

Yüzüncü Yıl Üniversitesi Rektörü Yücel Aşkın'ın

## 16. Ulusal Matematik Sempozyumu Açılış Konuşması

(Eylül 2003)



Yüzüncü Yıl (Van) Üniversitesi rektörü Prof. Dr. Yücel Aşkın, 16. Ulusal Matematik Sempozyumu'nun (Eylül 2003) açılış konuşmasında alışagelmış normların dışına çıkarak matematik tarihi açısından içeriği zengin bir konuşma yapmıştır. Aşağıda Prof. Dr. Yücel Aşkın'ın açılış konuşmasının metnini bulacaksınız.

Değerli Konuklar,

Yüzüncü Yıl Üniversitesi ve Türk Matematik Derneği'nce düzenlenen 16. Ulusal Matematik Sempozyumu'na hoş geldiniz. Kongre süresince ülkemizde ve dünyada matematik alanında sağlanan gelişmeler ve bunların olası sonuçları değerlendirilip, tartışılacak ve ortak çalışma olanakları aranacaktır. Kongreyi düzenleyenlere katkılarından dolayı teşekkürlerimi sunuyorum ve toplantıların matematik dünyamız için yeni ufuklar açmasını diliyorum.

Homo Sapiens'in uzun süren gelişimindeki ilk matematik öğretmeni özel bir dizilimle bir araya gelen moleküllerden oluşan "çifte sarmal", başka bir deyişle evrimin ta kendisidir. "İnsanlaşma" sürecinin ilk matematiksel belirtisi olan "sayma" eylemi, gelişmekte olan biyolojik bir bütünlüğün, dil gibi, sanat gibi zorunlu yönellerinden biridir. Bugünkü bilgilerimize göre bu gelişme Afrika'da ortaya çıkmış ve buradan da bütün dünyaya yayılmıştır. Swaziland'da İ.Ö. 35000'e tarihlenen 29 çentikli şebek uyluk kemiği ve Zaire-Uganda sınırındaki Edward gölü yakınlarında Jean de Heinzelin de Braucourt tarafından bulunan İ.Ö. 20000'e ait Ishango kemiği gibi çok sayıdaki buluntu bu varsayımı desteklemektedir.

Daha sonra dünyaya yayılmış uygarlık ve kültürler farklı sayı sistemleri geliştirmişlerdir. Sayma, gündelik hayata veya *praxis*'e ilişkin bir konumdan soyut simgelere uzanan bir evrim geçirecektir. Tarihi boyunca insanoglu, anlamak, doğayı anlayıp denetlemek, ticaret yapmak, inanç sistemi geliştirmek, varlığını anlamlandırmak ve soyut sis-

temler geliştirmek için saymaya başvurmuştur. Sayı ve sayma kavramlarının geliştirilmesi ve *praxis*'ten *theoria*'ya geçiş, genel kabul gören anlayışın tersine Mısır, Mezopotamya ve Hindistan'da ortaya çıkmış olmalıdır. Buralarda kuşaklar boyu oluşan birikim, ortaya çıktıktan 2000-2500 yıl sonra, Batı Anadolu'da yani eski adıyla İyonya'da, daha sonra da Yunanistan'da tekrar yeşerecek, Orta Çağ'da İslam uygarlığı aracılığıyla Batı'ya yeni ve özgün katkılarla tanıtılacaktır. Batı da bu birikimin gerçek köklerini görmezden gelerek bunu yanlı ve tarihi tahrif ederek pazarlayacaktır.

Eski kültürlerin farklı tabanlara göre geliştirdikleri sayı sistemleri birçok açıdan üzerinde durmaya değerdir. Benzer sayı sistemleri kullanan toplumların hangi ortak kültürden etkilendikleri ve kültürel iletişimin hangi kültürler arasında gerçekleştiği, sayı sistemlerinin ait oldukları kültürün bir ürünü olduğundan hareketle, o toplumun düşünce tarzının çözümlenmesi, matematiksel sezgileri ve kavramları, bilim tarihi, felsefe, sosyoloji, antropoloji, arkeoloji ve tarih bilimine yeni yeni bakış açıları, değerlendirmeler ve açılımlar kazandırabilir.

Bugün adlarını bilmesek ve elimizdeki kanıtlar sınırlı olsa da, araştırmalar yoğunlaştıkça, günümüzden 5000 yıl öncesinden başlayarak soyut matematiksel düşünceye ait kavramlar Nil boyunca eski Mısır'da, Mezopotamya'nın Sümer ve Babil'inde ve Hindistan'ın İndüs Vadisi'nde Mohenjo Dara ve Harappa gibi merkezlerde gelişmeye başlamıştır. İ.Ö.1200'lü yıllardan başlayarak ve özellikle Hindu'ların antik Sulba-Sutras kitaplarında Pythagoras ve Euclid'in çalışmalarının hemen tüm



Üstündeki çentiklerden sayı saymaya yaradığı anlaşılan Ishango kemiği.

izlerine rastlanmaktadır. Barrow, Hint sayma sisteminin gezegenimizde bugüne dek yapılmış en başarılı zihinsel yenilik olduğunu yazar ve Pythagoras'ın kendi adını taşıyan teorinin özgün mucidi olmadığını, bunu muhtemelen daha önce değindiğim merkezlere yaptığı seyahatlerde öğrendiğini ileri sürer.

İndüs-Nil-Mezopotamya üçgenindeki matematiksel birikim, sayma'dan soyut kavramlara yani sayı'ya geçişi getirecektir. Bundan sonrası artık bugün anladığımız anlamda matematiğin inşası sürecidir. Bu bakımdan ikinci büyük atılım günümüzden 2500 yıl önce Anadolu'dan "Arche" sorununu düşünen Doğa Filozoflarından, Thales, Anaximenes ve Anaximendros'dan gelir. Bunu Yunan yarımadasında Pythagoras ve Euclid gibi başkaları da izleyecektir.

Euclid Elementler'inde üç boyutlu bir geometri inşa eder. Pythagoras ise mistik bir anlayışla sayıların evrenine dalar. Kendisi ve müridleri için doğal sayılar artık tanrıyla özdeşirler. Oluşturduğu tarikat  $\sqrt{2}$ 'nin kesirli sayı olmadığını açıklayan Hippasus'u boğarak öldürür. Heraklitos günümüze kalan üç fragmanında Pythagoras'ı çok sivri bir dille eleştirmektedir:

*Düzenbazların şahıydı Pythagoras*

veya

*ona göre  
kendi bilgeliği  
çok şey bilen  
bir muzırın sanatıydı*

veya

*çok bilmek  
öğretmez akıllı olmayı  
öğretse  
Heriodos'la<sup>1</sup> Pythagoras'a öğretirdi  
bir de Ksenophanes'le<sup>2</sup> Hekaitos'a<sup>3</sup>*

der.

Matematiğin evriminde üçüncü büyük adım Ortaçağ'da yine Hindistan'dan ve İslam uygarlığından gelecektir. M.S. 500'lerde Brahmagupta sıfırla bölmeden sözeder, 1100'lerde ise Bhaskara sıfırla bölerek sonsuzluğu anlatır.

İslam Uygarlığı aynı inanca sahip farklı toplumlar olan Arapları, İranlıları, Türkleri ve di-

ğer küçük etnik grupları, aynı inanca sahip olmayan bazı küçük topluluklarla bir araya getirir. Anılan dönemde sadece matematik değil tüm bilimlerde büyük bir atılım gerçekleştirilir. Dönemin bilim adamları aynı zamanda çok iyi çevirmenlerdir ve eski kaynaklar orijinal dillerinden Arapçaya çevrilir.

Mansur ve Harun Reşid gibi Abbasi Halifelerinin matematiğe destekleriyle Bağdat'ta Bait-al-Hikma (Bilimevi) kurulur. Burada el-Harezmi (780-850), Hint sayı sistemini ve matematiğini inceleyerek cebiri geliştirir. Harezmi'nin yapıtı daha sonra Hint sayı sistemi ve Arap cebirini Batıya taşıyan temel eser olacaktır. İranlı Cemşit-el-Kaşi (1380-1429) ise Çin kaynaklarından yararlanarak trigonometrik yöntemlerle üçüncü dereceden denklemler üzerinde çalışır.

Rubaiyat yazarı Hayyam (1038-1123), "Cebir"inde üçüncü dereceden denklemleri inceler, cebirle geometriyi kaynaştırmayı dener ve İslam takviminde düzeltme yaptığı için muhtemelen eleştirilir ve hemen cevap verir:

*Ah, diyorlar ki benim hesaplamalarım  
Yılı insan pusulasına uydurdu.  
Eğer öyleyse takvimden  
Doğmamış yarımı ve ölü dünü koparalım.*

1256'da Moğolların Bağdat'ı yakıp yıkmasının ardından Hulagu, Nasırettin Tusi (1201-1274) için Meraga'da bir gözlemevi kurar. Struik [Kısa Matematik Tarihi, Sarmal Y. 1996], burada tüm Doğu biliminin Yunan bilimiyle boy ölçü-şebileceği bir kurumsallaşmanın gerçekleştiğini söyler. Tusi'nin yaptığı en önemli katkılardan biri trigonometriyi astronomiden ayırıp özel bir alan olarak görmesidir.

Bu dönemde Çin'de de önemli gelişmeler izlenecektir. M.S. 3. yüzyıldan başlayarak 13. yüzyıla kadar Liu Hui, Hsiao T'ung, Chiu Shao ve Yang Hui gibi matematikçilerin çalışmaları dönemlerinin Hintli ve Arapça yazan matematikçileriyle aynı düzeyde ve özgün çalışmalardır.

Ortaçağ'dan başlayarak tüm eski dünyanın ve Doğu'nun matematiksel bilgi birikimi Avrupa'ya aktarılmaya başlanacak ve bu birikim pek görül-medik bir biçimde diğer bilimlerle birlikte geliştirilecektir. Bundan sonra eski dünyadan Ramanujan gibi bir mucize hariç tutulursa küçük melodiler dışında hemen hiçbir ses gelmeyecektir.

Daha sonra dördüncü adımda artık söz Avru-

1 MÖ 700'lerde yaşamış Yunan şairi. Didaktik (öğretici) şiirin yaratıcısı olarak bilinir.

2 MÖ 570-475 yılları arasında yaşamış, Pisagor'un (≈569-≈475) öğrencisi olmuş ve Pisagor'un okulunda öğretmenlik yapmış Yunan şair ve filozofu.

3 Yunan filozof ve tarihçisi.

pa'nındır. İslam uygarlığı aracılığıyla daha eski dönemi ve özellikle Yunan matematiğini tanıyan Batı bundan sonra bayrağı günümüze kadar hep elinde tutacaktır. Kendisinden önceki dönemde de olduğu gibi bu atılımda çeviri büyük rol oynayacaktır; bu kez Arapçadan Latinceye.

Ortaçağ'dan başlayarak birçok matematikçi ve düşünür matematiği sürekli geliştirir ve yeni alanlar ortaya çıkar. Descartes (1596-1650) "La Géométrie"de analitik geometriyi geliştirir. Newton "Principia"da hareketi ve yerçekimini analiz eder. Newton'un çağdaşı Leibniz (1646-1716) ise tüm insan düşüncesini matematiksel ve evrensel bir dile, *Lingua characteristica*'ya çevirmeye kalkışır. İkilinin çalışmalarının sonucu "Calculus"tür. Aynı zamanda Leibniz'in yöntemi ve yaklaşımı çok daha sonraları Gödel tarafından da kullanılmış, ayrıca Russell ve Whitehead'in matematiği mantığa indirgeme çalışmalarının esin kaynağını oluşturmuştur.

Abel (1802-1829), Galois (1811-1832), Euler (1707-1783), Gauss (1777-1855), Lobachevsky (1793-1856), Riemann (1826-1866), Boole (1815-1864), Lagrange (1736-1813), Cauchy (1789-1857), Cantor (1845-1918), Dedekind (1831-1936), Frege (1848-1925), Poincaré (1854-1912), Hilbert (1862-1943), Russell (1872-1970), Whitehead (1861-1947), Gödel (1906-1978), von Neumann (1903-1957), Turing (1912-1954) gibi bir çok dehanın geliştirerek günümüze getirdikleri matematik artık evrenin daha gerçek bir fotoğrafını çekmede en uygun dildir. Newton'un mekaniği, Maxwell'in elektromanyetizması, Einstein'ın 1916 genel göreceliği ve geçen yüzyılın başında geliştirilmeye başlanan kuantum mekaniğinde kullanılan dil hep matematiktir. Yirminci yüzyılda artık gördüğümüz nesnelere ardında göz önünde canlandırılmayan başka bir dünya vardır ve bu dünyaya ancak matematikle ulaşılabilir.

Ancak matematik birçok kişinin zannettiği gibi yalın, soyut, soğuk, mekanik, kaba ve estetikten yoksun işlemler dizisi değildir. Aksine şeylerdeki veya durumlardaki estetiği, eğer derinlemesine bakabiliyorsak, matematik daha çok ortaya çıkarır. Hardy, matematikle yalnızca yaratıcı bir sanat dalı olduğu için ilgilendiğini yazar ve bu anlayışını daha ileri götürür (1940): *Yunan matematiği kalıcı, hatta Yunan edebiyatından bile daha kalıcıdır. Aeschylus'unutulsa bile Archimedes hatırlanacaktır; çünkü konuşma dilleri ölür, ama matematiksel*

*düşünceler kalıcıdır. Ölümsüzlük saçma bir sözcük olabilir; ancak anlamı ne olursa olsun, ona erişmek için en şanslı olanlar matematikçilerdir.*

Bu bakımdan şairle matematikçi aynı soydandırlar. On dokuz ve yirminci yüzyıllar parlak gelişmelere sahne oldukları kadar yeni tartışmaların ve bunalımların da yüzyıllarıdır.

Bu bunalımlardan biri yüzyıllarca geçerliliğini korumuş, Kant'ın *a priori* bilgiye örnek verdiği, Newton'un tüm çalışmalarının temelini oluşturan Öklid geometrisinin Gauss, Riemann, Lobachevski ve Bolyai tarafından sadece olasılıklardan biri olduğunun fark edilmesi ve daha sonra fraktal geometriye kadar birçok yeni geometrinin ortaya çıkmasıdır.

Bunu, yine Batı'da yüzyıllarca mutlak doğru kabul edilmiş, "üçüncü halin olmazlığına ilişkin" kuralı da içeren Aristo mantığının dışında, başka tutarlı mantıkların da olabileceğinin gösterilmesi izlemiştir. Her önerme için doğru veya yanlış gibi iki değil yedi kategori kabul eden Hintli Cayna'cılar hafızalardan silinmiş olsa da 1920'lerde Łukasiewicz, Tarski ve Post (1897-1954) gibi mantıkçılar iki değerli olmayan tutarlı mantıkların olabileceğini göstermişlerdir. Barrow, *çatısı altına aldığı tüm olası mantıkları özel ya da sınırlı vakalar olarak gösteren bir süper mantık yok gibi görünmektedir* demektedir.

Aynı durum değindiğim gelişmelere paralel şekilde görecelik kuramında ve kuantum fiziğinde de izlenir. Ama geometride ortaya çıkan bunalım Einstein için yeni bir açıdır ve buradan aldığı kavram ve sembollerle dört boyutlu bir uzay-zaman inşa ederek evrenin sınırlarına yelken açar. Newton artık yerel kalmıştır.

Bohr'un, Heisenberg'in, Planck'ın, Dirac'ın, de Broglie'nin ve Schrödinger'in ikili ve belirsizliklerle dolu dünyaları ise klasik mantık ve geometrinin ötesindedir. Heisenberg bu durumu şöyle değerlendirir: *Bir insanın Newton fiziğinin aksiyomatikinden farklı ama tutarlı bir şemaya gereksinimi olduğunu tam olarak ne zaman idrak ettiğini söyleyemem. Bu o kadar basit değil. Sanırım, elinizde tutarlı bir şeyler olmadan doğayı hemen hemen hiç tanımlayamayacağımız ve eski klasik fizikten tamamen farklı bir aksiyomatik sistemi ve yine eskisinden farklı bir mantık sistemini kullanmak zorunda kalabileceğimiz fikri birçok fizikçinin beyininde ancak yavaş yavaş olgunlaştı. Ancak bu ol-*

gunlaşan fikir yeni fiziğin önünü açacaktır. Artık çağ, Dirac'ın değişiyi, denklemlerin sahiplerinden daha akıllı olduğu bir çağdır.

1900'lerde paradokslar matematikçileri meşgul eder ve nihayet Alfred Tarski, mantıksal olarak tutarlı olan bir dilin semantik (anlamsal) yönden zorunlu bütünselliğe sahip olamayacağını gösterir ve metadil kavramını ortaya atar. Russell ve Whitehead, Principia'da matematiği paradokslardan arınmış bir mantık üzerine temellendirmeye çalışırlar. Hilbert ise daha kapsamlı bir proje tasarlayarak aksiyomların ve bunlardan çıkarılabilecek tüm sonuçların tutarlılıklarının kanıtlanmasına çalışır, iddialı bir ifadeyle şöyle seslenir: *İşte problem! Çözümünü ara. Saf düşünceyle bulabilirsiniz onu, çünkü matematikte bilinmez diye bir şey yoktur! Bilmek zorundayız. Bileceğiz.* Son cümlesi *Wir müssen wissen, wir werden wissen* bugün mezar taşına yazılıdır, ama tasarısı 1931'de Kurt Gödel'in 25 sayfalık bir makalesiyle sona erer: Hilbert'in amaçlarına hiçbir zaman ulaşamayacaktır.

Nihayet 1976'da Appel ve Haken, teorem kanıtlamada bilgisayarlardan yararlanma yolunu açarlar. Bu yöntem sadece matematikçiler değil felsefeciler arasında da geniş tartışmalara yol açar. King gibi bazıları böyle bir geleceği hoş karşılamazlar; kendi deyişiyi: *Bu zerafetten yoksun, çarpık bir matematik olur, doğruluk böyle bir dünyada yaşamayı seçebilir, ancak güzellik bunu istemez. Orada matematiğin sanatsal yönü, Prospero'nun ruhları gibi uçar gider. Öyle bir Brave New World'de sihirbazlar parmaklarını şıkırdatırlar; matematikçiler de şair olmaktan çıkıp marangozluk yaparlar.*

Günümüzde, sınırlı olduğu anlaşılan ancak içerdiği potansiyel güçle belki kendi sınırlarını da sonsuza dek genişletebilecek devasa bir matematiksel yapı ellerimizde durmaktadır. Bu yapının yanında Mısır piramitleri bile çöldeki kum taneleri gibi kalmaktadırlar. Paradokslarına, çözümsüz problemlerine, konstrüktif matematik savunucularının sezgicilerle kavgalarına, mantık ve semantik sorunlarına rağmen matematik hâlâ yolumuzu aydınlatmakta ve açmaktadır. Yaşamımızı kolaylaştıran veya zorlaştıran teknolo-

jik gelişmeler hep matematikle mümkündür.

Matematiğin bu gizil gücü muhtemelen niteliğinden kaynaklanmaktadır. Ancak bu bakımdan matematikçiler ve felsefeciler arasında bir uzlaşma olduğunu söylemek zordur. Bu duruma ilişkin olarak Hardy şu değerlendirmeleri yapmaktadır: *Matematiksel gerçeğin niteliği [...] bazılarına göre zihinseldir ve onu bir bakıma biz yaratırız; diğerleri ise bizim dışımızda ve bizden bağımsız olduğu kamsındadır. Matematiksel gerçeğin ne olduğunu, inandırıcı bir biçimde açıklayabilecek bir kimse metafiziğin en zor problemlerinin çoğunu çözmüş olurdu. Eğer bu açıklamanın içine bir de fiziksel gerçeği katabilseydi, yanıtlanmamış soru kalmazdı... Benim inancıma göre, matematiksel gerçeklik bizim dışımızdadır; bizim işlerimiz onu bulup çıkarmak ya da gözlemlemektir; ispatladığımızı ya da tumturaklı sözlerle yarattığımızı söylediğimiz teoremler; gözlemlerimizden çıkardığımız sonuçlardan ibarettir... Bir iskemle veya yıldız hiç de görüldüğü gibi değildir; üzerlerinde ne kadar çok düşünürsek, görüntüleri de, duyularımızdan kaynaklanan bir sis içinde, o ölçüde netliğini kaybeder, bulanıklaşır. Buna karşılık 2 veya 317'nin duyularla bir ilişkisi yoktur; yakından incelediğimiz ölçüde özellikleri daha da berraklaşır. Modern fiziğin idealist felsefe çerçevesine çok daha iyi uyduğu söylenebilir. Ben o konuda değilim, ama öyle olduğunu söyleyen ünlü fizikçiler de vardır. Öte yandan pür matematik, tüm idealizmin çarpıp battığı kayadır. 317 bir asaldır, biz öyle düşünmüyoruz diye veya kafa yapımız şu ya da bu şekilde olduğu için değil; çünkü öyledir, çünkü matematiksel gerçeğin yapısı budur.*

Matematiksel gerçeğin niteliği her ne olursa olsun, evrensel bir dil, belki de biraz önceki alıntıdan aktardığım şekliyle evrenin dili olmasının sonucu olarak ortaya çıkan büyük başarısı matematikçiyi, özellikle de pür matematikçiyi, yaptını ve kendini yüceltmeye kadar götürür. Bunun en tipik örneklerinden biri Hardy'dir, şöyle yazar:

*Sonuçta iki tür matematik vardır: gerçek matematikçilerin gerçek matematiği ve daha iyi bir sözcük bulamadığım için "önemsiz" dediğim matematik, önemsiz matematik Hogben'in ve onun ekolünden olan diğer yazarların*



Alfred Tarski

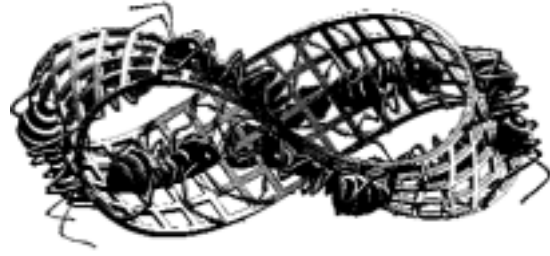


Whitehead



Kurt Gödel

hoşlandıkları tür tartışmalarla savunulabilir. Gerçek matematik için ise böyle bir savunma sözkonusu değildir; o savunulacaksa ancak bir güzel sanat olarak savunulabilir... Sıradan kişilerce kullanılabilen matematik önemsenmeye değmez; ekonomistler veya sosyologlar tarafından kullanılan matematik ise bilim düzeyine pek ulaşmaz. Whitehead'ın matematiği astronomi ve fiziği derinden, felsefeyi de bir hayli etkileyebilir, ama başka herhangi bir şeye en ufak etkisi yoktur. Onun muazzam etkisi genelde insanlar üzerinde değil, Whitehead'ın kendisine benzeyen insanlar üzerindedir.



Escher'in bir yapıtı

ve daha pek çokları Euclid ötesi geometrilerin, Gödel'in, Heisenberg'in, Schrödinger'in evrenlerinden etkilenmiş ve bu evrenlere kendi alanlarından derin sondajlar gerçekleştirmişlerdir.



Escher'den bir yapıt

Matematik yirminci yüzyılda sadece diğer bilim alanlarını ve felsefeyi etkilemekle kalmamış, görecelik ve kuantum teorilerinin de katılımıyla tüm çağdaş düşün dünyasını ve sanatı da etkilemiştir.

Müzikte Webern, Ligeti, Varèse; edebiyatta Hinton, Calvino, Stanislaw Lem; resimde Kandisky, Klee, Matisse, Picasso, Escher

Kuşkusuz matematiğin dünyasına girmek büyük sabır, çaba ve yetenek ister. Yüzyıllar önce Euclid'in dediği gibi *Geometriye giden bir kraliyet yolu yoktur*. Ancak bu çaba, önümüzde açacağı ufuklar düşünülürse, buna değecektir.

Matematiksiz ülke Türkiye'de, Türkiye'yi yöneten ve bilim politikalarını şekillendirenlerin bir gün matematiğin anlamını kavrayacaklarını umuyorum.

Saygılarımla. ♥

$$\begin{aligned}
 P(t, x) &= pP(t - \Delta t, x - \Delta x) + qP(t - \Delta t, x + \Delta x) \\
 P(t, x) &= pP(t, x) - p \frac{\partial P}{\partial t} \Delta t - p \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x + qP(t, x) - \\
 &\quad - q \frac{\partial P}{\partial t} \Delta t + q \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x + p \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \Delta t^2 + \frac{p \partial^2 P}{2 \partial t^2} \Delta t^2 \\
 &\quad + p \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Delta x^2 \cdot \frac{1}{2} - q \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial x} \Delta t \Delta x + \frac{q \partial^2 P}{2 \partial t^2} \Delta t^2 \\
 &\quad + \frac{q \partial^2 P}{2 \partial x^2} \Delta x^2 + p \frac{\partial^3 P}{\partial t^2 \partial x} \Delta t \Delta x^2 - q \frac{\partial^3 P}{\partial t \partial x^2} \Delta t^2 \Delta x + \dots \\
 \frac{\partial P}{\partial t} &= -(p - q) \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + (p - q) \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \Delta t + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Delta x^2 \right) \\
 \Delta t \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0 \\
 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (p - q) \frac{\Delta x}{\Delta t} &= A, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (p - q) \Delta x = 0, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \Delta t = 0 \\
 \frac{\partial f}{\partial t} &= -A \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{B}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned}$$

