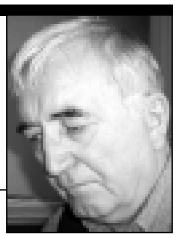
Yirminci Yüzyılda Matematiği Sarsan Temel Düşünceler



Timur Karaçay* / *tkaracay@baskent.edu.tr*

Merhaba! Hepinize hoş geldiniz diyor, ve bu güzel bahar gününde "matematik" dinleme cesaretini gösterdiğiniz için sizleri kutluyorum.

Matematik-2001 etkinliklerinde matematiğin güzelliğini ve gücünü anlatmaya çalışmıştım. Matematik-2004 etkinliklerinde, aynı sözleri yinelemek yerine, 20inci yüzyılda matematiğin temellerini derinden sarsan düşünceleri konu etmek istiyorum. Umarım söyleyeceklerim matematiğe olan güvenimizi sarsmayacak, yalnızca insan aklının yarattığı görkemli bir tiyatroyu seyretmemizi sağlayacaktır[1].

Bertrand Russell

L.E.J. Brouwer

David Hilbert

Matematiğin sağlam yapısından asla kuşkulanmadan rahat yaşantımızı sürdürürken, 20inci yüzyılın başlarında o görkemli yapının temellerine sular inmeye başladı. Bunun öyküsünü kısaca özetlemeye çalışacağım. "Kısaca" diyorum, çünkü geçen yüzyılda matematikteki her gelişim başlıbaşına bir ekoldür.

Bu ekolleri üç ana gruba ayırırsak çok kısıtlayıcı olmayız:

1. Usbilimsellik (logicism - Russell ekolü)
2. Sezgisellik (intuitionism - Brouwer ekolü)
3. Biçimsellik (formalism - Hilbert ekolü)

Bu ekoller arasında çok sert tartışmalar oldu. Tartışmalardan büyük düşünceler doğdu. Ama ne bu tartışmalardan önce ne de sonra kimse "Neden matematik?" sorusunu sormadı. Matematiğin yadsınamaz gerekliliği ve gücü asla kuşku uyandırmadı. Matematik, doğal olarak insanoğlunun yaşamına girmiştir. O dildir, sanattır, bilimdir. Bugün içinde yaşadığımız bilimi, tekniği, teknolojiyi yaratmıştır. Uygarlığımızın temelindedir. İnsanlığın refahı ve mutluluğu için ortaya konan her çaba içinde matematik varolmuştur, varolmayı sürdürecektir.

Bilim, matematiği sağlam ve güvenilir bir araç olarak görmüştür. O kadar ki, çoğunlukla, bir bulgu ya da kuralın "bilimsel" olarak nitelenmesi için, onun matematik diliyle söylenmiş olması gerek ve yeterli sayılmıştır. Matematiğin ortaya çıkardığı kuralların (teoremlerin) doğruluğundan kimse kuşku duyamaz. Kendisine yakıştırdığımız güzel nitelemelerin hepsini fazlasıyla haketmiştir. Matematik, kuşkusuz, insan aklının yarattığı en yüce, en değerli yapıttır.

Neden matematik bu kadar kesindir, neden kimse doğruluğundan kuşku duymaz? Buna verilen yanıtlar farklıdır. Çoğumuzun benimsediği yanıt şudur: Matematik tümdengelimlidir (deductive'dir.) Bir tümcenin doğruluğundan bir başka tümcenin doğruluğunu çıkarmak için "çıkarım kuralları" kullanır. Kullandığımız usbilim (mantık, logic) doğru önermelerden yanlış önermeler çıkarmaz. İki bin yıl önce doğru bir önermeden yola çıkmışsak, iki bin yıl sonra ulaşacağımız yeni önerme de doğrudur. İki bin yıl önce ortaya konmuş olsa bile, matematiksel çıkarımlar bugünküler kadar taptazedir. İki bin yıl sonrakiler de öyle olacaktır.

Bu görüş, bütün matematik sistemini, kullandığımız usbilime (mantığa) ve en başta varsaydığı-

* Başkent Üniversitesi öğretim üyesi. Yazarın 5-7 Mayıs 2004 tarihleri arasında Matematikçiler Derneği tarafından Ankara'da düzenlenen "Matematik Etkinlikleri"nde verdiği bir konuşmadan derlenmiştir.

1 Konuşmama geçmeden önce, bir şeyi açıklamam gerekiyor. Bu konuşmayı hazırlamaya haftalar önce başladım. Günlerce, kafamda kurgusunu yaptım. Sonra yazmaya koyuldum. Bir konuda yazarken, böyle yapmayı alışkanlık edinmişim. Kurguyu yaparken, açılışa gelecek ve çoğunluğu matematikçi olmayabilecek dinleyicileri sıkmamak için, ağır matematiksel düşünceleri hafifleterek, biraz da gülmece havasına sokarak anlatmayı düşündüm. Harika bir iş yapmanın heyecanını yaşarken Matematik Dünyası'nın 4 numaralı 2004 Kış sayısı elime geçti. Ali Nesin bu işi benim asla yapamayacağım güzellikte ve sabırla yapmış. Elimde olsa, bu konuşmayı ona yaptırarak cezalandırmak isterdim. Bu arada, Ali Nesin'i ve dergi ekibini kutlarken, bir matematik dergisini bu denli ilginç kılan tılsımı bilebilmeyi çok istediğimi belirtmeliyim.

Tümevarım - Tümdengelim

Bugüne dek kimse 200 yıldan fazla yaşamamıştır. Bu gözlemden yola çıkarak, herkesin 200 yaşından önce öleceği çıkarımı yapılabilir. Bu tür çıkarımlara “tümevarımsal” denir, çünkü özelden genele (türne) varırlar. Matematikte bu yöntem kabul edilemez. Tam tersine matematikte genelden özele inilir (tümdengelim). “Her insan ölümlüdür, Sokrates bir insandır, dolayısıyla Sokrates ölümlüdür” önermesinde olduğu gibi.

Tümevarım yöntemiyle, bugüne dek hiç ölmediğimden bundan sonra da hiç ölmeyeceğimi çıkarabilirim!

Sayılar kuramınaki “tümevarımla kanıt” yöntemi bambaşka bir şeydir, yukarıda sözedilenle bir ilgisi yoktur.

mız belitlere (aksiyomlara) bağlar. Belitleri değiştirdiğimizde çok farklı sistemler elde ettiğimizi çoktan beri (Öklityen olmayan geometrilerin ortaya çıkışıyla) biliyoruz. Artık belitleri değiştirmeyi çok yadırgamıyoruz.

Peki, kullandığımız usbilim (mantık sistemi) değişirse ne olur? İşte bu yadırganır. Hiç değilse, matematikçilerin büyük çoğunluğu, usbilimi değiştirme düşüncesine karşıdır. Konuşmamın bir yerinde farklı usbilim konusuna biraz değineceğism.

Çıkarım Kuralları

Doğruluğu bilinen ya da varsayılan önermelerden yeni önermeler çıkarmak için en az bir kurala gereksinilir. Genel kabul gören matematikte “modus ponens” denilen tek bir çıkarım kuralı vardır: Eğer φ önermesi doğruysa ve φ önermesi doğru olduğunda ψ önermesi de doğru oluyorsa o zaman ψ önermesi de doğrudur. Bu çıkarım kuralı biçimsel olarak,

$$\begin{array}{l} \varphi \\ \varphi \to \psi \\ \hline \psi \end{array}$$

olarak gösterilir.

Belitleri azaltarak çıkarım kurallarını artırabilir ya da çıkarım kurallarını azaltarak belitleri çoğaltabiliriz. Ama her zaman en az bir belit ve en az bir çıkarım kuralı gereklidir.

Matematiğin Temelleri

Matematiğin temelleri konusunda matematikçiler her zaman uzlaşamamışlardır. Bu nedenle, temel tanımlamak yerine, temele dayanarak tanımlanacak başlıca kavramları sıralamak daha uygun olur. Hemen aklımıza gelenler: sayılar, kümeler, kategoriler, fonksiyonlar, sonsuzluk, tümevarım, usbilimsel (mantıksal) araçlar, geometri, topoloji…

Arayışlar

Burada matematiğin tarihini verecek değilim. Ama matematiğin temellerini sarsan düşüncelere ulaşabilmek için, matematiksel usbilime gelişin kısa resmigeçitini söylemeden olmaz.

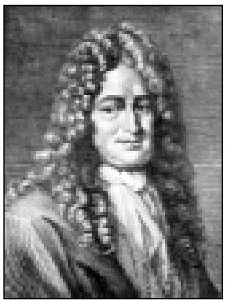

Aristo (sağda) ve hocası Eflatun. Rafael’in bir başyapıtından detay

Aristo (M.Ö.384-322). İki değerli usbilimin kurucusudur. Organon (Alet) adlı yapıtı insanlığa miras kalan en büyük yapıtlardan biridir. Aristoteles 14 usavurma kuralı (syllogism) verdi. Bu kurallar bugünkü biçimsel mantığın temelidir ve 2000 yılı aşkın bir zaman dilimi içinde insanoğlunun düşünme ve doğruyu bulma eylemini etkisi altında tutmuştur. Kuşkusuz, matematik de bundan nasibini almıştır.

Blaise Pascal (1623-1662). Herkesin gördüğü, bildiği apaçık bir gerçeği, Pascal, matematik diliyle ifade etti: “Bir para atıldığında, ya yazı ya tura gelir. Yazı gelme olasılığı 1/2, tura gelme olasılığı da 1/2’dir. Bu iki olasılığın toplamı 1/2 + 1/2 = 1 eder.” Bu basit gerçek, olasılık kuramı (probability theory) adlı bilim dalını doğurdu. Bu bilim dalının, biçimsel usbilimle yakın ilişkisi o günlerde hiç sezilmiyordu; çünkü biçimsel usbilime matematiksel yöntemler henüz karışmamıştı.


Blaise Pascal

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Matematikte usbilimselliğin (logicism) ilk belirtileri

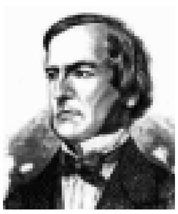

G. W. Leibniz

onunla ortaya çıkmıştır. Usavurma sürecini konuşulan dilden ve anlamdan (semantikten) bağımsız kılarak ona matematiksel ve biçimsel (sentetik) bir yapı kazandırmaya çalışan ilk kişi olan Alman matematikçi ve filozof Leibniz'in yaptığı işin önemi ölümünden iki yüzyıl sonra anlaşılabilmiştir. Dissertatio de Arte Combinatoria (1666) adlı eserinde simgesel bir dil yaratmayı düşündü. "Evrensel tam notasyon sistemi" dediği bu dilde, her kavram en küçük bileşenlerine ayrışacak, kavramlar bu bileşenler cinsinden ifade edilecektir. Lingua characteristica universalis, calculus ratiocinator (akıl yürütmenin hesabı) adlı projeleri kuramsal olarak bile gerçekleşemedi. Yaşarken yayımlanmamış usbilimsel makalelerinin önemi, ölümünden çok sonra anlaşılacaktır.

Immanuel Kant (1724-1804). 1794'te mantığın tamamen işlenmiş, bitirilmiş, sona erdirilmiş bir dal olduğunu ifade etmiştir. Kant yanılıyordu. Mantığın görkemli dönüşü henüz başlamamıştı.


I. Kant

George Boole (1815-1864). İngiliz matematikçi Boole, Alman matematikçi Leibniz'in düşünü matematiksel bir yapıyla gerçekleştirdi. İki değerli Aristo mantığını matematiksel temellere oturtan simgesel mantığı yarattı. Buna Boole mantığı, Boole cebiri, matematiksel mantık, simgesel mantık gibi adlar verilir. Boole mantığında akıl yürütmede kullanılan simgeler, sözcüklere, nesnelere, duyulara, verilen anlamlara bağlı değildir. Soyut simgeler ve o simgeler arasında matematiksel işlemler kullanılarak akıl yürütme süreci tamamlanır. Kullandığı cebirsel yapı, mantığın istediği sağlamlığı sağlar.


G. Boole

Yüklemsel Hesap (Predicate Calculus). Boole'un nerdeyse her yönünü keşfettiği önermeler mantığı önermelerin kendisini değişken olarak kullanır. Oysa bir önermenin kendisinde de değişkenler olabilir, "x ölümlüdür" ya da "her x için, x bir insansa x ölümlüdür" önermelerinde olduğu gibi. Önermeleri değişkenleriyle birlikte irdeleyen mantık dalına **yüklemsel hesap** denir. Yüklemsel hesap, Frege'nin bulgularından esinlenilerek 1910 ve 1920'lerde önermeler mantığının üstüne kurularak bulunmuştur ve önermeler mantığından daha güçlüdür.

Önermeler Mantığı/Yüklemsel Hesap

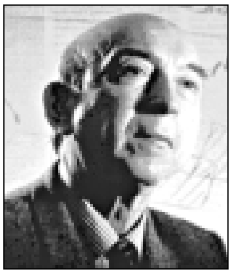
Önermeler mantığında bir önermenin anlamı önemli değildir, önemli olan önermelerin doğrulukları ve yanlışlıkları açısından birbirleriyle olan ilişkileridir. "Her sayının karesi sıfırdan büyükeşittir" önermesi yüklemsel hesabın kapsamındadır. Günlük dille ifade edelim: "x'in rengi y'dir" tümcesinin x çimen ve y yeşil olduğunda doğru olması yüklemsel hesabın çalışma alanına girer.

Basitten Karmaşığa. 1820'lerden sonra Bolzano, Abel, Cauchy ve Weierstrass gibi ünlülerin, kendi zamanlarında matematikte beliren bazı belirsizlikleri gideren önemli buluşları oldu. 19uncu yüzyılın sonlarında Hamilton karmaşık sayıları temsil etmek için gerçel sayı çiftlerini kullandı. Rasyonel sayılardan hareketle irrasyonel sayıları üretmek amacıyla Weierstrass, Dedekind ve Cantor yöntemler geliştirdiler. Grassmann ve Dedekind'in çalışmalarına dayanarak Peano doğal sayılardan hareketle rasyonel sayıları elde eden yöntemini geliştirdi. Görülüyor ki Frege zamanında, matematiğin karmaşık nesnelerinin göreceli olarak daha basit ve bir anlamda daha küçük nesnelerden yaratılabileceği görüşü ağırlık kazanmıştı.

Belirsizlik (Uncertainty). Matematiksel (simgesel) mantığın sağlam ve cebirsel bir yapı olarak ortaya konması, klasik (sözel) mantıktan ancak 2000 yıl sonra yapılabilen çok büyük bir aşamadır. Ama Boole mantığı da klasik mantığın ortaya koyduğu iki-değerliliği korumaktadır. İki-değerli mantıkta belirsizlik olamaz. İki değerli mantıkta bir önerme ya doğru ya yanlıştır. Oysa, gerçek yaşamda önermeler hem doğru hem yanlış ya da biraz doğru, biraz yanlış olabilir. Daha ötesi, gözlemlere dayalı önermelerin doğruluğu belli bir olasılık katsayısına bağlıdır. M.Ö. 400'lü yıllardan beri, doğru ve yanlış arasında bir şeylerin daha olması gerektiği seziliyordu. Çünkü iki değerli mantığın çatışkılar (paradoks) yarattığı da görülüyordu.

Jan Łukasiewicz (1878 - 1956). Bu sorunu aşmak için çalışanlar arasında Polonyalı Łukasiewicz'i anmak gerekir. Łukasiewicz geçen yüzyılın başında çok-değerli mantığı kurdu. Önce doğru ve yanlış arasına bir aradeğer (bilirsiz-değer) koyarak üç-değerli mantığı belitsel biçimde ortaya koydu. Bu sistem iki değerli mantığı kapsayan daha genel bir sistem oldu. Ama böylece bu işin üç değerle kısıtlanamayacağı, sonsuz değerli mantığa geçişin doğallığı da ortaya çıkıyordu.

Bulanık (Fuzzy) Mantık. Doğa olaylarını açıklamak için kullandığımız matematiksel yöntemlerin ve modellerin yararı, gücü ve heybeti tartışılamaz. Ancak matematiğin deterministik niteliğinin uygulamada gerçeğe çoğunlukla uymaması, yüzyıllar boyunca bilim adamlarını ve düşünürleri uğraştırmıştır. "Çim yeşildir" tümcesinin bile doğruluk değeri, yüksek olsa bile, tam yüzde yüz (yani 1) değildir. Matematiksel temsiller, evrenin karmaşıklığı ve sınırsızlığı karşısında yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle, doğa olaylarını açıklarken, çoğunlukla, kesinliği değil belirsizliği kullanırız. Azerbeycan doğumlu Lotfi Zadeh, 1965 yılında ilk cesur adımı attı ve bulanık kümeler ile bulanık mantığı tanımladı.


Lotfi Zadeh

Analiz. Antik-çağ matematikçilerinin ussal bilgiye dönüştüremedikleri önemli bir kavram vardır: Sonsuzluk. 17inci ve 18inci yüzyılda, fiziksel olayların açıklanabilmesi için (pek de ne olduğu anlaşılmadan ortaya atılan) sonsuz küçük kavramı bu yönde önemli bir adımdır. Sonsuz kavramının matematikselleşmesini sağlayan etmenlerden biri olan limit kavramının, dört işleme eklenen beşinci bir işlem olarak matematiğe girişi, "analiz" adıyla anılan büyük ve önemli bir matematik dalını doğurmuştur. Analizin doğuşunu ve gelişimini sağlayan zorlayıcı etmenlerin başında fizik gelir. Klasik fiziğin hemen her probleminin çözümü, analizin bilgi sınırlarını zorlamış ve onu gelişmeye itmiştir. Bugün klasik fizikte doğa olaylarının açıklanması, analizin kesin egemenliği altındadır. Benzer olguya çağdaş fizikte de rastlanmaktadır.

Bu tümce yanlıştır!

"Bu tümce yanlıştır" tümcesini irdeleyelim. "Bu tümce yanlıştır" tümcesi yanlışsa doğrudur, doğruysa yanlıştır.

Klasik mantıkta doğru tümceye 1, yanlış tümceye 0 değeri verilir. Dolayısıyla, eğer yukardaki tümcenin değerine p dersek şöyle bir sonuç çıkar:

$p = 1$ ise $p = 0$'dır
$p = 0$ ise $p = 1$'dır.

Soldaki p'ye "eski p" diyelim ve p_e olarak gösterelim. Sağdaki p'ye "yeni p" diyelim ve p_y olarak gösterelim. Demek ki,

$p_e = 1$ ise $p_y = 0$'dır
$p_e = 0$ ise $p_y = 1$'dır.

Cebirsel olarak, bu,

$$p_y = 1 - p_e$$

demektir. Oysa biz bir tek p istiyoruz, "yeni p", "eski p" gibi ayrım istemiyoruz, demek ki $p_e = p = p_y$. Yukardaki $p_y = 1 - p_e$ denkleminden $p = 1 - p$ denklemini buluruz. Yani $p = 1/2$. Dolayısıyla, "bu tümce yanlıştır" tümcesinin doğruluk değeri 1/2 olmalıdır!

İki değerli olan matematikte, yukardaki çelişkiden dolayı hiçbir önerme kendisinin yanlışlığını ifade edemez.

Kuantum Fiziği. Klasik fiziğin çözümleyemediği bazı doğa olaylarının açıklanabilmesi için yeni kuramlara gereksinim duyulmuştur. Bu yöndeki çabalar sonunda, 1924-28 arasında kuantum fiziği kurulmuştur. Bu yeni kuramın temelleri de, adına "çağdaş analiz" ya da "fonksiyonel analiz" denilen matematik dalının ortaya çıkmasını sağlamıştır. Bu gelişim, doğa olaylarının matematiksel modellerle temsiline yeni ve önemli örnekler getirmiştir. Örneğin, ışığın niteliğini, Schrödinger'in dalga mekaniği kuramı Heisenberg'in matris mekaniği kuramı farklı biçimlerde ama doğru olarak açıklıyorlardı. Kuantum fiziğinin bu sorununa "Fonksiyonel Analiz" mükemmel ve zarif bir çözüm getirmiştir: Schrödinger'in kuramı L^2-fonksiyon uzayı içine, Heisenberg'in kuramı ise l^2-dizi uzayı içine yerleştirilmekte ve bu modeller içinde açıklanmaktadır. İki kuramın farklı görüntüsü buradan kaynaklanmaktadır. Ancak bu iki uzay, matematiksel açıdan yapıları biribirlerine denk olan iki uzaydır. Dolayısıyla iki kuram bir anlamda birbirine denktir.

Nerde Kalmıştık?

Bu kısa resmigeçitten sonra asıl konumuza dönebiliriz.

Toplumlarda liderler, büyük kahramanlar zor zamanlarda (doğru zamanlarda) ortaya çıkar. Onları çevre koşulları yaratır. Bilimde de böyledir. Çözüm zamanı gelen büyük problemleri çözecek büyük bilginler daima (doğru zamanda) ortaya çıkar. 20nci yüzyılın ilk yarısı, matematiğin temellerinin yeniden kurulması çabalarıyla doludur. Matematik böyle zor bir döneme girince, onu kurtarmak için kolları sıvayanlar çok oldu. Harika işler başardılar. Bunların hepsini önem sırasıyla verebileceğimi sanmıyorum. Ama 20nci yüzyıl matematik tarihinin hiç unutamayacağı adlardan bazıları şunlardır: Cantor, Zermelo, Skolem, Fraenkel, Montague, Russell, Whitehead, Bernays, von Neumann, Hilbert, Gödel, Turing, Zadeh.

Kümeler Kuramı ve Sonsuzluk. Geçen yüzyıla girilirken Alman matematikçi Georg Cantor (1845-1918) çeşitli sonsuzluklar bularak matematikte bir devrim yarattı. Her devrim, kurulu düzende bir karmaşa yaratır. Matematikte de bu karmaşa kaçınılmaz olarak yaşandı.

Doğan karmaşayı açıklamak için şimdi hepimizin iyi bildiği $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ doğal sayılar kümesinden başlayalım ve Cantor'un yaptıklarını gözden geçirelim: Cantor,

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

sayılarının sonuna ω ile gösterdiği "sonsuz bir sayı" ekledi:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, \omega$$

Burada durması için bir nedeni yoktu; sayı eklemeyi sürdürdü:

$$1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots$$

Bu biçimde sayı ekleme işini 2ω'ya kadar götürdü:

$$1, 2, 3, \ldots, \omega, \ldots, 2\omega$$

Sayı ekleme işine kendisini iyice kaptıran Cantor, eylemini inatla sürdürerek, sırayla, şu kümeleri elde etti:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \omega$$
$$\omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \ldots,\ \omega+\omega = 2\omega$$
$$2\omega,\ 3\omega,\ 4\omega,\ \ldots,\ \omega\omega = \omega^2$$
$$\omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4,\ \ldots,\ \omega^\omega$$
$$\omega^\omega,\ \omega^{\omega^\omega},\ \omega^{\omega^{\omega^\omega}},\ \ldots,\ \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

Sonunda ulaştığı (sonlu ötesi) sayılar, analizin bildiği sonsuz sayı kavramını ve bazılarının hayal sınırlarını çok çok aşıyordu. Matematikçiler önceleri buna pek aldırış etmediler; önemini de anlamadılar. Ama giderek işin vehametini anladılar: Temel sarsılıyordu. Dünyanın en akıllı adamları, olarak addedilen matematikçiler arasında büyük bir tartışma başladı. Kimileri Cantor'un söylediklerinin gerçekle ilgisi olmadığı, kafa yormaya değmeyecek kurgular, hatta fanteziler olduğu görüşündeydi. Kimileri ise bu gibi şeylerin matematikçilerin değil, teologların düşüneceği saçmalıklar olduğunu savundu.

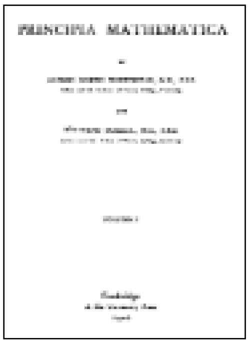
Cantor'un ortaya attığı kümeler kuramı, matematikte yepyeni bir çığır açtı. Çığır demek yetmez, tam anlamıyla bir devrim yarattı! Bundan sonra matematiğin temelleri kümeler üzerine kurulmalıydı!..

Usbilimsellik (logicism). Bertrand Russell, gençliğine matematikçi olarak başladı, sonradan filozofluğa kadar düştü (!) Bununla yetinmeyip son yıllarında hümanist akımlara kapıldı ve savaş karşıtı eylemlere karıştı (!) Durup dururken yaşamının son yıllarını neredeyse zora sokacaktı... Russell matematiğin temellerinin sarsıldığını ilk gören kişi değilse bile, bunu çok açık biçimde ortaya koyan kişidir. O nedenle, bazı matematikçilerin onu sevmemesini anlayışla karşılamak gerekir. Bence insanlık adına söylediği ve yaptığı güzel şeyleri matematikçi olarak yaptı diye onunla öğünmeliyiz.

Çok "popülarize" edilmiş olarak bildiğimiz çatışkıların (paradoksların) birçoğu Russell tarafından ortaya konulmuştur. Bunların birçoğu Matematik Dünyası'nda çıkmıştır; burada yinelemenin gereğini görmüyorum. Yalnızca bir örnek vermek için berber çatışkısını Ali Nesin'in dilinden aktaracağım: Köyün birinde bir berber varmış. Bu berber, o köyde kendini traş etmeyen herkesi traş edermiş, kendini traş edenleriyse traş etmezmiş. Soru şu: bu berber kendini traş eder mi? Kendini traş etmezse, kendini traş etmeyen herkesi traş ettiğinden, kendini traş etmeli. Kendini traş ederse, kendini traş edenleri traş etmediğinden, kendini traş etmemeli.

"Berberin kendini traş edip etmemesinden bize ne!" diyebiliriz. Ama bu çatışkıların birer oyun, birer bilmece olmayıp, matematiğin temellerini derinden sarsan üstün düşünceler olduğuna inananlar çıktı orta yere.

Principia Mathematica. Russell matematiğin temelinde oluşan sarsıntıyı görüp söylemekle yetinmedi. Whitehead'le birlikte matematikte doğan çelişkiyi yokedecek yöntem aradı. 1910, 1912 ve 1913'te yayımlanan üç ciltlik Principia Mathematica'da bütün matematiğin usbilimselliğe (logicism'e) indirgenebileceğini savundular. Tezlerini iki bölüme ayırabiliriz. Birincisi, bütün matematiksel doğrular usbilimsel doğrulara dönüştürülebilir. Başka bir deyişle, matematiksel terimler usbilimsel terimlerin bir altkümesidir. İkincisi, bütün matematiksel kanıt yöntemleri usbilimsel kanıt yöntemleriyle ifade edilebilir. Başka bir deyişle, matematiksel teoremler usbilimsel teoremlerin bir altkümesidir. Russell'in sözleriyle özetlersek, bütün soyut matematiğin usbilimsel kurallarla elde edilebileceğini göstermek usbilimcinin işidir. Öyleyse, matematik usbilimdir, matematikçi de usbilimcidir. Principia Mathematica modern matematiksel usbilimin doğmasına neden olmuştur. İlk basımı parasızlık yüzünden geciken Principia Mathematica, Aristo'nun Organon adlı ünlü yapıtından sonra usbilim alanında yazılmış en önemli yapıt olarak kabul edilir.



Sezgisellik (Intuitionism). Matematiği sezgisel olarak kurmayı amaçlayan bu ekol esas olarak Luitzen Egbertus Jan Brouwer'ın (1881-1966) ortaya koyduğu sistemdir. Cantor'un kümeler kuramına dayalı yapısını şiddetle yadsırken, Russell'in usbilimselliğine de karşı durur. Tartışma, "akıl oyunları"nın sergilendiği görkemli bir tiyatroya dönüşür. Sergilenen oyuna seyirciler de katılır... Poincaré matematiğin temellerini varsayımlara dayamak isterken, Kronecker teolojiye sığınır.

Biçimsellik (Formalism). Poincaré'yle birlikte çağın en etkili matematikçisi David Hilbert (1862-1943), "akıl oyunları"nın son perdesini indirmek istedi. Kanıt kuramı (proof theory) dediği biçimsel bir matematik dili geliştirdi (1927). Ona göre sezgisel matematik yaparken konuştuğumuz dil, duygularımız, özne (madde) geleneksel çıkarım yöntemlerimizi etkilemektedir. Dış etkenleri yoketmek için yapay bir matematik dili oluşturdu. Yedi ana grupta topladığı 17 formülle matematik teoremlerini kanıtlayabiliyordu. Ortaya attığı kuramın ilk sunumunu yaparken şöyle diyordu: *Matematik önyargısızdır. Onu bulmak için Kronecker'in yaptığı gibi Tanrı'ya, Poincaré'nin yaptığı gibi yeteneklerimize hitabeden varsayımlara, Brouwer'in yaptığı gibi temel sezgilere, Russell'in yaptığı gibi belitlere gereksinim yoktur. Matematik, formüllerden oluşan kendi içinde kapalı bir sistemdir.*

Hilbert büyük bir matematikçidir. 20nci yüzyıl matematiğine damgasını vurmuştur. 1900'de Paris'te yapılan Uluslararası Matematik Kongresinde ortaya attığı problemler, aradan geçen 100 yılda bile tam çözülememiştir, ama bu problemler yüzyılın matematiğine yön vermiştir. Herkes böyle bir dahinin "akıl oyunları" için yazdığı son perdeyle temsilin bittiğine inanmaktadır. Ta ki Gödel denen biri çıkıp oyuna hiç bitmeyecek bir perde daha ekleyene dek!..

Gödel Diye Biri! Bir matematik sisteminde üç nitelik ararız.

Birincisi, **tamlık** (completeness): Her önermenin ya kendisi ya da tersi kanıtlanabiliyorsa, başka bir deyişle, sistemdeki her p önermesi için ya "p doğrudur" ya da "p yanlıştır" önermelerinden biri kanıtlanabiliyorsa sistem tamdır.

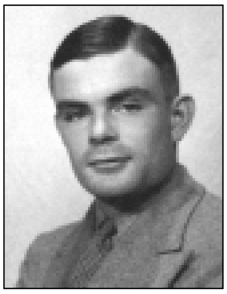
İkincisi, **tutarlılık** (çelişkisizlik, consistency): *H*er p önermesi için ya "p doğrudur" ya da "p yanlıştır" önermelerinden ancak biri teoremse sistem tutarlı, her ikisi de teoremse sistem tutarsızdır.

Üçüncüsü **sınanabilirlik**: yani sistemde bir kanıt verildiğinde, bu kanıtın geçerli olup olmadığını sonlu zamanda sınayabileceğimiz bir yöntem olmalıdır.

1931'de Kurt Gödel (1906-1978) ortalığı toz dumana katana kadar Hilbert'in formal sisteminin matematikteki krizi tamamen çözdüğü sanılıyordu. Gödel'in tamamlanamazlık (incompleteness) teoremi adını verdiği teorem, sadece doğal sayıları ve toplamayla çarpmayı anlayacak kadarcık karmaşık bir sistemin yukardaki üç niteliğe sahip olduğunun o sistem içinde kanıtlanamayacağını söylüyordu. Bu sonuç, matematiğin tutarlı olduğunun matematiğin içinde kanıtlanamayacağının kanıtıydı. Dolayısıyla, kendi içinde kapalı bir sistem oluşturduğu sanılan Hilbert formalizminin çöküşü anlamına geliyordu.

O zamana kadar kimse Hilbert'in yanılmış olabileceğini düşünmüyordu. Dahi matematikçi von Neumann bile Gödel'in yaptığını öğrenince "Yanıldım, gemiyi kaçırdım!" (yani "Gödel'in teoreminin doğru olabileceği aklıma gelmedi") diye hayıflanmıştır. Kurt Gödel, Aristo'dan sonra gelmiş en büyük usbilimci unvanını kazanmıştır.

Alan Turing (1912-1954). Leibniz'in düşünü gerçekleştirecek bir makinayı tasarladı (1936). Turing makinası adıyla anılan bu hayal makina, her matematik problemini çözecek mekanik bir alet olarak düşünüldü. Turing, bugünkü bilgisayarların çalışma ilkelerine çok benzeyen bir yöntemle, bütün problemleri çözen mekanik bir makinanın (ya da algoritmanın) var olamayacağını kanıtladı. Bu sonuç, farklı bir yaklaşımla Gödel'i doğrulamaktadır. Hatta, Greg Chaitin'e göre, Gödel'in yaptığı işten daha büyüktür.



Alan Turing

Sonuç. "Akıl Oyunları" sürüyor; henüz son perdesini kimse yazamadı. Evrenin karmaşası o son perdenin yazılmasına henüz izin vermiyor. Doğa olaylarını açıklamak için ortaya koyduğumuz kuramlar, evrenin yaşına oranla daha çok yeni, çok yetersiz. Kaosçular'ın deyimiyle, "Çin'de kanat çırpan kelebeğin Teksas'ta kasırga yaratışını" açıklayan modelimiz yok. (Bu söz hiçbir politik ima taşımıyor.) Böyle oluşu gelecek için umudumuz olmalıdır. Çünkü insan soyuna üstünlük sağlayan şey evrenin gizlerini tümüyle biliyor olması değil, o gizleri durmaksızın arama iradesine sahip olmasıdır. Görkemli bir tiyatroda bitimsiz bir oyunu oynuyoruz. Kimbilir, insanoğlu belki bu oyuna erdemi de katabilir. ♥

Kaynakça

[1] Baum, R., **Philosophy and Mathematics**, San Francisco: Freeman, Cooper, 1973.

[2] Benacerraf, P. ve Putnam, H., **Philosophy of Mathematics, Selected Readings**, Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

[3] Boyer, Carl B., **The History of The Calculus and its Conceptual Development**, New York: Dover, 1949.

[4] Courant, R. ve Robbins, H., **What is Mathematics?**, Oxford: Oxford University Press, 1978.

[5] Frege, G., **Grundgesetze der Arithmetik**, cilt I (1893), cilt II (1903), Jena: Verlag Hermann Pohle. Ed.

[6] Kline, M. **Mathematics, the Loss of Certainty**, Oxford: Oxford University Press, 1980.

[7] Nagel, E. ve Newman, J.R., **Gödel's Proof**, New York: New York University Press, 1958.

[8] Quine, W.V., **Ways of Paradox**, New York: Random House, 1966.

[9] Rand, A., **Introduction to Objectivist Epistemology**, New York: Penguin Group, 1990.

[10] Ross, D., **The Cognitive Basis of Arithmetic**, Poughkeepsie, N.Y.: Institute for Objectivist Studies (çıkacak).

[11] Russell, B., **Principles of Mathematics**, Cambridge: Cambridge University Press, 1903.

[12] Russell, B., **Introduction to Mathematical Philosophy**, London: George Allen and Unwin, 1919.

[13] Whitehead, A. N., **Treatise on Universal Algebra**, Cambridge: Cambridge University Press, 1898.

[14] Whitehead, A. N., **On Mathematical Concepts of the Material World**, London: Dulau, 1906.

[15] Whitehead, A. N., ve Russell, B., **Principia Mathematica**, 3 cilt (1910, 1912, 1913), Cambridge: Cambridge University Press. İkinci basım, 1925 (cilt 1), 1927 (cilt 2 ve 3). Kısaltılmış basım 1962.

[16] Walley, P., **Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities**, Chapman and Hall, London, 1991.

[17] Willaeys, D. ve Malvache, N., *The use of Probability Functions for the Treatment of Fuzzy Information by Computer*, Probability Functions and Systems 5 (1981) 323-328.

[18] Wilson, N. ve Moral, S. A., *Logical View of Probability*, **Proc. of the 11th Europ. Conf. on Artificial Intelligence** (ECAI'94) (Ed. A.G. Cohn), Amsterdam, The Netherlands, Aug. 8-12, Wiley, New York (1994) 386-390.

[19] Zadeh, L.A., *Quantitative Fuzzy Semantics*, Information Sciences 3 (1971) 159-176.