, Z[X]$ halkasında indirgenemez. Demek ki ya g_2 ya da h_2 polinomu $Z[X]$ 'te tersinir, yani ± 1 'e eşit, dolayısıyla ya g ya da h polinomu Q 'da bir sabit (ikiisi de sabit olabilir). Böylece f 'nin ya Z 'de olduğunu ya da $Q[X]$ halkasında da indirgenemez olduğunu kanıtlamış olduk. \square

Şimdi istediğimizi kanıtlayabiliriz.

Teorem 5. $Z[X]$ bir tek çarpanlama bölgesidir.

Kanıt. Sayfa 27'deki Teorem 10'da $Z[X]$ 'in her elemanının sonlu sayıda indirgenemizin çarpımı olduğunu söyledik. (Bu sonuç geçen sayıda kanıtlanmıştı. Aynı sonucu, bu yazının ikinci bölümün-

de, bu bölümden bağımsız olarak bir kez daha kanıtlayacağız.) Dolayısıyla $Z[X]$ 'in her indirgenemezinin bir asal olduğunu kanıtlamalıyız.

$f \in Z[X]$ bir indirgenemez olsun.

Eğer $f \in Z$ ise, f, Z 'de bir asalıdır, çünkü f 'yi Z 'nin asallarının çarpımı olarak yazdığımızda, $f, Z[X]$ 'in bir indirgenemezi olduğundan, bu asallar biri dışında hepsi $Z[X]^*$ kümesinde olmalı, dolayısıyla biri dışında hepsi ± 1 'dir, yani f, Z 'nin bir asalıdır. Gauss Önsavı'na göre $f, Z[X]$ 'in de bir asalıdır.

Bundan böyle f 'nin Z 'de olmadığını varsayalım. Demek ki f 'nin katsayılarının ortak böleni yok (yoksa f indirgenirdi.) $g, h \in Z[X]$ için, f 'nin gh 'yi $Z[X]$ 'te böldüğünü varsayalım. f 'nin ya g 'yi ya da h 'yi $Z[X]$ 'te böldüğünü kanıtlayacağız. f, gh 'yi $Z[X]$ 'te böldüğüne göre, f, gh 'yi $Q[X]$ 'te de bölüyor. Ama yukardaki teoreme göre $f, Q[X]$ 'te bir indirgenemez, yani bir asal (sayfa 31). Demek ki f, g 'yi ya da h 'yi $Q[X]$ 'te bölüyor. Diyelim f, g 'yi $Q[X]$ 'te bölüyor: $f = gk$ ve $k \in Q[X]$. Önsav 3'e göre $k \in Z[X]$. Ama $f, Z[X]$ halkasının bir indirgenemezi. Demek ki ya $g = \pm 1$ ya da $k = \pm 1$. Birinci şıkta $gh = \pm h$ ve f, h 'yi böler. İkinci şıkta $f = \pm g$ ve f, g 'yi böler. \square

B. $R[X]$ TEK ÇARPANLAMA BÖLGESİDİR

Bu bölümde, R bir TÇB'yse, $R[X]$ 'in de bir TÇB olduğunu kanıtlayacağız. Yani R 'nin sıfır ve tersinir olmayan her elemanının R 'nin sonlu sayıda asalının çarpımı olarak yazıldığını varsayıp aynı şeyin $R[X]$ için de geçerli olduğunu kanıtlayacağız.

Sayfa 25, Önsav 7'ye göre R 'nin bir asalı (ya da indirgenemezi, aynı şey), $R[X]$ 'te de bir asalıdır (dolayısıyla indirgenemezdir.) Dolayısıyla $R[X]$ 'in bir sabit polinomunu R 'de asallarının çarpımı olarak yazarsak, böylece o sabit polinomu $R[X]$ 'te asallarının çarpımı olarak yazmış oluruz. Dolayısıyla sorun, $R[X]$ 'in sabit olmayan polinomlarını asalların çarpımı olarak yazabilmekte. Bunu yapabilmek için R 'nin bölüm cismine (bknz. sayfa 43-46) geçeceğiz. Yukarda Z için Q 'nün oynadığı rolü, bu bölümde R için R 'nin bölüm cismi oynayacak.

K, R halkasının bölüm cismi olsun. Bölüm cisimlerini anımsatalım:

$$K = \{r/s : r, s \in R, s \neq 0\}$$

dir. K kümesinde,

$$r/s = t/u \text{ ancak ve ancak } ru = st \text{ ise}$$

eşitlik kuralı kabul edilir ve toplama ve çarpma işlemleri olabilecek en doğal ve okurun tahmin etti-

ği şekilde tanımlanır. Bütün bunlar sayfa 43-46'da ayrıntılarıyla matematiksel olarak açıklanmıştır.

K bir cisim olduğundan, $K[X]$ 'in bir TÇB olduğunu biliyoruz, yani $K[X]$ 'in her elemanı sonlu sayıda asalın çarpımı olarak yazılır. $R[X]$ de $K[X]$ 'in bir althalkası olduğundan, $R[X]$ 'in R 'de olmayan her elemanı $K[X]$ 'in asallarının/indirgenemezlerinin çarpımı olarak yazılır. Dolayısıyla $K[X]$ 'in asallarının R ve $R[X]$ 'in elemanları cinsinden nasıl yazıldıklarını bulmalıyız. Bunu Önsav 8'de yapacağız.

Aynen, yukarda $Z[X]$ ve $Q[X]$ için yaptığımızı yapacağız, tek farkla ki Z 'nin yerini R , Q 'nün yerini de K alacak. Önümüze çıkabilecek bir zorluk şu olabilir: Z için tanımladığımız ve yukarda kullandığımız bir kavramı daha R için tanımlamamız olabiliriz. Nitekim Teorem 4'te Z 'nin elemanlarının en büyük ortak böleninden söz etmişiz. Böyle bir kavramı daha herhangi bir TÇB için tanımlamadık. Bu tür eksiklikleri de giderdik mi sorun kalmayacak. Yalnız dikkat edilmesi bir nokta, Z ve $K[X]$ için doğru olan Bezout Önsavı'nın, ne yazık ki R ya da $R[X]$ halkaları için doğru olmayabileceğidir.

R 'nin iki elemanın "en büyük ortak böleni" kavramını tanımlayalım. a ve b , R 'nin 0 olmayan iki elemanı olsun. Eğer a ya da b , R 'de tersinirse, $\text{ebob}(a, b)$ 'yi R^* kümesi olarak tanımlayalım. Eğer a ya da b tersinir değilse, a 'yı ve b 'yi asallarının çarpımı olarak yazalım:

$$a = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k},$$

$$b = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}.$$

Burada n_i ve m_i 'ler doğal sayılar. Eğer, örneğin p_1 , a 'yı bölmüyorsa, $n_1 = 0$. Şimdi $\text{ebob}(a, b)$ 'yi şöyle tanımlayalım:

Bézout Önsavı

Bézout Önsavı, her TÇB, örneğin $Z[X]$ polinom halkasında doğru değildir: 2 ve X , $Z[X]$ 'te birbirine asaldır, ama $Z[X]$ 'te $2g + Xh = 1$ eşitliğini sağlayan g ve h polinomları yoktur.

Bézout Önsavı, $K[X, Y]$ tek çarpanlama bölgesinde de doğru değildir: $Xg + Yh = 1$ eşitliğini sağlayan g ve $h \in K[X, Y]$ yoktur. Olsaydı, her iki tarafı da $X = Y = 0$ 'da değerlendirip $0 = 1$ bulurduk.

Ama eğer K bir cisimse, Bézout Önsavı $K[X]$ 'te geçerlidir. Bunu sayfa 30 ve 42'de iki kez kanıtlamıştık.

$$\text{ebob}(a, b) = p_1^{\min(n_1, m_1)} \dots p_k^{\min(n_k, m_k)} R^*.$$

Tanıma biraz aykırı kaçsa da $\text{ebob}(a, b)$ 'nin herhangi bir elemanını gene $\text{ebob}(a, b)$ olarak yazacağız. Umarız bu bir karışıklığa neden olmaz. Örneğin, $\text{ebob}(8, 12) = \pm 4$ olmasına karşın, çoğu zaman, $\text{ebob}(8, 12)$ 'yi 4 kabul ederiz.

Tanımdan hemen görüleceği üzere, $\text{ebob}(a, b)$ (aslında $\text{ebob}(a, b)$ 'nin her elemanı) elbette hem a 'yı hem de b 'yi böler. Ayrıca R 'nin hiçbir asalı hem $a/\text{ebob}(a, b)$ 'yi hem de $b/\text{ebob}(a, b)$ 'yi bölmez, yani $a/\text{ebob}(a, b)$ 'yle $b/\text{ebob}(a, b)$ 'nin $\text{ebob}'u$ 1'dir (yani R^* 'dir.)

Eğer $b \neq 0$ ise, $\text{ebob}(0, b) = b$ olarak tanımlanır. $\text{ebob}(0, 0)$ tanımlanmaz.

Eğer $\text{ebob}(a, b) = 1$ (yani R^* ise), a ve b 'nin ortak böleninin olmadığını söyleyeceğiz ve a ve b 'ye aralarında asal diyeceğiz. Örneğin, a ya da $b \neq 0$ ise $a/\text{ebob}(a, b)$ 'yle $b/\text{ebob}(a, b)$ elemanı aralarında asaldır.

Elbette, ikiden fazla elemanın da $\text{ebob}'unu$ tanımlayabiliriz.

Bu tanımdan sonra, Önsav 3'ü genelleştirebiliriz:

Önsav 6. g ve $f \in R[X]$ olsun. Ayrıca g 'nin katsayılarının ortak böleninin olmadığını varsayalım. Eğer g, f 'yi $K[X]$ 'te bölüyorsa, o zaman $R[X]$ 'te de böler. Yani eğer $h \in K[X]$ için, $f = gh$ doğruysa, $h \in R[X]$ 'tir.

Kanıt: h 'nin katsayılarının paydalarının çarpımı n ise, bir $k \in R[X]$ için $h = k/n$ yazabiliriz. Gerekirse sadeleştirme yaparak, n 'nin hiçbir asal böleninin k 'nin tüm katsayılarını bölmediğini varsayabiliriz. $n \in R^*$ ilişkisini kanıtlayacağız.

Demek ki $f = gh = gk/n$, yani $nf = gk$. Şimdi p , n 'nin asal bir böleni olsun. R 'nin p asalı $R[X]$ halkasında gk çarpımını böldüğünden, Gauss Önsavı'na göre (sayfa 25, Önsav 7), p , g 'nin ya da g ya da k 'nin tüm katsayılarını böler, ki bu da bir çelişkidir. Demek ki $n \in R^*$ olmalı ve $h = k/n \in R[X]$. \square

Teorem 7. $R[X]$ 'in bir indirgenemezi ya R 'dedir ya da $K[X]$ 'in de bir indirgenemezidir.

Kanıt: $f, R[X]$ halkasının R 'de olmayan bir indirgenemezi olsun. $g, h \in K[X]$ için, $f = gh$ olarak yazalım. Ya g 'nin ya da h 'nin bir sabit polinom olduğunu kanıtlayacağız.

İlk olarak, g 'yi K 'den bir elemanla çarparak ve h 'yi aynı elemana bölerek, g 'nin $R[X]$ 'te olduğunu

ve katsayılarının ortak böleni olmadığını varsayacağız. Bunu şöyle yapacağız: n , g 'nin katsayılarının paydalarının çarpımı olsun. O zaman $ng \in R[X]$. $g_1 = ng$ olsun. Şimdi g_1 'in katsayılarının en büyük ortak böleni m olsun. Demek ki, katsayılarının ortak böleni ancak R^* 'da olabilen (yani aralarında asal olan) bir $g_2 \in R[X]$ için, $g_1 = mg_2$. Hesap yapalım:
 $f = gh = (g_1/n)h = (mg_2/n)h = g_2(mb/n)$.
 $h_2 = mb/n$ yazarsak, $f = g_2h_2$ eşitliğini elde ederiz. Ayrıca $g_2 \in R[X]$ ve g_2 'nin katsayılarının ortak böleni yok.

Demek ki g_2 , f 'yi $K[X]$ halkasında bölüyor: $f = g_2h_2$. Önsav 6'ya göre $h_2 \in R[X]$ olmalı. Ama f , $R[X]$ halkasında indirgenemez. Demek ki ya g_2 ya da h_2 polinomu $R[X]$ 'te tersinir, yani R^* kümesinde, dolayısıyla ya g ya da h polinomu K 'da bir sabit. Böylece f 'nin $K[X]$ halkasında da indirgenemez olduğunu kanıtlamış olduk. \square

Önsav 8. $K[X]$ 'in her indirgenemezi, bir $g \in R[X]$ indirgenemezi ve bir $\alpha \in K^*$ için αg biçiminde yazılır.

Kanıt: f , $K[X]$ 'in bir indirgenemezi olsun. Birçok kez yaptığımız gibi, bir $\alpha \in K^*$ ve katsayılarının ortak böleni olmayan bir $g \in R[X]$ için $f = \alpha g$ yazabiliriz. g 'nin $R[X]$ 'te indirgenemez olduğunu savlıyoruz: $h, k \in R[X]$ için $g = hk$ olsun. O zaman $f = \alpha g = \alpha hk$ ve f , $K[X]$ 'te indirgenemez olduğundan, ya h ya da $k \in R[X] \cap K^* = R^*$. \square

Şimdi artık istediğimizi kanıtlayabiliriz.

Teorem 9. $R[X]$ bir tek çarpanlama bölgesidir.

Kanıt. Önce $R[X]$ 'in 0 ya da tersinir olmayan, yani $\{0\} \cup R^*$ 'da olmayan her elemanın $R[X]$ 'in sonlu sayıda indirgenemezinin çarpımı olarak yazıldığını kanıtlayacağız. f , böyle bir polinom olsun.

Eğer $f \in R$ ise kanıt oldukça kolay: Sayfa 25, Önsav 7'ye göre R 'nin bir asalı (ya da indirgenemezi, aynı şey), $R[X]$ 'te de bir asalıdır. Dolayısıyla f 'yi R 'de asallarının çarpımı olarak yazarsak, f 'yi $R[X]$ 'in asallarının çarpımı olarak yazmış oluruz.



Şimdi $f \notin R$ olsun. f , $K[X]$ 'te olduğundan, f , $K[X]$ 'in sonlu sayıda indirgenemezinin çarpımı olarak yazılabilir. Önsav 8'e göre, $K[X]$ 'in bu indirgenemezleri, K 'nin bir elemanı ve $R[X]$ 'in bir indirgenemezinin çarpımı olarak yazılabilir. Demek ki $\alpha \in K^*$ ve $R[X]$ 'in derecesi 0'dan büyük f_1, \dots, f_k indirgenemezleri için, $f = \alpha f_1 \dots f_k$. Birbirine asal b ve $c \in R$ için $\alpha = b/c$ yazarsak, $cf = bf_1 \dots f_k$ eşitliğini buluruz. c 'yi bölen bir asal, $R[X]$ 'te de asal olduğundan [Gauss Önsavı, sayfa 25, Önsav 7], aynı asal f_i 'lerden birini bölmeli (b 'yi bölemez), ama bu, f_i 'nin $R[X]$ 'te indirgenemez olmasıyla ve derecesinin en az 1 olmasıyla çelişir. Demek ki c tersinir. c 'yi c^{-1} olarak sağ tarafa aktararak,

$$f = c^{-1}bf_1 \dots f_k$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi b 'yi R 'de asallarına ayırarak, Gauss Önsavı sayesinde, f 'yi $R[X]$ 'teki indirgenemezlerinin çarpımı olarak yazmış oluruz.

$R[X]$ 'in her indirgenemezinin bir asal olduğunu kanıtlamak kaldı. $f \in R[X]$ bir indirgenemez olsun.

Eğer $f \in R$ ise, $R[X]$ 'in bir indirgenemezi olan f , R 'de bir asalıdır, çünkü f 'yi R 'nin asallarının çarpımı olarak yazdığımızda, bu asallar $R[X]$ 'in de birer asalıdır (Gauss Önsavı), dolayısıyla biri dışında hepsi tersinirdir, yani f , R 'nin bir asalıdır. Önsav 1'e göre f , $R[X]$ 'in de bir asalıdır.

Bundan böyle f 'nin R 'de olmadığını varsayalım. Demek ki f 'nin katsayılarının ortak böleni yok (yoksa f indirgenirdi.) $g, h \in R[X]$ için, f 'nin gh 'yi $R[X]$ 'te böldüğünü varsayalım. f 'nin ya g 'yi ya da h 'yi $R[X]$ 'te böldüğünü kanıtlayacağız. f , gh 'yi $R[X]$ 'te böldüğüne göre, f, gh 'yi $K[X]$ 'te de bölüyordur. Ama Teorem 7'ye göre, $f, K[X]$ 'te bir indirgenemez, yani bir asal (sayfa 31). Demek ki f , ya g 'yi ya da h 'yi $K[X]$ 'te bölüyor. Diyelim f, g 'yi $K[X]$ 'te bölüyor: $f = gk$ ve $k \in K[X]$. Önsav 6'ya göre $k \in R[X]$.

Ama $f, R[X]$ halkasının bir indirgenemezi. Bundan ve $f = gk$ eşitliğinden, ya g 'nin ya da k 'nin R^* 'da olduğu çıkar. Birinci şıkta f, gh 'yi böldüğünden, h 'yi de böler. İkinci şıkta f, gk 'ye eşit olduğundan, g 'yi böler. ♥