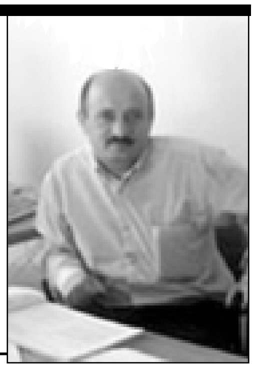
Problemler ve Çözümleri

Refail Alizade*
rafailalizade@iyte.edu.tr



Bu, bir yıl sürecek bir yarışmadır. Grup halinde, okul olarak ya da bireysel olarak katılabilirsiniz.

Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Ayrıca lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

Her sorunun çözümünü ayrı bir kâğıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

Kâğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenciyseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla İzmir adresine 1 Ekim 2004 tarihine kadar adıma gönderiniz.

Doğru yanıt yollayanlar: Oktay Balkış (Aksaray Anadolu Öğretmen Lisesi) Y281, Y285; Alper Çay (Erciyes Ü., Kayseri) Y281, Y282, Y285; Enes Dinçer (Seyhan, Adana) Y281; Mustafa Dönmez (Turgutlu Halil Kale Fen Lisesi), Yaşar Dönmez (Turgutlu Lisesi) Y281, Y285; Aras Erzurumluoğlu (İstanbul Lisesi) Y281, Y284, Osman Arşın (İzmir) Y285; Ayşe Borat (Ege Üniversitesi, Matematik Bölümü Y285; Sinan Karal (Özel Kazımoğlu Fen Lisesi, İstanbul) Y281, Y285)

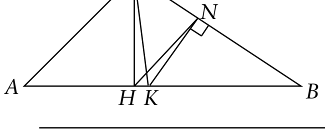
ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A301. $p_1 < p_2 < \dots < p_{50}$ ilk 50 asal sayıyı göstermek üzere

$$p_1^{p_1!} + p_2^{p_2!} + p_3^{p_3!} + \dots + p_{50}^{p_{50}!}$$

sayısının 35'e bölümünden elde edilen kalan kaçtır?

A302. ABC üçgeninde CH yüksekliği ve CK açıortayı çizilmiştir; K noktasının BC üzerindeki izdüşümü N'dir ve NH ile AC birbirine paraleldir. $m(ACB)/m(BAC)$ kaçtır?



A303. Düzgün bir n-genin her köşesinde birer dama bulunur. Her adımda herhangi iki dama alınıp ters yönlerde komşu köşelere kaydırılıyor. Hangi n'ler için bu işlemlerle tüm damalar aynı köşeye üstüste koyulabilir?

A304. $x, y, z, u, v > 0$ olmak üzere $x - xy$, $y - yz$, $z - zu$, $u - uv$, $v - vx$ sayılarının hepsinin aynı zamanda 1/4'ten büyük olamayacağını gösteriniz.

A305. $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ olmak üzere her $n \geq 1$ için $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ toplamı, n'den büyük olmayan bir pozitif tamsayının karesine eşittir. $f(2004)$ kaçtır?

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y301. İlk 99 basamağı 9 olan kaç 200 basamaklı tamkare vardır?

Y302. ABC ikizkenar ($AB = BC$) üçgeninde $m(B) = 20°$'dir. $[AB]$ kenarı üzerinde, $|BL| = |AC|$ olacak şekilde bir L noktası alınmıştır. ALC açısı kaç derecedir?

Y303. Her n kişi arasında ya en az 6 kişiyle tanışan ya da en az 6 kişiyle tanışmayan bir kişi bulunur. Bu özelliğe sahip en küçük n kaçtır?

Y304. $a < b$ olmak üzere a, b pozitif tam sayıları şu koşulu sağlar: $x, y \in [a, b]$ ise, $1/x + 1/y \in [a, b]$'dir. a ve b sayılarını bulunuz.

Y305. Her hamlede (a, b, c) üçlüsünün yerine $(c + 5b, 3c - 5a, 2b - 3a)$ veya $(2a + 3b, b + 3c, 4c + 2a)$ üçlüsü alınabilir. Başlangıçta $(a, b, c) = (1, 2, 4)$ ise, böyle hamleler sonucu $(2003, 2004, 2005)$ üçlüsü elde edilebilir mi?

ESKİ SORULARA ÇÖZÜMLER

(Kış 2003, Yıl 12, Sayı 4)

A291. *a ve b pozitif tamsayılarından herbirinin 99'ar pozitif tam çarpanı bulunur. $a \times b$ sayısının pozitif tam çarpanlarının sayısı* 1000 *olabilir mi?*

Çözüm. Önce şu önermeyi kanıtlayalım: n pozi-

* İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü öğretim üyesi.

tif tam sayısının tamkare olması için yeter ve gerek koşul n'nin pozitif bölenlerinin sayısının tek olmasıdır. Gerçekten, n'nin asal çarpanlarına ayrımı

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}$$

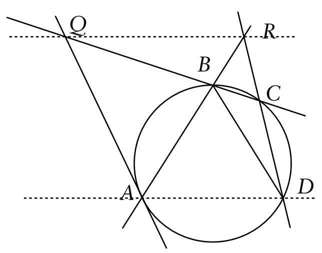
şeklindeyse, n'nin tamkare olması m_1, m_2, ..., m_s sayılarının herbirinin çift olmasına denktir, bu da n'nin pozitif bölenlerinin sayısının, yani

$$(m_1+1)(m_2+1) \dots (m_s+1)$$

çarpımının tek olmasına denktir.

Şimdi, a ve b sayılarından herbirinin 99'ar pozitif böleni bulunduğundan, a ve b tamkaredir. O halde ab çarpımı da tamkaredir, dolayısıyla bu sayının pozitif bölenlerinin sayısı tektir, yani 1000 olamaz.

A292. *Çember üzerinde,* $|AB| = |BD|$ *olmak üzere* A, B, C, D *noktaları alınmıştır.* A *noktasından geçen teğet* BC *doğrusunu* Q *noktasında kesiyor.* AB *ve* CD *doğruları* R *noktasında kesişiyor.* QR *doğrusunun* AD*'ye paralel olduğunu kanıtlayınız.*



Çözüm. $m(QAB) = m(AB)/2 = m(BDA) = m(BAD) = m(BD)/2 = m(CBD) + m(CDB) = m(BCR)$ olduğundan $QACR$ kirişler dörtgenidir. O halde $m(QRA) = m(QCA) = m(BDA) = m(BAD)$ eşitliğinden QR'nin AD'ye paralel olduğu elde edilir.

A293. 10×19 *boyutlu tablonun her hanesine* 0 *veya* 1 *yazılmıştır. Her satır ve her sütunun sayılarının toplamları arasında birbirinden farklı olan en fazla kaç sayı olabilir?*

Çözüm. Bir satır veya sütunun sayılarının toplamı 0'dan 19'a kadar tamsayılar olabilir. Bu yirmi sayının herbirinin bulunduğu bir yazılımın olduğunu varsayalım. O halde sadece sıfırlardan oluşan bir sütun veya satır vardır. Birinci durumda sözkonusu toplamlar en fazla 18 olabilir, dolayısıyla 19 elde edilemez. İkinci durumda her sütundaki sayıların toplamı en fazla 9'dur, dolayısıyla 10, 11, ..., 19 sayılarının satırlardan elde edilmesi gerekir. On satırdan biri sadece sıfırlardan oluştuğu için bu mümkün değildir. Böylece her iki durumda çelişki elde edilir. Öte yandan19 farklı toplamın olduğu yazılım şekli yandaki tabloda verilmiştir.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

A294. $x^2 + ax + b = 0$ *denkleminin birbirinden farklı iki gerçel kökü vardır.* $x^4 + ax^3 + (b-2)x^2 - ax + 1 = 0$ *denkleminin birbirinden farklı dört kökü olduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm. $x^2 + ax + b = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. $x_1 + x_2 = -a$ ve $x_1x_2 = b$ olduğundan,

$x^4 + ax^3 + (b-2)x^2 - ax + 1$

$= x^4 - x_1x^3 - x_2x^3 + x_1x_2x^2 - 2x^2 + x_1x + x_2x + 1$

$= (x^4 - x_1x^3 - x^2) - (x_2x^3 - x_1x_2x^2 - x_2x) - (x^2 - x_1x - 1)$

$= (x^2 - x_1x - 1)(x^2 - x_2x - 1)$

elde edilir. Diskriminantları pozitif olduğundan $x^2 - x_1x - 1$ ve $x^2 - x_2x - 1$ polinomlarının ikişer kökü vardır. Bunların bir x_0 ortak kökü bulunursa, $-1/x_0$ da ortak kök olur. Bu durumda $x_1 = x_0 - 1/x_0 = x_2$ elde edilir ve bu mümkün değildir. Böylece köklerin dördü de birbirinden farklıdır.

A295. *Herbiri diğer üçünden ikisinin çarpımına eşit olan tüm gerçel sayı dörtlülerini bulunuz.*

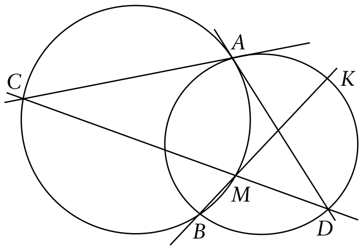
Çözüm. Bu sayıların mutlak değerleri $a \le b \le c \le d$ olsun. a sayısı, bc, bd ve cd çarpımlarından birine eşit olduğundan $a \ge bc$'dir. Benzer şekilde $d \le bc$'dir. O halde $bc \le a \le b \le c \le d \le bc$ eşitsizliklerinden $a = b = c = d = bc$ ve buradan da $a^2 = a$ elde edilir. Bu durumda ya $a = 0$, yani $(0, 0, 0, 0)$ dörtlüsü elde edilir, ya da $a = 1$'dir, yani sayıların herbiri 1 veya -1'dir. Sayılar arasında sadece bir tane -1 ya da sayıların dördünün de -1 olamayacağı açıktır. O halde diğer çözümler $(1, 1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1, 1)$, $(-1, -1, -1, 1)$ dörtlüleri ve son iki dörtlünün tüm permütasyonları olacaktır (toplam 12 çözüm vardır.)

Y291. m *ve* n *pozitif tam sayıları* $\mathrm{OBEB}(m, n) + \mathrm{OKEK}(m, n) = m + n$ *eşitliğini sağlar. Bu sayılarından birinin diğerine bölündüğünü kanıtlayınız.*

Çözüm. $\mathrm{OBEB}(m, n) = d$, $m = ad$, $n = bd$ olsun. O halde $\mathrm{OKEK}(m, n) = abd$ olduğundan eşitlik $d + abd = ad + bd$ şeklinde yazılabilir. d ile sadeleştirip çarpanlara ayırdığımızda $(a-1)(b-1) = 0$, buradan da $a = 1$ veya $b = 1$ elde edilir. Birinci durumda $m = d$ ve m, n'yi böler. İkinci durumda da $n = d$ ve n, m'yi böler.

Y292. *İki çember A ve B noktalarında kesişiyor. Birinci çemberin AC kirişi ikinci çembere teğettir, ikinci çemberin AD kirişi de birinci çembere teğettir. CD doğrusu birinci çemberi, B'den farklı olan M noktasında kesiyor. MB doğrusunun AD doğru parçasını yarıya böldüğünü kanıtlayınız.*

Çözüm. BM doğrusunun ikinci çemberi kestiği diğer noktayı K ile gösterelim. $KAMD$ dörtgeninin bir paralelkenar olduğunu gösterirsek, AD ve MK köşegenleri kesişim noktasında yarıya bölünmüş olacaklar. Böylece MB doğrusunun AD'yi yarıya böldüğünü kanıtlamış olacağız.



(AB), ikinci çember üzerindeki yayı göstersin. $m(AKB) = m((AB))/2 = m(CAB) = m(CMB)$ olduğundan $AK \parallel MD$'dir. Benzer şekilde $m(ADK) = m((KA))/2 = m(ABK) = m((MA))/2 = m(MAD)$ olduğundan $MA \parallel DK$'dır. Dolayısıyla $KAMD$ paralelkenardır.

Y293. *İki kişi sırayla satranç tahtasının boş hanelerine birer at koyuyor; birinci kişi beyaz, ikinci kişi siyah at. Yeni konulan atın karşı renkten olan atlarlarla tehdit edilmemesi gerekir. Hamle yapamayan kaybediyor. En iyi şekilde oynadıkları taktirde kim kazanır, başlayan mı, ikinci oyuncu mu?*

Çözüm. İkinci, her hamlede birincinin son hamlede at koyduğu hanenin tahtanın merkezine göre simetriğindeki haneye at koyar. İkincinin her hamlesinden sonra tahta üzerindeki durum tahtanın merkezine göre simetrik olacağından birincinin son hamle yaptığı hanenin simetriği boş olur ve ikinci bu stratejiyi her zaman izleyebilir. İkincinin son koyduğu at birincinin son koyduğu atla tehdit edilmez, çünkü bunlar aynı renkli hanelerde bulunurlar. Bu son at birincinin koyduğu diğer atlarla da tehdit edilmiyor, aksi taktirde simetriden dolayı birincinin koyduğu son at ikincinin daha önce koyduğu bir atla tehdit edilecekti. Böylece ikincinin her zaman hamlesi bulunur ve ilk olarak birincinin hamleleri tükenir.

Y294. *$a < b$ ve her gerçel x için $ax^2 + bx + c \geq 0$ olmak üzere tüm a, b, c gerçel sayı üçlüleri için*

$$\frac{a+b+c}{b-a}$$

nin alabileceği minimum değeri bulunuz.

Çözüm. Koşullardan $a > 0$ ve $b^2 - 4ac \leq 0$, dolayısıyla $c \geq b^2/(4a)$ çıkar. Aritmetik ve geometrik ortalamalar arasındaki eşitsizliği kullanarak, $b - a > 0$ olduğunu da gözönünde bulundurarak,

$$\begin{aligned}\frac{a+b+c}{b-a} &\geq \frac{a+b+\frac{b^2}{4a}}{b-a} \\ &= \frac{4a^2+4a(b-a+a)+(b-a+a)^2}{4a(b-a)} \\ &= \frac{9a^2+6a(b-a)+(b-a)^2}{4a(b-a)} \\ &\geq \frac{2\sqrt{9a^2(b-a)^2}+6a(b-a)}{4a(b-a)} = 3\end{aligned}$$

elde ederiz. Eşitlik, $c = b^2/(4a)$ ve $3a = b - a$, yani $b = 4a = c$ durumunda elde edilir.

Y295. *Bir ülkede 2004 kent bulunur, her kentin en az 400 kentle doğrudan bağlantısı bulunuyor. Her kentten herhangi diğerine ulaşmak mümkündür. En fazla 14 aktarmayla herhangi bir kentten herhangi bir kente ulaşılabileceğini kanıtlayınız.*

Çözüm. Bir A kentinden bir B kentine 15'ten az aktarmayla ulaşılamayacağını varsayalım. Kentlerden aşağıdaki şekilde kümeler oluşturalım. $X_0 = \{A\}$ olsun. X_1, A ile doğrudan bağlantısı olan tüm kentlerden oluşsun. X_2, A'dan bir aktarmayla ulaşılabilen fakat X_1'de bulunmayan tüm kentlerden oluşsun vs. Her $k = 0, 1, ..., 15$ için A'dan "mesafesi" tam k olan kentlerin kümesi X_k olsun. Varsayımdan dolayı $X_0, X_2, ..., X_{15}$ kümelerinden hiçbiri boş değildir ve bu kümeler ayrıktır. $X_0 \cup X_1 \cup X_2$ kümesinde en az 401 kent bulunur, çünkü X_1'den aldığımız bir C kentinden en az 400 kente doğrudan ulaşılabiliyor ve bu 400 kent C ile birlikte $X_0 \cup X_1 \cup X_2$ kümesindedir. Benzer şekilde $X_3 \cup X_4 \cup X_5, ..., X_{12} \cup X_{13} \cup X_{14}$ kümelerinde de en az 401'er kent bulunur. (Örneğin X_{13}'teki bir D kentiyle doğrudan bağlantısı olan bir E kentinin, $k < 12$ olmak üzere X_k'da bulunamayacağını da not edelim, çünkü aksi taktirde $i \leq k + 1 < 13$ olmak üzere $D \in X_i$ olurdu). Bu durumda ülkedeki kentlerin sayısının en az $401 \times 5 = 2005$ olması gerekir. Bu çelişki herhangi bir kentten herhangi bir kente en fazla 14 aktarmayla ulaşılabileceğini kanıtlar.

Not: Çözümü biraz daha geliştirerek en fazla on aktarmayla herhangi bir kentten herhangi bir kente ulaşılabileceğini kanıtlayınız. ♥