Topoloji Köşesi

Doğan Bilge ve Ali Nesin*
ibug@mac.com / anesin@bilgi.edu.tr

Tamsayılarda İlginç Bir Topoloji

Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$ üzerine ilk bakışta tuhaf gelebilecek, ama oldukça öğretici olduğunu sandığımız bir topoloji tanımlayacağız. Böylece yazımız bu sayının kapak konusunu tamamlayıcı nitelikte olacak.

Yazı boyunca okurun, biraz olsun topolojinin temellerini, en azından açık ve kapalı kümelerin ve bir altkümenin kapanışının tanımını bildiğini varsayacağız. Yazının sonlarına doğru bilinmesi gereken topolojinin dozu artacak.

$\mathbb{Z}$ üzerine kuracağımız topolojimizin açık kümeleri, $n \neq 0$ ve r tamsayıları için, $n\mathbb{Z} + r$ biçiminde yazılan kümelerin herhangi bir bileşimi olacak. Bir de boşkümeyi açık küme olarak kabul edeceğiz elbet. Bu, gerçekten bir topolojidir:

T1) Boşküme, tanımdan dolayı açık bir kümedir. $\mathbb{Z}$'nin açık olduğunu görmek için de $n\mathbb{Z} + r$'de $n = 1$ ve $r = 0$ almak yeterli.

T2) Açık kümenin tanımından dolayı, açık kümelerin bileşimi de açıktır.

T3) Açık kümelerin sonlu kesişiminin açık olduğunu kanıtlamak için, $n\mathbb{Z} + r$ biçiminde yazılan sonlu sayıda kümenin kesişiminin de bu türden bir küme olduğunu kanıtlamak yeterlidir, bu da sayfa 14'teki Teorem 2'den çıkar.

1) *$n \neq 0$ ve r tamsayıları için $n\mathbb{Z} + r$ biçiminde yazılan her küme aynı zamanda kapalıdır, yani $n\mathbb{Z} + r$ açık kümesinin tümleyeni de açıktır.*

Kanıt: $n\mathbb{Z} + r$ kümesinin tümleyeni, $n\mathbb{Z} + s$ biçiminde yazılmış sonlu sayıda kümenin bileşimidir (bknz. sayfa 14.) □

Ama, (3)'te de göreceğimiz üzere, bu topolojide her açık/kapalı küme kapalı/açık değildir.

2) *Boşküme dışında her açık küme sonsuzdur.*

Kanıt: Çok bariz. □

3) Eğer $r \in \mathbb{Z}$ ise, $\{r\}$ *açık olmayan kapalı bir kümedir.*

Kanıt: $\{r\}$ kapalı bir kümedir, çünkü

$$\{r\} = \bigcap_{n>0} (n\mathbb{Z} + r)$$

ve $n\mathbb{Z} + r$ kümeleri (1)'den dolayı kapalı kümelerdir. $\{r\}$ kümesinin açık olmadığı (2)'den anlaşılıyor. □

4) *Eğer $C \subseteq \mathbb{Z}$ kapalı bir kümeyse ve $x \notin C$ ise o zaman öyle U ve V açık kümeleri vardır ki,*

$$x \in U,\ C \subseteq V \text{ ve } U \cap V = \emptyset.$$

Kanıt: C kapalı olduğundan, tümleyeni C^c açıktır. Ayrıca C^c, x'i içerir. Açık bir küme olduğundan, C^c kümesi $n\mathbb{Z} + r$ biçiminde ($n \neq 0$) yazılan kümelerin bileşimidir. Demek ki $x \in n\mathbb{Z} + r \subseteq C^c$ ilişkilerini sağlayan $n \neq 0$ ve r tamsayıları vardır. Şimdi $U = n\mathbb{Z} + r$ ve $V = (n\mathbb{Z} + r)^c$ olsun. V elbette C'yi altküme olarak içerir ve (1)'den dolayı açık bir kümedir. □

5) *$f(x) = ax + b$ biçiminde yazılan fonksiyonlar sürekli fonksiyonlardır.*

Kanıt: Önce $g(x) = x + b$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. Sürekliliğin tanımından dolayı, her açık altkümenin önimgesinin açık olduğunu göstermeliyiz. Açık kümelerin tanımından dolayı, $n\mathbb{Z} + r$ türünden yazılan açık kümelerin önimgelerinin açık olduğunu göstermek yeterlidir.

$$g^{-1}(n\mathbb{Z} + r) = n\mathbb{Z} + r - b$$

olduğundan, bu konuda bir sorun yaşamayız.

Şimdi $h(x) = ax$ türünden yazılan fonksiyonların sürekli olduğunu gösterelim. $a = 0, 1, -1$ ise çok kolay olan kanıtı okura bırakıyoruz. Bundan böyle $a \neq 0, 1, -1$ olsun. Sürekliliği asal a'lar için göstermek yeterli (çünkü sürekli fonksiyonların bileşkesi süreklidir.) Bundan böyle a'nın asal olduğunu

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü asistanı ve öğretim üyesi.

varsayalım. Bir önceki paragrafta olduğu gibi, her $n \neq 0$ ve r tamsayıları için $h^{-1}(n\mathsf{Z} + r)$ kümesinin açık olduğunu göstermeliyiz. Eğer $h^{-1}(n\mathsf{Z} + r) = \emptyset$ ise, $h^{-1}(n\mathsf{Z} + r)$ açıktır elbette. Böylece $h^{-1}(n\mathsf{Z} + r)$ kümesinin boş olmadığını varsayabiliriz. Demek ki, belli bir $u \in \mathsf{Z}$ için, $au = h(u) \in n\mathsf{Z} + r$. Dolayısıyla r yerine au alabiliriz, çünkü $n\mathsf{Z} + r = n\mathsf{Z} + au$ (sayfa 14, Önsav 1.)

Eğer a, n'yi bölüyorsa, $n = ak$ yazarak,

$$h^{-1}(n\mathsf{Z} + r) = h^{-1}(ak\mathsf{Z} + au) = k\mathsf{Z} + u$$

eşitliğini görürüz ve işimiz biter.

Bundan böyle a ve n'nin birbirine asal olduğunu varsayalım (a'nın asal olduğunu unutmayın.) Şimdi aşağıdaki önermeler eşdeğerdir:

- $x \in h^{-1}(n\mathsf{Z} + r)$,
- $ax = h(x) \in n\mathsf{Z} + r = n\mathsf{Z} + au$,
- Belli bir $z \in \mathsf{Z}$ için $ax = nz + au$,
- Belli bir $y \in \mathsf{Z}$ için $ax = nay + au$,
- Belli bir $y \in \mathsf{Z}$ için $x = ny + u$,
- $x \in n\mathsf{Z} + u$.

(Üçüncüden dördüncü adıma geçmek için a'yla n'nin birbirine asal olduğunu kullandık.) Dolayısıyla, $h^{-1}(n\mathsf{Z} + r) = n\mathsf{Z} + u$. Demek ki h sürekli.

$f = g \circ h$ olduğundan, f de süreklidir. □

6) Z, *bu topolojiyle tıkız*[1] *değildir*.

Kanıt: Sayfa 17'deki p-sel Sayıları Hissetmek yazısı aynen bu konudaydı. O yazıda sonlu tanesinin kesişimi boşküme olmayan, ama hepsinin birden kesişiminin boşküme olduğu kapalı kümeler bulmuştuk. □

7) N'*nin kapanışı* Z'*dir*.

Kanıt: N'yi içeren kapalı bir F kümesi alalım. O zaman F'nin tümleyeni F^c, N'yle kesişmeyen açık bir kümedir. $n \neq 0$ ve r tamsayıları için $n\mathsf{Z} + r \subseteq F^c$ ise $(n\mathsf{Z} + r) \cap \mathsf{N} = \emptyset$. Ama bu imkânsız. Bundan $F^c = \emptyset$ çıkar, yani $F = \mathsf{Z}$. Dolayısıyla N'yi içeren tek kapalı küme Z'dir ve N'nin kapanışı Z'dir. □

8) P, *pozitif asal sayılar kümesi olsun*. P'*nin kapanışı* $\overline{P}$, $P \cup \{1, -1\}$ *kümesidir*.

Kanıt: Bileşik n sayıları için, $n\mathsf{Z}$ açık kümelerinin hiçbiri $P \cup -P \cup \{1, -1\}$ kümesiyle kesişmez ve bileşik her n sayısı $n\mathsf{Z}$ kümesindedir. Demek ki,

$$P \cup -P \cup \{1, -1\} = [\textstyle\bigcup_{n \text{ bileşik sayı}} n\mathsf{Z}]^c.$$

Bundan da $P \cup -P \cup \{1, -1\}$ kümesinin kapalı olduğu çıkar. Dolayısıyla $\overline{P} \subseteq P \cup -P \cup \{1, -1\}$.

Eğer $p > 0$ bir asalsa, kolayca görüleceği üzere, $p(3\mathsf{Z} + 2) = 3p\mathsf{Z} + 2p$ açık kümesi, $-p$ asalını içerir ama 1 ve -1'i de içermez. Dolayısıyla,

$$(P \cup -P \cup \{1, -1\}) \cap [\textstyle\bigcup_{p > 0 \text{ asal}} (3p\mathsf{Z} + 2p)]^c$$

kapalı kümesi $P \cup \{1, -1\}$ kümesine eşittir. Bundan da $\overline{P} \subseteq P \cup \{1, -1\}$ çıkar.

$\overline{P} = P \cup \{1, -1\}$ eşitliğini kanıtlamamız için, P'yi içeren her kapalı kümenin 1 ve -1'i de içerdiğini kanıtlamalıyız, yani pozitif asal sayı barındırmayan hiçbir U açık kümesinin 1 ya da -1'i içermediğini kanıtlamalıyız. U yerine, $n \neq 0$ ve r tamsayıları için $n\mathsf{Z} + r$ biçiminde yazılan bir küme alabiliriz. $n \neq 0$ ve r tamsayıları $n\mathsf{Z} + r$ hiç pozitif asal sayı barındırmasın. Ne 1'in ne de -1'in $n\mathsf{Z} + r$ kümesinde olduğunu kanıtlayacağız. Bu noktada önemli bir teoremin yardımına ihtiyacımız var:

Teorem [Dirichlet]. *n ve r birbirine asal iki sayı olsun. O zaman $nx + r$ biçiminde yazılan sonsuz sayıda asal vardır.*

Lejeune Dirichlet (1805 - 1859)

Dirichlet'nin teoremine göre, eğer n ve r birbirine asalsa, o zaman $n\mathsf{Z} + r$ kümesinde sonsuz sayıda (tek bir tanesi bile bize yeter!) asal vardır; bu olamayacağından, n ve r sayılarının her ikisi birden 1'den büyük bir d sayısına bölünür ve $n\mathsf{Z} + r \subseteq d\mathsf{Z}$ olur, dolayısıyla $n\mathsf{Z} + r$ ne 1'i ne de -1'i içerir. □

Şimdi oldukça şaşırtıcı bir sonuç:

9) *Bu topolojiyle* Z *metrik bir uzaydır*.

Kanıt: Urysohn'un aşağıda verdiğimiz bilinen teoremini kullanacağız.

Teorem [Urysohn]. *X, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir topolojik uzay olsun*:

i) *Her $x \neq y$ için, x'i içeren ama y'yi içermeyen ve y'yi içeren ama x'i içermeyen açık kümeler vardır.*

ii) *Her C kapalı kümesi ve her $x \notin C$ için,*

$$x \in U,\ C \subseteq V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

koşullarını sağlayan U ve V açık kümeleri vardır.

1 Tıkız: tıkışık, kompakt, İngilizcesiyle "compact". Çok bilinen bir sonuca göre, bir uzayın tıkız olması için gerek ve yeter koşul, hiçbir sonlu kesişimi boş olmayan her kapalı kümeler familyasının tüm kesişiminin de boşküme olmamasıdır.

iii) *Öyle sayılabilir sonsuzlukta açık küme vardır ki, her açık küme bu sayılabilir sonsuzluktaki açık kümelerin bir bileşimidir.*

O zaman, X'in topolojisini veren bir metrik vardır.

Şimdi (9)'un kanıtını verebiliriz. Urysohn Teoremi'nin ikinci koşulunun Z için sağlandığı (4)'te kanıtlanmıştı. (3)'te tek elemanlı her kümenin kapalı olduğunu görmüştük. Bundan ve (4)'ten Urysohn Teoremi'nin birinci koşulunun Z için sağlandığı anlaşılır. Urysohn Teoremi'nin sonuncu koşulu tanımdan dolayı sağlanıyor: Her açık küme nZ + r kümelerinin bileşimidir ($n \neq 0$) ve bunlardan sayılabilir sonsuzlukta vardır. □

Z'nin topolojisinin bir metrik tarafından verildiğini biliyoruz. Sıra geldi böyle bir metrik bulmaya...

$x, y \in$ Z olsun. Eğer $x = y$ ise, $d(x, y) = 0$ olsun. Eğer $x \neq y$ ise, x è y mod n denkliğini sağlayan en küçük $n \geq 1$ tamsayısı vardır. O zaman $d(x, y) = 1/2^n$ olsun.

Örneğin, $d(19, 7) = 1/2^5$, çünkü $19 \equiv 7$ mod 2, 3, 4 ama 19 è 7 mod 5.

Aşağıdaki önermelerin eşdeğerliği, d fonksiyonunu daha iyi algılayabilmek için önemlidir:

- $d(x, y) \leq 1/2^n$,
- her $i = 1, 2, ..., n-1$ için, $x \equiv y$ mod i,
- ekok$(1, 2, ..., n-1)$, $x - y$'yi böler.

10) *d, Z üzerine bir metriktir, hatta ultrametriktir, yani $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ üçgen eşitsizliğinden daha keskin bir eşitsizlik olan*

$$d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$$

eşitsizliğini sağlar.

Kanıt: $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = d(y, x)$ ve "$d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$ ise" önermelerinin doğruluğu d'nin tanımından doğrudan çıkar. $d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$ eşitsizliğini kanıtlayalım. $d(x, z) \leq d(z, y) \leq 1/2^n$ eşitsizliklerini varsayıp, $d(x, y) \leq 1/2^n$ eşitsizliğini kanıtlamak yeterlidir. Demek ki, $i = 1, 2, ..., n-1$ için, $z \equiv y$ mod i ve $x \equiv z$ mod i, dolayısıyla $x \equiv y$ mod i. Yani $d(x, y) \leq 1/2^n$. □

11) *d'nin Z üzerine verdiği topoloji Z'nin yazının başında tanımlanan topolojisidir.*

Kanıt: Önce d metriği tarafından tanımlanan her açık kümenin yazının başında tanımladığımız topolojide açık olduğunu kanıtlayalım. Her $x \in$ Z ve $r \in$ R için, x merkezli ve r yarıçaplı,

$$B(x, r) := \{y \in \mathrm{Z} : d(x, y) < r\}$$

toplarının yazının başında tanımladığımız topolojide açık olduğunu kanıtlamak yeterlidir. r'nin pozitif olduğunu varsayabiliriz. n, $1/2^n < r$ eşitsizliğini sağlayan en küçük tamsayı olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} B(x, r) &:= \{y \in \mathrm{Z} : d(x, y) < r\} \\ &= \{y \in \mathrm{Z} : d(x, y) \leq 1/2^n\} \\ &= \{y \in \mathrm{Z} : \mathrm{ekok}(1, 2, ..., n-1),\ x - y\text{'yi böler}\} \\ &= \mathrm{ekok}(1, 2, ..., n-1)\mathrm{Z} + x. \end{aligned}$$

Şimdi de yazının başında tanımladığımız topolojinin açık kümelerinin d metriğiyle verilmiş topolojide açık olduğunu kanıtlayalım. Bunu nZ + r kümeleri için yapmak yeterli. Ama,

$$n\mathrm{Z} + r = \bigcup_{s \equiv r \bmod n} B(s, 1/2^n)$$

eşitliğinden dolayı bu kolay. (Kanıt için önemli değil ama ilginç gelebilir: Yukardaki bileşimde sonlu sayıda açık top vardır.) □

Bu metrik aslında çok bilinen bir başka metrikten kaynaklanıyor. Z/nZ kümelerinin çarpımı olan $X = \prod_{n \geq 2}$ Z/nZ kümesine bakalım. X kümesi, n-inci terimi Z/$(n+1)$Z kümesinde olan dizilerden oluşur. Z/nZ'yi her altkümenin açık olduğu ayrık (discrete) topolojiyle, X'i de çarpım topolojisiyle (product topology) görelim. Tychonoff Teoremi'ne göre X tıkızdır.

Bilindiği ve kanıtlaması kolay olduğu üzere, X'in topolojisi şu metrik tarafından verilir: Eğer $(x_n)_n \neq (y_n)_n$, X'in iki elemanıysa ve n, $x_n \neq y_n$ eşitsizliğini sağlayan en küçük endisse, $d((x_n)_n, (y_n)_n) = 1/2^n$ olarak tanımlansın. $d((x_n)_n, (x_n)_n) = 0$ olsun.

X'in konumuzla ilgisine gelelim: Z'yi X'e gömebiliriz. Nitekim, $f(x) = (x \bmod n)_{n \geq 2}$ formülüyle tanımlanan fonksiyon Z'yi X'in içine gömer. Dolayısıyla Z'yi X'in bir altkümesi olarak görebiliriz. Böylece Z, X'ten aldığı topoloji ve metriğe sahip olur. Yukarda Z üzerine tanımlanan metrik (dolayısıyla topoloji de) bundan başka bir şey değil.

Z'nin X'teki kapanışı $\hat{\mathrm{Z}}$, tıkız bir halkadır. İngilizcesiyle Z'nin "profinite closure"udur. İlerde bir gün $\hat{\mathrm{Z}}$ halkasından daha fazla sözederiz. ♥