# Geometri Köşesi

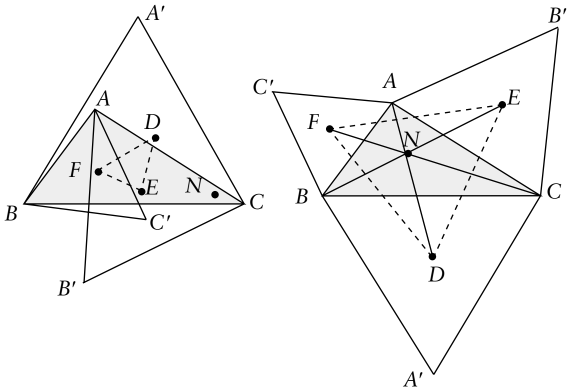
Mustafa Yağcı
*yagcimustafa@yahoo.com*

## Napoléon ve Van Aubel Teoremleri

Napoléon'un bilimi ve matematiği sevdiği, hatta bir ölçüde yetenekli olduğu da bilinir. Dünyayı fethetmeye çalışmaktan ve imparatorluk mesleğinden arta kalan zamanlarında, sürekli yanında bulundurduğu bilim adamları ve matematikçilerle sohbet eden Napoléon, Mısır seferine ayrıca bir de ansiklopedi görevini üstlenecek bir bilim adamı ordusu götürmüş. Napoléon'un kanıtladığı söylenen ancak birçok kişinin bundan kuşku duyduğu bir teorem vardır. Çok ilginç ve şaşırtıcı bir teoremdir:

Napoléon, ressamı David'in fırçasından

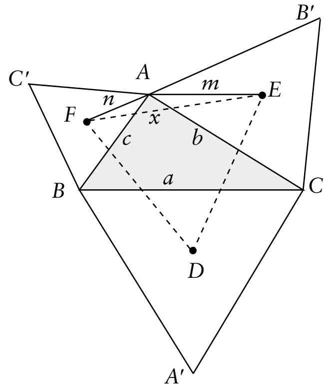
Herhangi bir üçgen alın. Üçgenin üç köşesinin üstüne, ister üçgenin dışına doğru ister içine doğru birer eşkenar üçgen çizin. Bu çizdiğiniz üç eşkenar üçgenin merkezleri gene bir eşkenar üçgen oluşturacaktır!




**Napoléon Teoremi.** *Bir ABC üçgeninin üç kenarı üzerine üçgenin içine/dışına doğru şekildeki gibi BA′C, CB′A ve AC′B eşkenar üçgenleri yerleştirilirse ve bu üçgenlerin ağırlık merkezleri sırasıyla D, E ve F ise DEF üçgeni de eşkenardır. Ayrıca AD, BE ve CF doğruları noktadaştır.*

Doğruların kesiştikleri noktalara sırasıyla **Birinci ve İkinci Napoléon Noktası** denir ve genellikle $N$ ve $N'$ harfleriyle gösterilir. Soldakine **Birinci Napoléon Üçgeni** veya **İç Napoléon Üçgeni**, sağdakine de **İkinci Napoléon Üçgeni** veya **Dış Napoléon Üçgeni** denir.

**Trigonometrik Kanıt:** Dış Napoléon üçgeninin eşkenar olduğunu kanıtlamakla yetineceğiz. İç Napoléon üçgeninin eşkenar olduğunun kanıtını okurlara bırakıyoruz.




$ABC$ üçgeninde $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AE = m$, $AF = n$, $FE = x$ ve $ABC$ üçgeninin alanı $\Delta$ olsun. $AF$ ve $AE$ içinde bulundukları eşkenar üçgenlerin içaçıortay doğruları olduklarından $m(FAB) = m(EAC) = 30^\circ$ dir. O halde $m(FAE) = A + 60^\circ$. $FAE$ üçgeninde kosinüs teoreminden,

$$x^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos(A + 60^\circ) \qquad (1)$$

bulunur. $m$ ve $n$ uzunlukları, içinde bulundukları eşkenar üçgenlerin yüksekliklerinin 2/3'ü olduğundan

$$m = (2/3)\times(b\sqrt{3}/2) = b/\sqrt{3}$$

ve

$$n = (2/3)\times(c\sqrt{3}/2) = c/\sqrt{3}$$

tür. Bu değerler (1) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$3x^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A + 60^\circ) \qquad (2)$$

elde edilir.

$$\cos(A + 60^\circ) = \cos(A)\cos(60^\circ) - \sin(A)\sin(60^\circ)$$
$$= \cos(A)/2 - \sqrt{3}\sin(A)/2$$

değeri (2)'de yerine yazılırsa

$$3x^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,[\cos(A)/2 - \sqrt{3}\sin(A)/2]$$

elde edilir ki, düzenlenirse,

$$3x^2 = b^2 + c^2 - bc\cos(A) + \sqrt{3}bc\sin(A) \quad (3)$$

olur.

Diğer yandan $ABC$ üçgeninde kosinüs teoreminden çıkan

$$-bc\cos(A) = (1/2)(a^2 - b^2 - c^2)$$

ve gene $ABC$ üçgeninde alan formülünden çıkan

$$bc\sin(A) = 2\Delta$$

değerleri (3)'te yerine yazılıp formül düzenlenirse

$$3x^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\Delta\sqrt{3}$$

bulunur. Bu eşitliğin $a$, $b$, $c$ değerlerine göre simetrik olması, bize aynı işlemlerin $FD$ ve $ED$ kenarlarına göre yapılırsa da aynı sonucun elde edileceğini anlatıyor. Demek ki $EF = FD = DE$ ve $DEF$ üçgeni eşkenardır.

Her ne kadar kanıt tamamlanmış olsa da Michael Lambrou'nun (2) eşitliğinden sonra saptığı farklı yola göz atmakta fayda var.

(2) eşitliğinin sağ tarafının $B'B^2$ olduğuna dikkat ediniz, çünkü $ABB'$ üçgeninde $m(BAB') = A + 60°$, $BA = c$ ve $AB' = b$. O halde

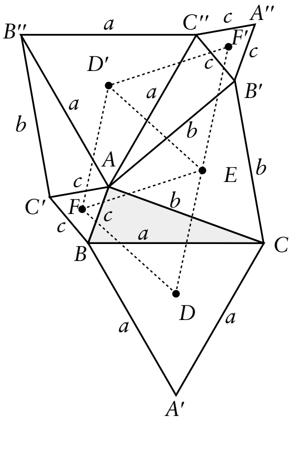
$$\begin{aligned} 3x^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(A + 60°) \\ &= B'B^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C + 60°) \\ &= 3ED^2 = A'A^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B + 60°) \\ &= 3DF^2 = C'C^2. \end{aligned}$$

Dolayısıyla $EF = ED = DF$ ve ek olarak

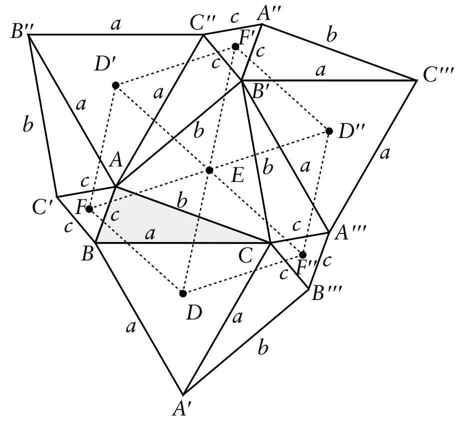
$$A'A = B'B = C'C.$$

Bunu zaten geçen sayıda Fermat-Toricelli Noktası başlıklı yazıda kanıtlamıştık. Napoléon Teoremi'nin son tümcesi de o yazıda [MD-2004-I, sayfa 59] kanıtlanmıştı. □

**Sentetik Kanıt:** $ABC$ üçgeninin kenarları üzerine ve üçgenin dışına doğru şekildeki gibi $BA'C$, $CB'A$ ve $AC'B$ eşkenar üçgenlerini yerleştirelim.



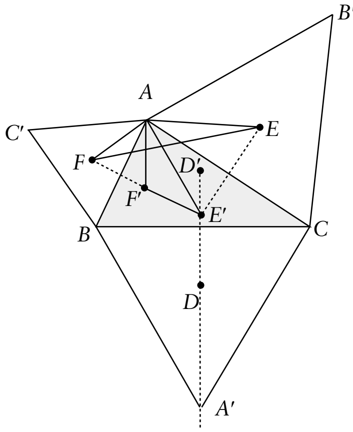

Ağırlık merkezleri de sırasıyla $D$, $E$, $F$ olsun. $AC = AB'$ olduğundan $ABC$ üçgenini $B'C''A$ üçgeninin bulunduğu yere kopyalayabiliriz. Sonra bu üçgenin de kenarları üzerine üçgenin dışına doğru $B'A''C''$ ve $C''B''A$ eşkenar üçgenlerini inşa edelim. Bu üçgenlerin de ağırlık merkezleri sırasıyla $F'$ ve $D'$ olsun. $B''A = BC$, $C'A = AB$ ve, kolayca görüleceği üzere, $m(B''AC') = m(ABC)$ olduğundan, oluşan $C'AB''$ üçgeninin $ABC$ üçgeniyle eş olduğuna dikkat ediniz. O halde $B''C' = b$'dir. Benzer şekilde $B'C = AC$ olduğundan, $ABC$ üçgenini $CA'''B'$ üçgeninin bulunduğu yere kopyalayalım ve bu üçgenin de kenarları üzerine birer eşkenar üçgen konuşlandıralım.




Şimdi elimizde ilk başladığımız üçgenden 6 tane var. Bu 6 üçgen tıpatıp aynı olduğundan, kenarları üzerine yapıştırılan eşkenar üçgenler de diğerleriyle aynı durumdadır, yani her yerde ilk şeklin kaydırılmış hali gibi düşünebileceğimiz şekiller oluştu. İlk başladığımız $ABC$ üçgeninde kenar uzunlukları $a$ ve $c$ olan eşkenar üçgenlerin merkezleri arasındaki uzaklık, diğer $ABC$ üçgeni eşlerinde de kenarları üzerine yapıştırılan eşkenar üçgenlerin kenarları $a$ ve $c$ olanlarınınkinin merkezleri arasındaki uzaklığın eskisi ile aynı olmasını beklemek hakkımız. O halde $DF = FD' = D'F' = F'D'' = D''F' = F''D$. Yani $DFD'F'D''F''$ bir eşkenar altıgen. Yetmez, biz eşkenar değil düzgün altıgen bekliyorduk. Şimdi de kenar uzunlukları $b$ ve $c$ olan eşkenar üçgenlerin merkezleri arasındaki uzaklıkları eşitleyelim; benzer şekilde $a$ ve $b$ olanlarını da. Buradan da $EF = EF' = EF''$ ve $ED = ED' = ED''$ olduğu çıkar. Bir köşesi $E$ olan tüm üçgenlerin üçer kenarının eşit olduğunu bulmuş olduk. Bu 6 üçgenin de $E$ açılarının ölçüleri eşit olduğundan her biri 60°'dir. O halde $DFD'F'D''F''$ bir düzgün altıgen ve dolayısıyla $DEF$ bir eşkenar üçgendir. □

**Teorem.** *Dış Napoléon üçgeniyle iç Napoléon üçgenlerinin alanlarının pozitif farkı ABC üçgeninin alanına eşittir.*

**Kanıt:** Herhangi bir $ABC$ üçgeni çizelim. Alanı $\Delta$ olsun. $DEF$ üçgeni de bu üçgenin dış Napoleon üçgeni olsun. $D$, $E$, $F$ noktalarının sırasıyla $BC$,




$CA$, $AB$ kenarlarına göre simetrikleri olan $D'$, $E'$, $F'$ noktaları da iç Napoléon üçgeninin köşeleri olurlar elbette. Her iki Napoléon üçgeninin de eşkenar olduğunu biliyoruz. O halde $FE$ ve $F'E'$ uzunluklarını bulabilirsek, üçgenlerin alanlarını da buluruz. $FAE$ açısının ölçüsünün $A + 60°$ olduğu aşikâr, o halde, simetriden dolayı, $F'AE'$ açısının ölçüsü de $A - 60°$ dır.

$$3FE^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A + 60°)$$

eşitliğini Napoléon Teoremi'nin trigonometrik kanıtında bulmuştuk. Benzer şekilde $F'AE'$ üçgeninde kosinüs teoreminden

$$3F'E'^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A - 60°)$$

eşitliği çıkar. Bu iki eşitlik birbirinden çıkarılırsa,

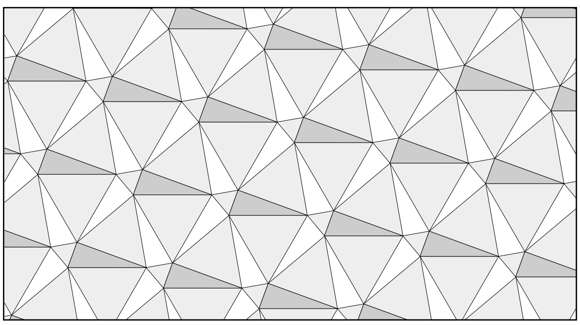
$$\begin{aligned} FE^2 - F'E'^2 &= \\ &= 2bc[\cos(A - 60°) - \cos(A + 60°)]/3 \\ &= (4/3)bc\sin(A)\sin(60°) \\ &= 2bc\sin(A)/\sqrt{3} = 4\Delta/\sqrt{3} \end{aligned}$$

bulunur. $DEF$ ve $D'E'F'$ birer eşkenar üçgen olduğundan alanları birbirinden çıkarılırsa

$$(\sqrt{3}/4)(FE^2 - F'E'^2) = \Delta$$

çıkar. □

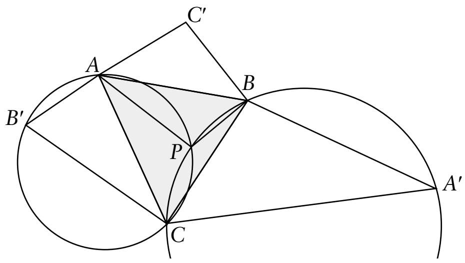
Sanki bu haliyle yeterince ilginç değilmiş gibi, Napoléon Teoremi genelleştirilebilir. Eşkenar üçgenler inşa edeceğimize, benzer üçgenler inşa edelim.



Resimde görülen mozaik kaplama Napoléon Teoremi'nden elde edilmiştir. Koyu gri üçgen, herhangi bir üçgen. Bu üçgenin üç kenarına eşkenar üçgenler (açık gri) yerleştirdik ve bu dört üçgenden elde ettiğimiz figürü tüm düzlemi kaplayacak biçimde kaydırıp yapıştırdık.

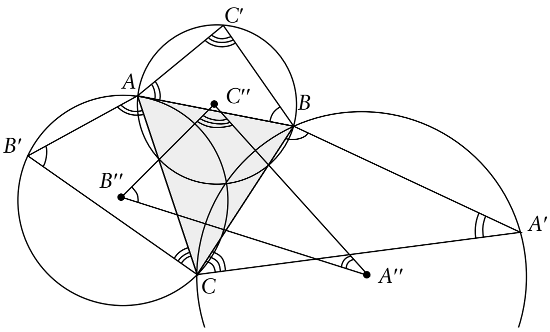
**Napoléon Teoremi'nin Genellemesi.** *Bir $ABC$ üçgeninin üç kenarı üzerine üçgenin dışına doğru, $A' + B' + C' = 180°$ olacak şekilde $A'BC$, $AB'C$ ve $ABC'$ benzer üçgenleri yerleştirilsin. O zaman, bu üçgenlerin çevrel çember merkezlerinden oluşan üçgen de bu üçgenlere benzer olur. Ayrıca, bu üç çevrel çemberin ortak bir noktası vardır.*

Jan Op De Beeck'in kaleminden Napoléon




Teorem, aşağıdaki önsavın doğrudan bir uygulaması olacak:

**Önsav.** *Bir $ABC$ üçgeninin üç kenarı üzerine üçgenin dışına doğru $A'BC$, $AB'C$ ve $ABC'$ üçgenleri yerleştirelim. $A'$, $B'$, $C'$ açılarının toplamı* 180° *olsun. O zaman yerleştirilen üçgenlerin çevrel çemberlerinin geçtiği ortak bir nokta vardır. Ayrıca, eğer $A'BC$, $AB'C$ ve $ABC'$ benzer üçgenlerinin çevrel çember merkezleri sırasıyla $A''$, $B''$ ve $C''$ ise, oluşan $A''B''C''$ üçgeninin $A''$, $B''$ ve $C''$ açıları sırasıyla $A'$, $B'$ ve $C'$ açılarına eşittir.*

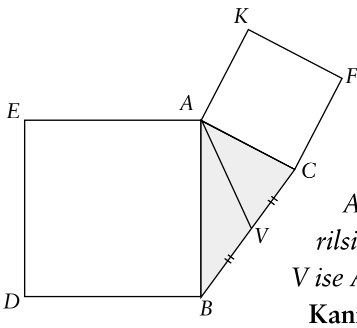



**Kanıt:** $B'AC$ ve $CBA'$ üçgenlerinin çevrel çemberlerini çizelim. $C$ dışında kesiştikleri ikinci nokta $P$ olsun. $B'APC$ ve $A'BPC$ dörtgenleri birer kiriş dörtgeni olur. O halde $m(APC) = 180° - m(B')$ ve $m(BPC) = 180° - m(A')$ olmalıdır. Bu da $m(APB) = m(B') + m(A')$ olmasını gerektirir. $m(A') + m(B') + m(C') = 180°$ olarak verildiğinden $C'APB$ dörtgeninde karşılıklı açıların ölçüleri toplamı 180° çıkar ki bu da bir kiriş dörtgeni olduğunu anlatır. Sonuç olarak bu dörtgenin çevrel çemberi de $P$ noktasından geçer. Böylece önsavın birinci kısmı kanıtlanmış oldu.

$B''C''$ doğrusu $AB''P$ açısının, $B''A''$ doğrusu da $PB''C$ açısının açıortayı olduğundan $m(C''B''A'') = m(AB''C)/2 = m(AB'C)$ ve benzer şekilde $m(C''A''B'') = m(BA''C)/2 = m(BA'C)$, $m(A''C''B'') = m(BC''A)/2 = m(BC'A)$. □

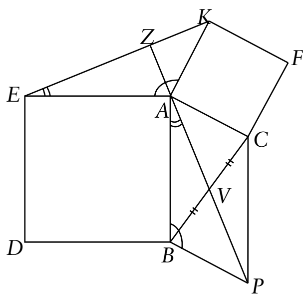
Genelleştirilmiş Napoléon Teoremi doğrudan bu önsavdan çıkar. Yukarıdaki şekil her şeyi söylüyor.

Napoléon Teoremi'nde bir üçgenin kenarlarına birer üçgen yerleştirince yerleştirilen üçgenlerin farklılığına bağlı olarak nelerin oluştuğuna değindik. Şimdi de bir üçgenin kenarları üzerine üçgenin içine veya dışına doğru kareler yerleştirildiğinde neler oluştuğuna göz atacağız.




**Teorem.** *$ABC$ üçgenin $AB$ ve $AC$ kenarları üzerine üçgenin dışına doğru birer $ABDE$ ve $ACFK$ kareleri yerleştirilsin. $BC$'nin orta noktası $V$ ise $AV = EK/2$ ve $AV \perp EK$.*

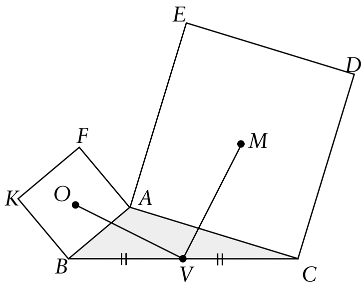
**Kanıt:** $AV$ doğru parçasını $V$ yönünde kendi boyu kadar uzatırsak bir $ABPC$ paralelkenarı elde ederiz. $EAK$ açısıyla $BAC$ açısı bütünler, $BAC$ açısıyla da $ABP$ açısı bütünler olduğundan $m(EAK) = m(ABP)$'dir. Aynı zamanda $EA = AB$ ve $AK = AC = BP$ olduğundan, $EAK$ ile $ABP$ üçgenleri eştir. Buradan $AP = EK$ yani $AV = EK/2$ çıkar.



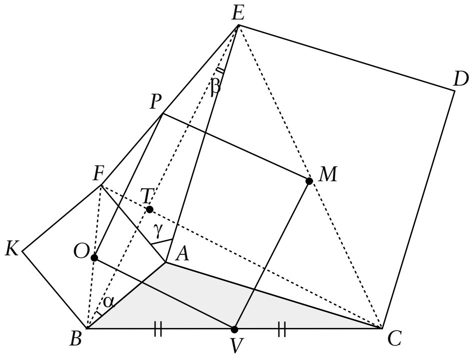

Şimdi teoremin ikinci kısmına geçelim. $PA$ doğrusunun $EK$'yi kestiği yere $Z$ dersek; $m(PAB) + m(ZAE) = 90°$ ve $m(PAB) = m(AEZ)$ olduğundan, $AV \perp EK$. □

Şimdi birçok önemli sonucun bulunmasına yol açmış, ayrıca kendi başına da önemi olan bir teoremi vereceğiz. Daha sonra buradan doğan bazı sonuçları kanıtlayacağız.

**Bottema Teoremi.** *Herhangi bir $ABC$ üçgeninin $AB$ ve $AC$ kenarları üzerine üçgenin dışına doğru $M$ merkezli $ACDE$ ve $O$ merkezli $BAFK$ kareleri yerleştirilsin. $BC$ kenarının orta noktası $V$ ise $OV = VM$ ve $OV \perp VM$'dir.*



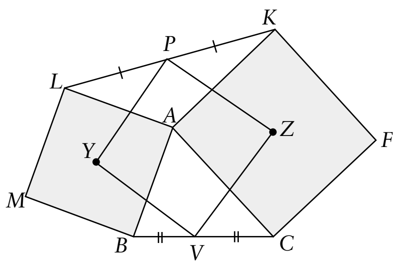

**Kanıt:** $FC$ ve $BE$ doğru parçaları çizilirse $FA = BA$, $EA = CA$ ve $m(FAC) = m(BAE)$ olduğundan $FAC$ ile $BAE$ üçgenleri eştir. O halde $FC = BE$. Öte yandan, $FBC$ üçgeninde $OV$, $ECB$ üçgeninde $MV$ orta tabandır. Demek ki $OV = FC/2$ ve $MV = EB/2$. Bundan, $OV = VM$ çıkar. Diğer yan-




dan $EAB$ üçgeninde içaçıların ölçüleri toplamından $\alpha + \beta + \gamma = 90°$ olur ki bu $FAET$ konkav dörtgeninde yerine yazılırsa $m(FTE) = 90°$ olduğu görülür. Böylece $OV \perp VM$ de kanıtlanmış olur. □

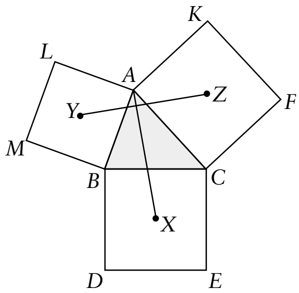
**Bottema Teoremi'nin Sonuçları**

**Finsler-Hadwiger Teoremi.** *$A$ köşeleri ortak ama birbirlerini kesmeyen $Z$ merkezli $ACFK$ ve $Y$ merkezli $ABML$ karelerini yandaki şekildeki gibi yerleştirelim. $BC$'nin orta noktası $V$ ve $LK$'nin orta noktası $P$ ise $YVZP$ bir karedir.*



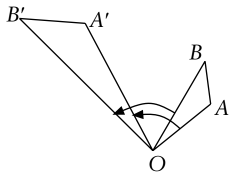

**Kanıt:** Bottema Teoremi'ne göre, $BAC$ üçgeninde $YV = VZ$ ve $YV \perp VZ$. Gene Bottema Teoremi'ne göre, $AKL$ üçgeninde $PZ = PY$ ve $PZ \perp PY$. O halde $YVZP$ bir karedir. □

**Van Aubel Teoremi 1.** *Bir $ABC$ üçgeninin üç kenarı üzerine dışa doğru $X$ merkezli $BCDE$, $Z$*



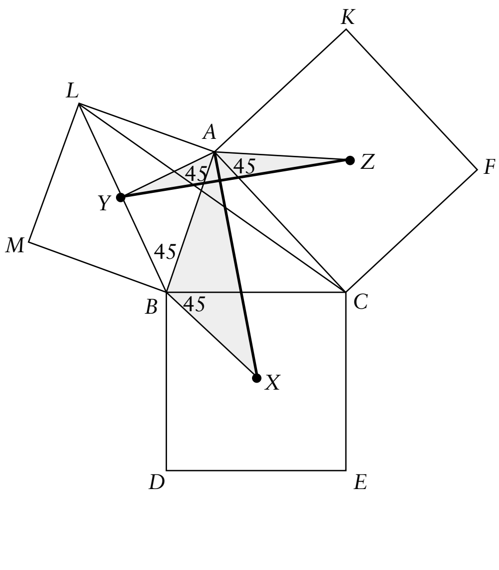

*merkezli CAKF ve Y merkezli ABML kareleri yerleştirilsin. O zaman AX = YZ ve AX ⊥ YZ.*

Kanıta geçmeden önce kanıtta kullanacağımız kavramı açıklayalım. Düzlemin noktalarını, önceden verilmiş bir $O$ noktası etrafında $q$ derece döndürüp, sonra $O$'ya olan uzaklığını belli bir $r$ katsayısıyla çarpmaya, **genlenik döndürü** (rotasyon) diyeceğiz. Düzlemin bu dönüşümünü $O(r, q^o)$ ile gösterelim.



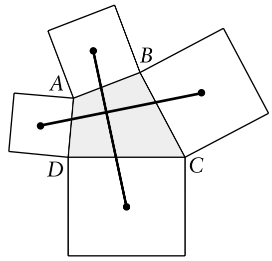

Burada $O$ **döndürü merkezi**, $r$ **genleme** (büyüme ya da küçülme) **katsayısı**, $q^o$ de **dönme açısı**dır. Eğer dönme saat yönünde yapılırsa açı negatif, saat yönünün tersine yapılırsa pozitif olarak alınır. Eğer $AOB$ üçgeni $O(r, q^o)$ genlenik döndürüsü altında $A'OB'$ üçgenine dönüşüyorsa, $B'O = r \times BO$, $A'O = r \times AO$ ve $m(B'OB) = m(A'OA)$ olduğundan şöyle bir bakınca *K-A-K* benzerliğinden başka bir şey yapılmadığı da belli! Sanırım böyle daha bilimsel oluyor! Şimdi Von Aubel Teoremi'nin kanıtına geçebiliriz.

**Van Aubel Teoremi 1'in Kanıtı:** $BC = \sqrt{2} \times BX$, $BL = \sqrt{2} \times BA$ ve $m(ABX) = m(LBC)$ olduğundan $B(\sqrt{2}, 45^o)$ genlenik döndürüsü $ABX$ üçgenini $LBC$ üçgenine dönüştürür. Benzer şekilde $AL = \sqrt{2}AY$, $AC = \sqrt{2}AZ$ ve $m(ZAY) = m(CAL)$ olduğundan $A(\sqrt{2}, -45^o)$ genlenik döndürüsü de $ZAY$ üçgenini $CAL$ üçgenine dönüştürür. $LBC$ ve $CAL$ üçgenlerinde $LC$ kenarının ortak olması, dönüşümden önce $AX$ ve $YZ$ doğru parçalarının boylarının eşit olduğunu söyler, çünkü $LC$ hem $AX$'in hem de $YZ$'nin $\sqrt{2}$ katıdır. Demek ki $AX = YZ$. Ayrıca, $45^o + (-45^o) = 0^o$ olması da doğruların dönüşümden önce birbirlerine dik olduklarını söyler, çünkü biri saat yönünde diğeri saat yönünün tersinde $45^o$ dönmüş ve çakışmışlar, demek ki dönmeden önce aralarındaki açının ölçüsü $90^o$ imiş. □

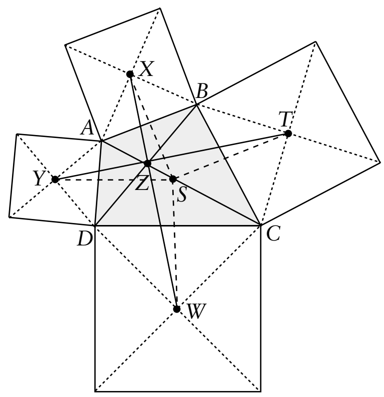



Şimdi de kareleri bir dörtgenin kenarları üzerine inşa edeceğiz.

**Van Aubel Teoremi 2.** *Bir ABCD dörtgeninin tüm kenarları üzerine dörtgenin dışına doğru birer kare yerleştirilsin. Bu karelerin ağırlık merkezlerini karşılıklı olarak birleştiren doğru parçaları hem eşit uzunluktadır hem de birbirlerini dik keser. Aynı zamanda kesiştikleri nokta ABCD dörtgeninin köşegenlerinin kesiştiği nokta olup, BD köşegeninin orta noktasıdır.*




**Kanıt:** Bir sonraki şekilden izleyelim. Önce $XW$ ile $YT$ doğru parçalarını çizelim. Arakesitine $Z$ diyelim. $AC$ köşegeninin orta noktası da $S$ olsun. Bottema Teoremi'ni $ABC$ üçgenine uygularsak, $SX = ST$ ve $SX \perp ST$ dir. Durmayalım, bir de $CDA$ üçgenine uygulayalım. $SW = SY$ ve $SW \perp SY$ olmalı-




dır ve olur da! $SX = ST$, $SW = SY$ ve $m(XSW) = m(TSY)$ eşitliklerinden $XSW$ üçgenine modaya uyarak $TSY$ üçgeninin klonlanmış halidir diyebiliriz. O halde $XW = YT$. Uzatmayalım, aynen Bottema Teoremi'ne verdiğimiz kanıtta olduğu gibi $XSYZ$ içbükey dörtgeninin içaçılar toplamından $m(XZY) = 90^o$ bulunur ve böylelikle $XW \perp YT$ de kanıtlanmış olur. ♥