

Teoremlerin Sınırları Çizilmeli

Zekâi Sezai

Geçen sayımızda, eğer R bir tek çarpanlama bölgesi (TÇB) ise ve K , R 'nin bölüm cismi ise, o zaman $R[X]$ 'in bir indirgenemezini ya R 'de olduğunu ya da $K[X]$ 'in bir indirgenemezi olduğunu kanıtlamıştınız [MD-2004-II, sayfa 49, Teorem 7]. Ancak bu sonucun TÇB olmayan tamlık bölgeleri için yanlış olduğunu söylememişsiniz: Bir tamlık bölgesi üzerine indirgenemez olan bir polinom, tamlık bölgesinin bölüm cismi üzerine indirgenir olabilir. Teoremin sınırlarının karşıörneklerle çizilmediği sürece teoremin kanıtının eksik kaldığı düşüncesinden hareketle karşıörneği sunuyoruz.

$R = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ve $K = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ olsun. Kolayca görüleceği üzere K bir cisimdir, dolayısıyla K , R 'nin bölüm cismidir. $R[X]$ 'in şu polinomlarını tanımlayalım:

$$g(X) = 2X^2 + (5 - \sqrt{5})X + (\sqrt{5} + 1),$$

$$h(X) = 2X + \sqrt{5} - 1,$$

$$f(X) = X^3 + 2X^2 + 2(-1 + \sqrt{5})X + 1.$$

Çarpınca kolayca görüleceği üzere,

$$4f(X) = g(X)h(X) \quad (*)$$

eşitliği sağlanır.

Sav 1. g polinomu K üzerine indirgenemezdir, yani g , $K[X]$ halkasının sabit (yani tersinir ya da 0) olmayan iki polinomunun çarpımı olarak yazılmaz.

Kanıt: Eğer g , K üzerine indirgenir olsaydı, o zaman g , $K[X]$ 'ten iki tane birinci dereceden polinomun çarpımı olarak yazılırdı, dolayısıyla g 'nin K 'de bir kökü olurdu. g ikinci dereceden bir polinom olduğundan, g 'nin K 'de kökü olması demek, g 'nin diskriminantı olan

$$(5 - \sqrt{5})^2 - 8(\sqrt{5} + 1)$$

elemanının, yani $22 - 18\sqrt{5}$ 'in K 'de bir tamkare olması demektir. Ama, normun tanımından dolayı [MD-2004-I, sayfa 22],

$$N(22 - 18\sqrt{5}) = 22^2 - 18^2 \times 5 = 484 - 1620 < 0.$$

Oysa bir karenin normu da kare olmak zorundadır. Demek ki g 'nin diskriminantı K 'de bir kare olamaz, yani g 'nin K 'de bir kökü yoktur, dolayısıyla g polinomu K üzerine indirgenemezdir. \square

Sav 2. f , $R[X]$ 'in bir indirgenemezidir.

Kanıt: f başkatsayısı 1 olan bir polinom oldu-

ğundan, f , R 'nin bir indirgenemeye bölünemez. Dolayısıyla, eğer f , $R[X]$ 'te indirgenir olsaydı, f , $R[X]$ 'in derecesi 0'dan büyük ve başkatsayıları R 'de tersinir olan iki polinomunun çarpımı olurdu. Ayrıca, f üçüncü dereceden olduğundan, çarpımı olduğu polinomlardan biri, birinci dereceden olurdu. Böylece f 'yi bölen bu birinci dereceden polinomun ve dolayısıyla f 'nin de R 'de bir kökü olurdu. Bu kök (1)'den dolayı ya g 'nin ya da h 'nin kökü olurdu. Ama g 'nin K 'de (Sav 1'den dolayı), h 'nin de R 'de (h 'nin tanımından dolayı) kökü yok. \square

Öte yandan (1)'den dolayı f , K üzerine indirgenir bir polinomdur. Görüldüğü üzere bir R tamlık bölgesi üzerine indirgenemez olan bir polinom, bölüm cismi üzerine indirgenir olabiliyor.

Alıştırma. g 'nin R üzerine de indirgenemez olduğunu kanıtlayın.

Bu örneği biraz işleyerek beklenmedik bir başka durum daha yaratabiliriz. Öyle $R \leq K \leq F$ bulaçığı ki,

R bir tamlık bölgesi olacak,

K ve F birer cisim olacaklar,

K , R 'nin bölüm cismi olacak,

F 'de R üzerine tam olan bir a eleman olacak, ama a 'nın R üzerine 1 başkatsayılı minimal polinomu (ki bu polinomun R üzerine indirgenemez olması gerektiğini biliyoruz, bkznz. MD-2004-I, sayfa 36), K üzerine indirgenir olacak.

İşte buna örnek: R , K , g ve f yukardaki gibi olsun. $F = K[X]/\langle g \rangle$ olsun. Elbette $R \leq K \leq F$. g polinomu $K[X]$ 'te bir indirgenemez olduğundan F bir cisimdir. a , X 'in F 'deki imgesi olsun. O zaman $g(a) = 0$ 'dır ve g , a 'nın K (ya da R) üzerine minimal polinomudur.

(1)'den dolayı $f(a) = 0$, dolayısıyla a , R üzerine tam bir elemandır. f , R üzerine indirgenemez olduğundan, f , a 'yı sıfırlayan, R katsayılı ve 1 başkatsayılı en küçük dereceli polinomdur.

Burada dikkati çekmek istediğimiz husus g ve f polinomlarının değişik olmalarıdır. \blacklozenge