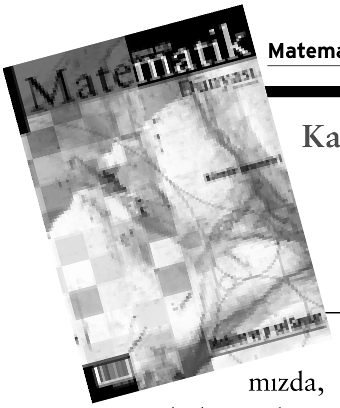


Kapak Konusu: Modüler ve *p*-sel Sayılar

Gerçel Sayılarla *p*-sel Tamsayılar Arasındaki Benzerlik

I. Ağaç. Geçen yazılarımızda, sayılardan yola çıkarak bir ağaç bulmuştuk. Bu kez tam tersini yapacağız, bir ağaçtan yola çıkıp sayıları bulacağız, üstelik hem gerçel sayıları hem de *p*-sel tamsayıları bulacağız, yani bir taşla iki kuş vurmuş olacağız. Böylece *p*-sel sayılarla gerçel sayılar arasında oldukça yakın bir bağ olduğu anlaşılacak. Nitekim oldukça ileri düzey matematikte, birçok teorem önce daha aşina olduğumuz gerçel sayılar için kanıtlanır, sonra aynı teorem ya da bu teoremin bir benzeri *p*-sel sayılar (bknz, sayfa 46) için kanıtlanmaya çalışılır.

Ağacımızın bir kökü (başlangıç noktası) olsun ve bu kökten itibaren ağacımız her adımda üç dala ayrılsın (bknz. aşağıdaki şekil) ve böylece hiç durmadan sonsuza dek büyüsün.

Ağacımızı üç dala değil de, sadece iki, ya da daha fazla, örneğin dört ya da beş dala da ayırabilirdik, pek bir şey farketmezdi. Biz, önümüzde somut bir örnek olması için üçlü ağaç üzerinde çalışacağız.

Ağacın üçe ayrıldığı yerlere budak diyelim. En dipte tek bir budak var, ağacın kökü olan budak. Bu budaktan üç yeni dal ve üç yeni budak doğar, bu budaklar birinci kuşak budaklardır. İkinci kuşakta 9 budak, üçüncü uşakta 27 budak, ve genel olarak *n*-inci kuşakta 3^n tane budak bulunur.

Budaklarımıza matematiksel adlar verelim. En alttaki budağı (yani kökü) boşdizi anlamına gelen ⟨ ⟩ simgesiyle gösterelim.

Bu en alttaki budağın (yani kökün) üstündeki birinci kuşak budaklara soldan sağa doğru 0, 1 ve 2 adlarını verelim.

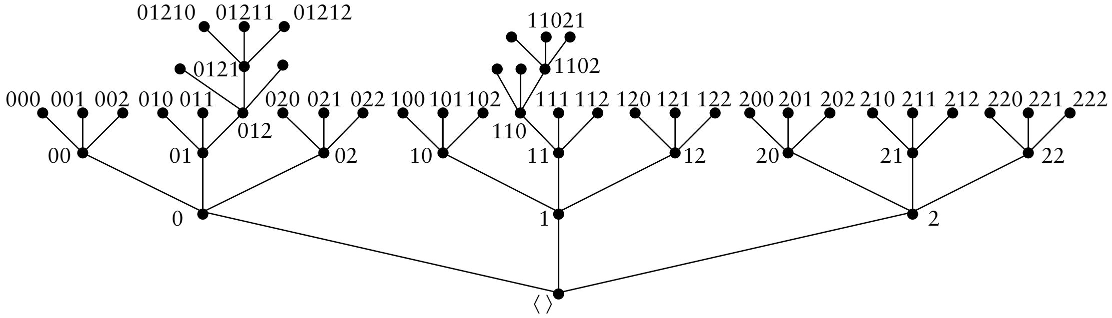
İkinci kuşak budaklara da yine soldan sağa doğru 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22 adlarını verelim. 0 budağının hemen üstündeki üç budağın adı soldan sağa 00, 01 ve 02'dir; 1 budağının hemen üstündeki üç budağın adı, gene soldan sağa doğru 10, 11 ve 12'dir...

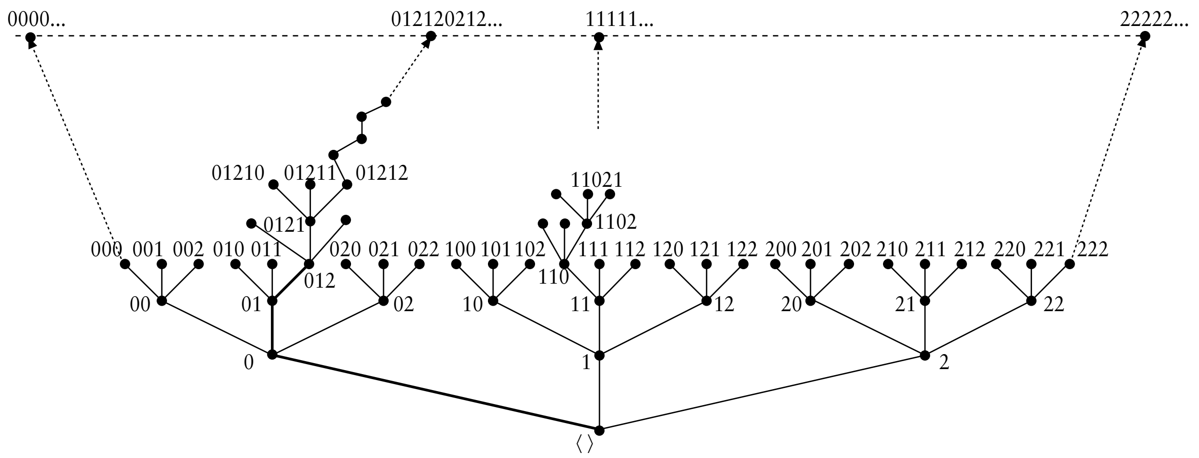
Böylece her budağa bir ad verilmiş olur. Örneğin, dördüncü kuşakta bulunan 0121 budağının üstündeki üç budağın adları sırasıyla 01210, 01211 ve 01212'dir. Her *x* budağının üstünde soldan sağa doğru *x*0, *x*1, *x*2 budakları vardır.

Görüldüğü gibi her budak sonlu bir 0-1-2-dizisine tekabül eder ve her sonlu 0-1-2-dizisi bir budağa tekabül eder.

Budağın adı aslında budağın adresidir. Bu ad bilindiğinde, kökten başlayarak budağa erişebiliriz, 0 gördüğümüzde sola, 1 gördüğümüzde dümdüz, 2 gördüğümüzde sağa gideriz. Örneğin 0112'yle başlayan budaklar başlangıçta sol-orta-orta-sağ diye giden budaklardır.

II. Sonsuz Dallar ve Ufuk. Şimdi bu ağacın, kökten başlayarak sonsuza kadar hiç durmadan giden sonsuz dallarını ele alalım. Bu dalları bir sonraki sayfadaki şekilde görebilirsiniz. Örneğin en soldaki sonsuz dal 00000... dalıdır. En sağdaki sonsuz dal da 22222... dalıdır. Bu iki sonsuz dalın arasında 1012121012... gibi başka birsürü sonsuz dal vardır. Her sonsuz dal, sonsuz bir 0-1-2 dizisiyle verilmiştir. Sol yolu 0'la, orta yol 1'le, sağ yolu da 2'yle simgeliyoruz her zaman yaptığımız gibi. 0'la başlayan dallar başlangıçta sola giden dallardır. 012'yle başlayan dallar başlangıçta önce sol yolu, sonra orta yolu, sonra da sağ yolu seçen dallardır





(yukardaki şekilde koyu renkle gösterilmiş.) 1111... dalı sağa sola sapmadan hep orta yolu seçen daldır.

Sonsuz dalları kökten başlayıp sonsuza kadar giden bir yol olarak görebileceğimiz gibi, yukardaki şekilde olduğu gibi ta ufukta bir nokta olarak da görebiliriz. (Ufku hayal edin!)

"Ufuk çizgisi"ni çizelim (yukarda yatay ve nokta-nokta gösterilen doğru). Ufuk çizgisinin en solundaki nokta, durmadan sola giden 00000... sonsuz dalını simgeler. Ufuk çizgisinin en sağındaki nokta ise durmadan sağa giden 22222... sonsuz dalını simgeler. Bu iki ucun "ortası"ndaki nokta da 11111... adlı hep-orta-yol dalını simgeler. Bunların dışında, yukardaki şekildeki ufuk çizgisine bir de rastgele bir nokta koyduk, 012120212 diye başlayan sonsuz bir dalı simgeleyen nokta.

Ufuk noktalarından oluşan kümeye, yani ufuk çizgisine U adını verelim. U'nun her elemanı kökten başlayıp sonsuza kadar giden bir yoldur, başka bir deyişle, 0112012100... gibi sonsuz bir 0-1-2 dizisidir.

Yazının anafikrine gelelim: Tanımladığımız U kümesi [0, 1] gerçel sayı aralığını çok andırır. Bu yazıda, U'nun [0, 1] gerçel sayı aralığına ne derece ve neden benzediğini göreceğiz. Daha sonra, U'nun daha önce tanımlanan 3-sel sayılar kümesi $\mathbb{Z}_3$'e benzediğini göreceğiz.

III. Sıralama. Sonsuz dallarımızı (yani ufuk noktalarımızı, yani U kümesini) soldan sağa doğru sıralayabiliriz. En "küçük" ufuk noktası en soldaki 00000... noktasıdır. En "büyüğü" de en sağdaki 22222... noktasıdır. Bütün diğer ufuk noktaları bu iki uç ufuk noktası arasında yer alır. Örneğin 1012010'la diye başlayan ufuk noktaları 1012011'la başlayan ufuk noktalarından daha "küçük"tür, çünkü daha soldadırlar.

Sıralamanın matematiksel tanımı şöyle: Eğer

$$a_1a_2a_3 \ldots a_ia_{i+1} \ldots \text{ ve } b_1b_2b_3 \ldots b_ib_{i+1} \ldots$$

(burada $a_i, b_i \in \{0, 1, 2\}$) birbirinden değişik iki ufuk noktasıysa, yani iki değişik sonsuz dalsa, bu iki sonsuz dalın ayrıştıkları ilk yere bakalım: Diyelim,

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \ldots,\ a_i = b_i$$

ama

$$a_{i+1} < b_{i+1}.$$

O zaman

$$a_1a_2a_3 \ldots a_i\, a_{i+1} \ldots$$

sonsuz dalının

$$b_1b_2b_3 \ldots b_ib_{i+1} \ldots$$

sonsuz dalından daha "*küçük*" olduğunu söyleyelim ve bunu,

$$a_1a_2a_3 \ldots a_ia_{i+1} \ldots < b_1b_2b_3 \ldots b_ib_{i+1} \ldots$$

olarak yazalım. Örneğin,

$$\begin{aligned}0000\ldots &< 0001111111\ldots < 0001112000\ldots\\ &< 0001112100\ldots < 0001112101\ldots\\ &< 1000000000\ldots < 1001000000\ldots\end{aligned}$$

Böylece sonsuz dalları (ufuktaki noktaları) küçükten büyüğe (ya da soldan sağa) sıralamış oluruz.

111111... adlı hep-orta-yol ufuk noktası ufuk noktalarının "tam ortasında" yer alır. 101.. diye başlayan ufuk noktaları bunun solundadır, yani bundan daha küçüktürler, ama 112... diye başlayan ufuk noktaları 111111...'den daha büyüktür.

[0, 1] gerçel sayı aralığı da bilindiği gibi sıralıdır. 0, bu aralığın en küçük sayısıdır, 1 de en büyüğü. "Tam ortada" 1/2 sayısı vardır. U'nun sıralaması [0, 1] aralığının sıralamasını andırır, ama tam aynı sıralama değildir, aralarında ufacık bir ayrım vardır. Önce aralarındaki ayrımı görelim, daha sonra benzerliklerini gösteririz.

IV. Aradaki Ayrım. Tamsayılar kümesinde, her tamsayıdan hemen sonra gelen bir tamsayı vardır: n tamsayısından hemen sonra $n + 1$ sayısı gelir.

Öte yandan [0, 1] gerçel sayı aralığında hiçbir sayıdan hemen sonra gelen bir sayı yoktur: Eğer $a < b$ iki gerçel sayı ise, a'dan büyük ama b'den küçük bir gerçel sayı vardır, örneğin $(a + b)/2$ sayısının bu özelliği vardır: a'dan büyüktür ama b'den küçüktür. Aynı şey kesirli sayılar için de geçerlidir.

Yukarda tanımladığımız U kümesinin birçok elemanı da bu özelliği sağlar, yani U'nun birçok elemanından "hemen sonra" gelen bir eleman yoktur. Örneğin, biraz düşününce görüleceği üzere, 0101010101... ufuk noktasından hemen sonra gelen bir ufuk noktası yoktur, yani 0101010101...'den daha büyük ufuk noktalarının en küçüğü yoktur. Nitekim eğer

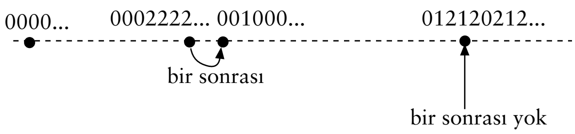
$$0101010101... < a_1a_2 \ldots a_i a_{i+1} \ldots$$

ise,

$$01010101 \ldots < b_1b_2 \ldots b_i b_{i+1} \ldots < a_1a_2 \ldots a_i a_{i+1} \ldots$$

eşitsizliğini sağlayan bir $b_1b_2 \ldots b_ib_{i+1} \ldots$ ufuk noktası bulmak oldukça kolaydır. (Okura alıştırma.)

Öte yandan, gerçel sayıların aksine, bazı ufuk noktalarından hemen sonra gelen bir ufuk noktası vardır. Bunlar da, 1011222222... gibi bir zaman sonra hep 2 olan ufuk noktalardır: 1011222222... ufuk noktasından hemen sonra 10120000... ufuk noktası gelir, bu ikisinin arasında başka ufuk noktası yoktur. Sonu hep 2 olan ufuk noktalarından sadece en sondakinden (yani en sağdaki 2222... ufuk noktasından) hemen sonra gelen bir nokta yoktur.



V. En Küçük Üstsınır. Şimdi [0, 1] gerçel sayı aralığıyla U arasındaki benzerliği görelim.

Eğer $X \subseteq U$ ise, X'in hiçbir elemanından daha küçük olmayan ufuk noktalarına X'in **üstsınırı** adını verelim; yani eğer $a \in U$,

$$\text{her } x \in X \text{ için, } x \leq a$$

özelliğini sağlıyorsa, o zaman a'ya X'in bir üstsınırı diyelim.

Örneğin X, içinde hiç 2 olmayan (yani hep sol ya da orta yolu seçen) ufuk noktaları kümesiyse, o zaman 2'yle başlayan her ufuk noktası X'in bir üstsınırıdır. Ama 12'yle ya da 112'yle başlayan her ufuk noktası da X'in bir üstsınırıdır. 1112'yle başlayan ufuk noktaları bu üstsınırlardan daha küçük üstsınırlardır. Öte yandan 10220'la başlayan bir ufuk noktası X'in üstsınırı değildir, çünkü X'in 11000... elemanı bu elemandan daha büyüktür. Kolayca görüleceği üzere 11111... ufuk noktası X'in bir üstsınırıdır ve X'in üstsınırlarının en küçüğüdür.

Eğer a, X'in bir üstsınırıysa, a'dan büyük bir ufuk noktası da elbette X'in bir üstsınırıdır.

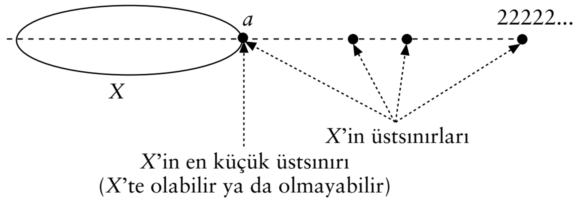
U'nun her altkümesinin bir üstsınırı vardır, örneğin en sondaki 22222... ufuk noktası her altkümenin bir üstsınırıdır ve üstsınırların en büyüğüdür. Dolayısıyla üstsınır bulmak bir marifet değildir. Marifet, üstsınırların en küçüğünü bulmaktır.

X'in üstsınırlarının en küçüğüne (eğer varsa, ki vardır, birazdan kanıtlayacağız bunu!) ***en küçük üstsınır*** diyelim. Yani $a \in U$,

(i) her $x \in X$ için $x \leq a$, ve

(ii) her $b \in U$ ve her $x \in X$ için, $x \leq b$ ise o zaman $a \leq b$

özelliklerini sağlıyorsa, o zaman a'ya X'in ***en küçük üstsınırı*** diyelim.



Buradaki (i) koşulu a'nın X'in bir üstsınırı olduğunu söyler; (ii) koşulu ise a'nın tüm üstsınırlardan küçükeşit olduğunu söyler; yani a gerçekten üstsınırların en küçüğüdür.

Teorem 1. *U'nun her altkümesinin bir en küçük üstsınırı vardır.*

Kanıt: X, U'nun bir altkümesi olsun. Eğer $X = \varnothing$ ise, elbette en soldaki 00000... noktası X'in en küçük üstsınırıdır[1]. Bundan böyle X'in boşküme olmadığını varsayalım.

Eğer $x \in U$ ise, x_i, x'in i-inci rakamı olsun. Elbette x_i, ya 0 ya 1 ya da 2'dir. Şimdi,

$$a_0 = \max\{x_0 : x \in X\}$$

olsun. a_0, elbette ya 0, ya 1, ya da 2. Devamla,

$$a_1 = \max\{x_1 : x_0 = a_0 \text{ ve } x \in X\}$$

1 Bazı okurlar 00000... elemanının boşkümenin üstsınırı olduğunu anlamakta zorlanabilirler. Bunun kanıtında mantık oyunu gibi bir şey vardır: Eğer 00000... elemanı boşkümenin bir üstsınırı olmasaydı, o zaman boşkümede 00000...'dan daha büyük bir eleman olmak zorunda olurdu, ki boşkümede hiç eleman olmadığından bu mümkün değildir.

olsun. Yani a_1, X'in a_0'la başlayan elemanlarının ikinci rakamlarının en büyüğü.

$$a_2 = \max\{x_2 : x_0 = a_0,\ x_1 = a_1 \text{ ve } x \in X\}$$

olsun. Yani a_2, X'in a_0a_1'le başlayan elemanlarının üçüncü rakamlarının en büyüğü. Genel olarak, a_k, X'in $a_0a_1...a_{k-1}$ ile başlayan elemanlarının $(k+1)$-inci rakamlarının en büyüğü olsun. O zaman, kolayca kanıtlanacağı üzere,

$$a_0a_1...a_{k-1}a_k...$$

elemanı X kümesinin en küçük üstsınırıdır. □

[0, 1] gerçel sayı aralığının her altkümesinin de bir en küçük üstsınırı vardır ve gerçel sayıların bu özelliği onları kesirli sayılardan ayıran özelliktir. Örneğin,

$$\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \le 1/2\}$$

kümesinin kesirli sayılar kümesinde en küçük bir üstsınırı yoktur, ama gerçel sayılar kümesinde vardır: $1/\sqrt{2}$.

[0, 1] gerçel sayı aralığının her altkümesinin bir en küçük üstsınırı olduğunu matematiksel olarak şu anda kanıtlayamayız, çünkü bunu kanıtlayabilmemiz için gerçel sayı kümesinin tanımını bilmemiz lazım, ki bugüne dek bu tanımı hiç vermedik. Okullarda da pek verilmez. Ama yakın bir gelecekte gerçel sayıların matematiksel tanımını MD'de bulacaksınız. Sakın ayrılmayın!

Öte yandan, kanıtlayamayacağımızı söylediğimiz bu olguyu birazdan kanıtlayacağız! Bir anlamda kanıtlayacağız... Okuyan görür! Teoremi önce kanıtlayacağız, ardından verdiğimiz kanıtın sorunundan sözedeceğiz.

Gerçel sayılarla U arasındaki benzerliği gördük. Şimdi bu benzerliğin nedenini araştıralım.

VI. Neden Benziyorlar? [0, 1] gerçel sayı aralığını eşit uzunlukta üç aralığa bölelim:

$$[0, 1/3),\ [1/3, 2/3),\ [2/3, 1].$$

0'la 1 arasındaki her gerçel sayı bu üç aralıktan birine ve sadece birine düşer. Diyelim r gerçel sayısı en soldaki aralığa, yani [0, 1/3) aralığına düştü. Şimdi bu [0, 1/3) aralığını da eşit uzunlukta üç aralığa bölelim:

$$[0, 1/9),\ [1/9, 2/9),\ [2/9, 1/3).$$

Diyelim r gerçel sayısı bu sefer ortadaki [1/9, 2/9) aralığına düştü. Bu aralığı da eşit uzunlukta üç aralığa bölelim:

$$[1/9, 4/27),\ [4/27, 5/27),\ [5/27, 2/9)$$

ve r'nin hangi aralığına düştüğüne bakalım. Diyelim r bu sefer en sağdaki [5/27, 2/9) aralığına düştü. Bu sefer bu [5/27, 2/9) aralığını üç parçaya böleceğiz. Bunu böylece hiç durmadan sürdürürsek, r'yi düştüğü sol-orta-sağ aralıklarına göre bir 0-1-2-dizisi olarak gösterebiliriz. Örneğimizdeki r, 0-1-2-dizisi olarak gösterildiğinde, bu gösterim 012 diye başlar (önce sol, sonra orta, sonra sağ).

Örneğin 0'la 1'in "tam ortası"ndaki 1/2 gerçel sayısı, bu yöntemle 1111... ufuk noktasına tekabül eder, çünkü 1/2 hep orta aralığa düşer.

0, elbette en soldaki 0000... dizisine, 1 de en sağdaki 2222... dizisine tekabül eder.

Demek ki [0, 1] aralığının her gerçel sayısı bu sayede U'nun tek bir elemanı (yani bir ufuk noktası, yani bir 0-1-2-dizisi) olarak görülebilir.

Ayrıca U'nun sıralaması [0, 1] aralığının sıralamasıyla tutarlıdır; bir başka deyişle, eğer gerçel sayılarda $a < b$ ise ve a ve b gerçel sayıları sırasıyla α'ya ve β'ye tekabül eden ufuk noktalarıysa, o zaman $\alpha < \beta$'dır, çünkü eğer $a < b$ ise, belli bir n için (aslında $b - a > 1/3^n$ eşitsizliğini sağlayan n'ler için), a ve b sayıları, [0, 1] aralığını böldüğümüz $1/3^n$ uzunluktaki aralıklardan aynısına düşmezler, a'nın düştüğü aralık b'nin düştüğü aralıktan daha soldadır.

Peki U'nun her elemanı bu yöntemle [0, 1] aralığının bir gerçel sayısı olarak görülebilir mi? Hemen hemen... Ama hepsi değil... En sağdaki 22222... dışında, sonu hep 2'yle biten (yani "hemen bir sonrası" olan) ufuk noktaları bu yöntemle hiçbir gerçel sayıya tekabül etmezler (doğal olarak...) Ama diğer ufuk noktalarının hepsi bu yöntemle bir gerçel sayıya tekabül ederler.

Örnek olarak 01010101... ufuk noktasının hangi gerçel sayıya tekabül ettiğini bulalım: 01010101... ufuk noktası,

$$0\cdot 1/3 + 1\cdot 1/9 + 0\cdot 1/27 + 1\cdot 1/81 + 0\cdot 1/243 + ...$$
$$= \textstyle\sum_{n\ge 1} 1/3^{2n} = \sum_{n\ge 1} 1/9^n$$
$$= (1/9)\textstyle\sum_{n\ge 0} 1/9^n = (1/9)/(1-1/9) = 1/8$$

ufuk noktasına tekabül eder. 012012012... ufuk noktasının hangi gerçel sayıya tekabül ettiğini okur herhalde bulabilir.

VII. Daha da İlginci. U kümesi, geçen yazılarımızda sözünü ettiğimiz, $a_i \in \{0, 1, 2\}$ için,

$$a_0 + a_1 3 + a_2 3^2 + ... + a_n 3^n + ...$$

biçiminde yazılan 3-sel tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}_3$'e de benzer. Gerçekten de U kümesinin her elemanını 3-sel bir tamsayı olarak görmek zor değildir, örneğin 01010101... ufuk noktasını

$$0 + 1\cdot3 + 0\cdot3^2 + 1\cdot3^3 + 0\cdot3^4 + 1\cdot3^5 + ...$$

3-sel sayısı olarak görebiliriz. Bu yöntemle 3'sel sayılar kümesi $\mathbb{Z}_3$'le U arasında bir eşleme bulunur.

Böylece [0, 1] gerçel sayı aralığıyla p-sel sayılar arasında bir ilişki ortaya çıktı. Oldukça şaşırtıcı bir benzerliktir.

VIII. [0, 1] Aralığında En Küçük Üstsınır Bulmak. Şimdi, [0, 1] gerçel sayılar aralığında her altkümenin bir en küçük üstsınırı olduğunu "kanıtlayalım".

Teorem. [0, 1] *gerçel sayı aralığının her altkümesinin bir en küçük üstsınırı vardır.*

Kanıt: Aynen bir önceki kanıttaki gibi yapacağız. X, [0, 1] gerçel sayılar aralığının herhangi bir altkümesi olsun. Daha önceki kanıtta olduğu gibi X'in boşküme olmadığını varsayabiliriz. Ayrıca X'in 1'i de içermediğini varsayabiliriz, çünkü aksi taktirde, 1, X'in en küçük üstsınırıdır.

Eğer $x \in [0, 1)$ ise, x_i, x'in onluk tabanda yazılımının virgülden sonraki i-inci rakamı olsun. Elbette x_i, 0'dan 9'a kadar bir rakam. Şimdi,

$$a_0 = \max\{x_0 : x \in X\}$$

olsun. Devamla,

$$a_1 = \max\{x_1 : x_0 = a_0 \text{ ve } x \in X\}$$

olsun. Yani a_1, X'in $0{,}a_0$'la başlayan sayılarının ikinci rakamlarının en büyüğü.

$$a_2 = \max\{x_2 : x_0 = a_0, x_1 = a_1 \text{ ve } x \in X\}$$

olsun. Yani a_2, X'in $0{,}a_0a_1$'le başlayan sayılarının üçüncü rakamlarının en büyüğü. Genel olarak, a_k, X'in $a_0a_1...a_{k-1}$ ile başlayan sayılarının $(k+1)$-inci rakamlarının en büyüğü olsun. O zaman, kolayca kanıtlanacağı üzere

$$0{,}a_0a_1...a_{k-1}a_k...$$

elemanı X kümesinin en küçük üstsınırıdır. □

Her iki kanıt arasındaki benzerlik bu aşamada artık şaşırtıcı olmamalı. Yukardaki kanıtta onluk tabanda yazılımı aldık. Üçlük tabanda yazılımı alsaydık aynen bir önceki kanıtı elde ederdik. Ne de olsa [0, 1]'i U'nun bir altkümesi olarak görmeyi öğrendik.

Bir önceki sayfada yukarda kanıtladığımız teoremi matematiksel olarak kanıtlayamayacağımzıı söylemiştik, ama kanıtladık! Nasıl yaptık?

Söyleyeyim.

Gerçel sayıların matematiksel değil, sezgisel bir tanımını aldık. Örneğin,

0,5782927215278292032721618028272...

diye sonsuza dek düzensiz giden bir sayının bir gerçel sayı olduğunu varsaydık. Bu varsayım bedava bir varsayımdır, matematiksel bir temeli yoktur. Nitekim, bal gibi de, yukarda varlığını kanıtladığımız X'in üstsınırı böyle bir sayı olabilir. Bu sayının bir gerçel sayı olduğunu bilmemiz için her şeyden önce gerçel sayının ne demek olduğunu bilmemiz gerekir. Oysa biz, MD okurları, daha gerçel sayıların tanımını görmedik! Yakında onu da görürüz. ♦

p-sel Sayılar Cismi $\mathbb{Q}_p$

Sayfa 32'de Teorem 5'te p-sel tamsayılar halkası $\mathbb{Z}_p$'nin birçok elemanının tersinir olduğunu görmüştük. O önsavdan, $\mathbb{Z}_p$ halkasında sadece p'nin çarpımlarının tersinir olmadıkları anlaşılır, diğer elemanların hepsi tersinirdir. Dolayısıyla eğer $\mathbb{Z}_p$ halkasına p^{-1} ya da $1/p$ diye yeni bir eleman ekleyip halka oluşması için gerekeni yaparsak, o zaman bu halkanın bölüm cismini (bkz. MD-2004-II, sayfa 43-46) buluruz. $\mathbb{Z}_p$ halkasının bölüm cismi $\mathbb{Q}_p$ olarak yazılır. $\mathbb{Q}_p$'nin bir elemanına ***p-sel sayı*** denir. p-sel bir sayı, bir $n \in \mathbb{Z}$ ve $a_i \in \{0, 1, ..., p-1\}$ için,

$$\sum_{i=n}^{\infty} a_i p^i$$

olarak yazılır. Görüldüğü üzere, p-sel tamsayılarla p-sel sayılar arasındaki tek fark, n'nin p-sel tamsayılarda bir doğal sayı, ama p-sel sayılarda belli bir sayıdan büyük bir **tamsayı** olmasıdır. p-sel sayılar cismi $\mathbb{Q}_p$'de toplama, çıkarma ve çarpma aynen $\mathbb{Z}_p$'deki gibi doğal biçimde tanımlanır.

Eğer $p \neq 2$ ise, $\mathbb{Z}_p$'de $x^p = 1$ denkleminin tek bir çözümü vardır: $x = 1$. Bu, bu sayıda kanıtladığımız Hensel Önsavı'ndan ve

$$x^p - 1 = (x - 1)(x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1)$$

eşitliğinden kolaylıkla çıkar. Bu denklemin $\mathbb{Q}_p$'deki çözümleri $\mathbb{Z}_p$'de olduğundan, aynı şey $\mathbb{Q}_p$ için de geçerlidir.

Öte yandan, $\mathbb{Z}_2$ ya da $\mathbb{Q}_2$'de kareleri bulmak için burada kanıtladığımız Hensel Önsavı'nın biraz daha güçlüsü gerekir. $\mathbb{Z}_2$'de karekökü olan elemanlar sadece ve sadece $x \equiv 1 \bmod 8$ denkliğini sağlayan elemanlardır. ♦