Doğuş Üniversitesi Matematik Kulübü Matematik Yarışması 2004

Liselerarası Takım Yarışması

Doğuş Üniversitesi Matematik Kulübü'nün üniversitenin öğretim üyelerinin de katkısıyla düzenlediği matematik yarışmasının lise takımları kategorisinin sorularını yayımlıyoruz. Bir sonraki sayıda bu soruların yanıtlarını ve bir başka kategorinin sorularını bulacaksınız.

Soru 1. *$a \neq 0$ olmak üzere,*

$$\frac{27}{1-x^a}+\frac{27}{1-x^{-a}}=3^{2x-3}$$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

Yanıt.

$$3^{2x-3}=\frac{27}{1-x^a}+\frac{27}{1-x^{-a}}=\frac{27}{1-x^a}+\frac{27x^a}{x^a-1}$$
$$=\frac{27}{1-x^a}\left(1-x^a\right)=27=3^3,$$

Buradan da $2x - 3 = 3$, yani $x = 3$ çıkar.

Soru 2. *Gerçel sayılar üzerindeki*

$$x^{1/4}=\frac{12}{1+x^{1/4}}$$

denkleminin çözümlerinin toplamı kaçtır?

Yanıt. Eşitlik çözüldüğünde $x^{1/4} = 3$ veya -4 olduğu görülür, ikincisi mümkün olmadığından tek çözüm $x = 81$ bulunur. Yanıt 81'dir.

Soru 3. $\left[\sqrt{(x-2)^{(x-5)}}\right]^{(x-2)}=1$ denklemini sağlayan farklı x değerlerinin toplamı kaçtır?

Yanıt.

$$1=\left[\sqrt{(x-2)^{(x-5)}}\right]^{(x-2)}=(x-2)^{(1/2)(x-5)(x-2)}.$$

eşitliğinden ya $x - 2 = \pm 1$ ya da $(x - 5)(x - 2) = 0$ çıkar. İlk eşitlikten $x = 1, 3$; ikincisinden $x = 2, 5$ bulunur. 2 dışında hepsi çözümdür. Yanıt: $3 + 5 + 1 = 9$.

Soru 4. $40! + 50! + 60! = a \times 10^n$ *eşitliğinde a ve n pozitif tamsayılar olmak üzere a'nın en küçük değeri için n kaçtır?*

Yanıt. $40! = A \times 10^9$, $50! = B \times 10^{12}$ ve $60! = C \times 10^{14}$ olarak yazılır. O halde $40! + 50! + 60! = 10^9(A + B \times 10^3 + C \times 10^5)$. A, 10'a bölünemediğinden $n = 9$ olmalıdır.

Soru 5. $\log_3(\log_9 x) = \log_9(\log_3 x)$ *ise x kaçtır?*

Yanıt. Her y için, $9^y = 3^{2y}$ olduğundan, $2\log_9 9^y = 2y = \log_3 3^{2y} = \log_3 9^y$. Yani her x için, $2\log_9 x = \log_3 x$. Demek ki verilenden,

$$\log_3\left(\frac{\log_3 x}{2}\right)=\frac{\log_3(\log_3 x)}{2}$$

çıkar, bundan da sırayla

$$\log_3\left(\frac{\log_3 x}{2}\right)^2=2\log_3\left(\frac{\log_3 x}{2}\right)=\log_3(\log_3 x),$$

$$\left(\frac{\log_3 x}{2}\right)^2=\log_3 x \text{ ve } (\log_3 x)^2=4\log_3 x$$

bulunur. Logaritma 0 değeri alamayacağından, $\log_3 x = 4$ ve $x = 3^4 = 81$ bulunur.

Soru 6. *aa, ab, ba ve bb sayıları iki basamaklı sayılardır. $ab = bb + 30$ ise $aa + ba$'nın en küçük değeri kaçtır?*

Yanıt. $ab = bb + 30$ eşitliğinden $10a + b = 10b + b + 30$ çıkar, bundan da $10(a - b) = 30$ bulunur. Demek ki, $a - b = 3$'tür. $a = 4$ ve $b = 1$ istenen özellikteki sayıları verir ve $aa + ba = 44 + 14 = 58$ olur.

Soru 7. *p ve $p^2 + 13$ sayılarının her ikisi de asalsa, p hangi değerleri alabilir?*

Yanıt. p tek tamsayı olursa $p^2 + 13$ çift sayı olacak, yani asal olamayacaktır. Demek ki p tek olamaz, yani $p = 2$ olabilir.

Soru 8. *Koordinat düzleminde $9x^2 + 6xy + y + 6 = 0$ bağıntısıyla verilen eğrinin üzerindeki noktaları için, y'nin alabileceği değerler kümesi nedir?*

Yanıt. $0 = 9x^2 + 6xy + y + 6 = 9x^2 + 6xy + y^2 - y^2 + y + 6 = (3x + y)^2 - (y - 3)(y + 2)$ eşitliğinden $(y - 3)(y + 2) \geq 0$ çıkar, dolayısıyla $y \in (-\infty, -2] \cup [3, \infty)$. Eğer $y \in (-\infty, -2] \cup [3, \infty)$ ise

$$(3x + y)^2 = (y - 3)(y + 2)$$

eşitliğini sağlayacak bir x kolaylıkla bulunur.

Soru 9. $\left(xy^2 + \dfrac{1}{x^2y^4}\right)^9$ *ifadesinin açılımında sabit terim kaçtır?*

Yanıt.

$$\left(xy^2 + \frac{1}{x^2y^4}\right)^9 = \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\left(xy^2\right)^{9-k}\left(\frac{1}{x^2y^4}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\left(xy^2\right)^{9-k}\left(xy^2\right)^{-2k}$$

Sabit terimi $9 - k - 2k = 0$, yani $k = 3$ için elde ederiz. Böylece sabit terimin katsayısı

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{6!\,3!} = 84$$

tür.

Soru 10. *Bir torbada seksen kâğıt var. Bunlardan otuzu "dolu", ellisi "boş". Çekilen kâğıt geri atılmadığına göre, iki kişiden ikinci çekenin dolu çekme olasılığı kaçtır?*

Yanıt.

$$\frac{30}{80}\frac{29}{79} + \frac{50}{80}\frac{30}{79} = \frac{30}{80 \times 79}(29+50) = \frac{3}{8}.$$

Soru 11. $x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}$ *denkleminin gerçel köklerinin çarpımlarını bulunuz.*

Yanıt. $y = (x^2 + 18x + 45)^{1/2}$ olsun. O halde $y^2 - 15 = 2y$ olmalı. y için denklem çözüldüğünde $y_1 = 5$ ve $y_2 = -3$ bulunur. İkinci değer çözüm olamayacağından $x^2 + 18x + 45 = y_1{}^2 = 25$, buradanda $x_1x_2 = 20$ bulunur.

Soru 12. *Bir pozitif n tamsayısı için $15\times n$ çarpımının bütün rakamları 0 veya 7 ise n'nin alabileceği en küçük değer kaçtır?*

Yanıt. $15n$ sayısı 5'e bölünür, dolayısıyla son rakam 0 olmalıdır. Ayrıca $15n$ sayısı 3'e de bölünür, dolayısıyla rakamların toplamı 3'e bölünür. O halde en az üç 7 bulunmalıdır. Böylece $15n$ sayısı (en küçük) 7770 olur. Buradan da $n = 7770/15 = 518$ bulunur.

Soru 13. $2\sqrt{x} = 3 - x$ *denkleminin çözüm kümesi nedir?*

Yanıt. İki tarafın karesi alındığında $4x = (3 - x)^2 = x^2 - 6x + 9$ ve $x^2 - 10x + 9$ bulunur. Son denklemin kökleri 1 ve 9 dur. $x \leq 3$ olacağından çözüm $x = 1$ için sağlanır.

Soru 14. 4000 *ile* 7000 *sayıları arasında bütün rakamları farklı olan kaç çift tamsayı vardır?*

Yanıt. İlk rakam çift olsun. O zaman ilk rakam için iki seçenek (4 ve 6), son rakam için dört, ikinci için sekiz ve üçüncü için yedi seçenek vardır. Toplamda $2 \times 4 \times 8 \times 7 = 448$ sayı bulunur. Benzer şekilde, eğer ilk rakam tekse, bu rakam ancak 5 olabilir ve $5 \times 8 \times 7 = 280$ tane olası sayı bulunur. Yanıt, $448 + 280 = 728$'dir.

Soru 15. *Aşağıdaki küme kaç elemanlıdır?*

$\{x \in \mathbb{Z} : x^4 + x^2 + 1 \equiv 0 \pmod 3)$ *ve* $-5 < x < 5\}$

Yanıt. $x \equiv \pm 1 \pmod 3$ alınırsa $x^4 + x^2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$ denklemi sağlanır, yoksa sağlanmaz. Öyleyse çözüm verilen aralıkta 3'e bölünemeyen tamsayılardan oluşur, yani küme, $\{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$'dir ve 6 elemanı vardır.

Soru 16. $f\left(\dfrac{5x-3}{6x-2}\right) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$ *olduğuna göre* $f(1)$ *kaçtır?*

Yanıt. $x = -1$ için, $\dfrac{5x-3}{6x-2} = 1$ olduğundan,

$$f(1) = \frac{3(-1)-1}{2(-1)+1} = 4$$

'tur.

Soru 17. *x, y, z pozitif tamsayılar olmak üzere $2x + 4y + 5z = 50$ koşulunu sağlayan kaç z değeri vardır?*

Yanıt. x, y ve z pozitif tamsayılar olacağı için $1 \leq z < 10$ olmalı.

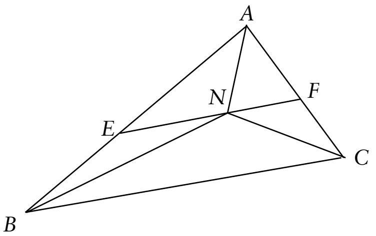
$$z = \frac{50 - 2x - 4y}{5} = 2\times\frac{25 - x - 2y}{5}$$

eşitliğinden z'nin çift sayı olması gerektiği anlaşılır. Her $z = 2, 4, 6, 8$ için çözüm kolaylıkla bulunur.

Soru 18. 245 *ile* 600 *arasında* 13 *ve* 15'*e bölünebilen kaç sayı vardır?*

Yanıt. $13 \times 15 = 195$, a'yı bölmeli ve $245 < a < 600$ olmalıdır. Bu koşulları sağlayan $a = 2 \times 195$ ve 3×195 sayıları vardır.

Soru 19. *Bir ABC üçgeninin açıortaylarının kesim noktası N olsun. N'den BC tabanına çizilen paralel EF ise,* Alan(AEF)/Alan(ABC) *oranının a,*



b, c kenar uzunlukları türünden değeri kaçtır?

Yanıt. AN açı ortayının BC'yi kestiği nokta D olsun. Demek ki $DC/BD = b/c$ ve

$$\frac{DC+BD}{BD}=\frac{b+c}{c},$$

dolayısıyla, $BD = ac/(b+c)$. Benzer işlem BN açı ortayı ve ABD üçgeni için yapılırsa,

$$\frac{ND}{AN}=\frac{BD}{c}=\frac{ac}{c(b+c)}=\frac{a}{b+c}$$

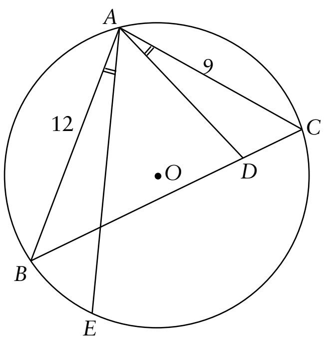
bulunur, ve

$$\frac{AD}{AN}=\frac{a+b+c}{b+c}$$

olur. İstenilen alanlar oranı

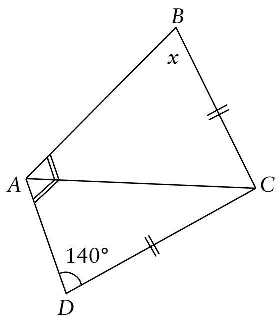
$$\left(\frac{b+c}{a+b+c}\right)^2$$

çıkar.



Soru 20. *Aşağıdaki şekilde $AB = 12$, $AC = 9$, $AE + AD = 24$ cm ve $m(BAE) = m(DAC)$ ise AE kaç cm'dir?*

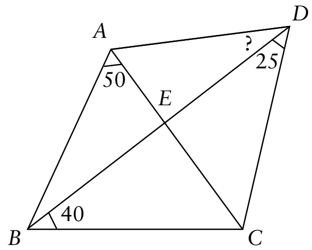
Yanıt. Aynı yayı gördüklerinden $m(BEA) = m(ACB)$'dir. Diğer açılar eşit olduğundan, BEA ve DCA üçgenleri benzer üçgendir. $AE = x$ ise, $AD = 24 - x$ ve $x/9 = 12/(24 - x)$ olur. Bundan da $x = 18$ ya da $x = 6$ bulunur. Karşılaştırmadan $AE = x = 18$ bulunur.



Soru 21. *$AB \neq AD$, $BC = CD$, $m(DAC) = m(CAB)$ ve $m(ADC) = 140°$ ise, aşağıdaki şekildeki üçgenler için $m(ABC)$ kaç derecedir?*

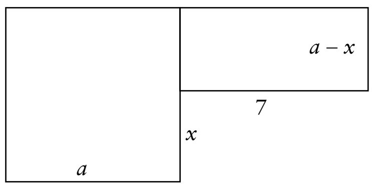
Yanıt. Sinüs teoreminden $BC/\sin(BAC) = AC/\sin x = AC/\sin(140°)$, yani $\sin x = \sin(140°)$, buradan da $x = 40°$ veya $140°$ bulunur. $AB \neq AD$ olduğundan ABC ve ADC üçgenleri eş olamaz, dolayısıyla $x = 40°$ bulunur.

Soru 22. *$AB = AC$, $m(BAC) = 50°$, $m(DBC) = 40°$, $m(BDC) = 25°$ ise aşağıdaki şekil için $m(ADB)$ kaç derecedir?*



Yanıt. $m(BAC) = 2m(BDC)$ ve $AB = AC$ olduğundan B, C, D noktalarından geçen çember A merkezlidir. O halde AD yarıçaptır. Böylece, $2(40 + 25 + m(ADB)) = 180°$ ve $m(ADB) = 25°$ bulunur.

Soru 23. *Bir okulun bahçesinde kare şeklinde, satır ve sütunlara dizilmiş öğrencilerden bazı satırlardaki öğrenciler arkadaki 7 sütuna dizilerek bir dikdörtgen elde ediliyor. Buna göre toplam öğrenci sayısı kaçtır?*

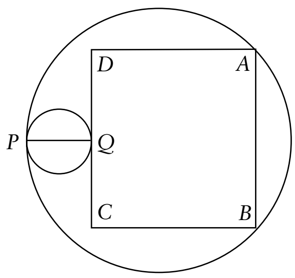


Yanıt. $ax = 7(a - x)$ eşitliğinden

$$x=\frac{7a}{a+7}=7-\frac{49}{a+7}$$

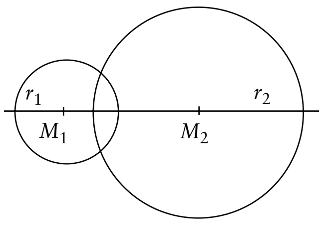
çıkar. 49'un bölünebildiği sayılar ± 1, ± 7 ve ± 49 olduğu için a sayısı -6, -8, 0, -14, 42 veya -56 olmalıdır. Pozitif olduğundan $a = 42$, buradan da öğrenci sayısı bulunur $a^2 = 42^2 = 1764$.

Soru 24. *Yandaki şekildeki çapları 20 ve 5 birim olan çemberler P noktasında teğettirler. PQ küçük çemberin çapıdır. $ABCD$, A ve B noktaları büyük çember üzerinde olan bir karedir. CD doğrusunun Q noktasında küçük çembere teğet olduğu bilindiğine göre, AB uzunluğu kaç birimdir?*



Yanıt. $AB = x$ alalım. O büyük çemberin merkezi olmak üzere, hipotenüsü AO olan üçgende Pisagor bağıntısı kullanıldığında $10^2 = (x/2)^2 + (x - 5)^2$, buradan da $x = 4 + 2\sqrt{19}$ bulunur.

Soru 25. $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 20$ ve $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 49$ *çemberlerinin birbirine en uzak noktaları arasındaki uzaklık ne kadardır?*



Yanıt. Merkez ve yarıçaplar için $M_1(-1,\ 2)$, $M_2(3,\ 5)$, $r_1 = 5$, $r_2 = 7$ bulunacağından, $M_1M_2 = 5$ ve dolayısıyla istenen değer $r_1 + M_1M_2 + r_2 = 5 + 5 + 7 = 17$ olur.

Soru 26. *a, b, c ve d pozitif tamsayılardır. $a!/b! = 72$ ve $c! + d! = 121$ ise $a + b + c + d$ toplamının en küçük değeri kaçtır?*

Yanıt. $a!/b! = 72 = 8\times 9 = 9!/7!$ ve $c! + d! = 121 = 5! + 1!$ eşitliklerinden $a = 9$, $b = 7$, $c = 5$ ya da 1, $d = 1$ ya da 5 çıkar. Dolayısıyla, $a + b + c + d = 22$.

Soru 27. *n pozitif tamsayı olduğuna göre,*

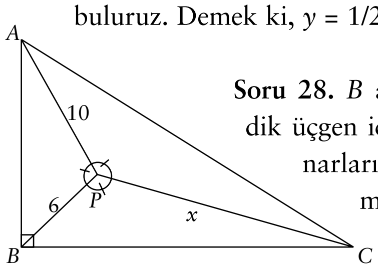
$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\log_2 n}}$$

ifadesinin alabileceği değerler nelerdir?

Yanıt. $y = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\log_2 n}}$ olsun. O zaman, her iki tarafın da logaritmasını alarak,

$$\log_2 y = \frac{1}{\log_2 n}\log_2\left(\frac{1}{n}\right) = -1$$

buluruz. Demek ki, $y = 1/2$.

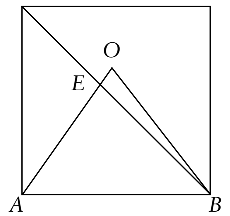


Soru 28. *B açısı dik açı olan bir dik üçgen içindeki P noktası kenarları aynı açı altında görmektedir. $|PA| = 10$ cm, $|PB| = 6$ cm olduğuna göre $|PC| = x$ kaç cm olur?*

Yanıt. P noktası kenarları 120°lik açıyla göreceği için, kosinüs teoreminden

$AB^2 = 10^2 + 6^2 + 60,$
$BC^2 = x^2 + 6^2 + 6x,$
$AC^2 = x^2 + 10^2 + 10x$

eşitlikleri çıkar. Şimdi Pisagor Teoremi'nden $x = 33$ bulunur.



Soru 29. *Şekildeki $ABCD$ karesi içine yerleştirilen OAB eşkenar üçgeninden DB köşegeniyle ayrılan OEB üçgensel bölgesi için* Alan(OEB)/Alan$(ABCD)$ *alanlar oranı kaçtır?*

Yanıt. $AB = a$ diyelim. EAB'nin h yüksekliği için şekilden hemen $h/\sqrt{3} + h = a$ ve dolayısıyla $h = a\sqrt{3}/(\sqrt{3}+1)$ bulunur.

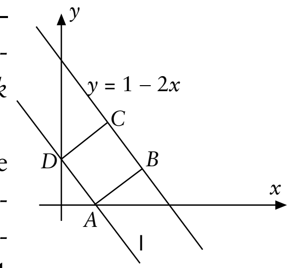
$$\text{Alan}(EAB) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$$

olduğundan, istenen oran

$$\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{2\sqrt{3}-3}{4}$$

bulunur.

Soru 30. *Aşağıdaki şekildeki $y = 1 - 2x$ doğrusuna paralel çizilen l doğrusu ile oluşan $ABCD$ kare olmaktadır. Buna göre l doğrusunun denklemi nedir?*



Yanıt. l doğrusu $y = 1 - 2x$ doğrusuna paralel olduğundan denklemi $y + 2x = k$ dir.

l doğrusu $D(0,\ k)$ ve $A(k/2,0)$ noktalarından geçtiğinden $|AD|^2 = 5k^2/4$ dir. Ayrıca $D(0,\ k)$ noktasının $y = 1 - 2x$ doğrusuna olan uzaklığın karesi

$$\left(\frac{1-k}{\sqrt{1+4}}\right)^2$$

olduğu için

$$\left(\frac{1-k}{\sqrt{1+4}}\right)^2 = \frac{5}{4}k^2$$

ve buradan $k = 2/7$ elde edilir. İstenen denklem $y + 2x = 2/7$ olur. ♥