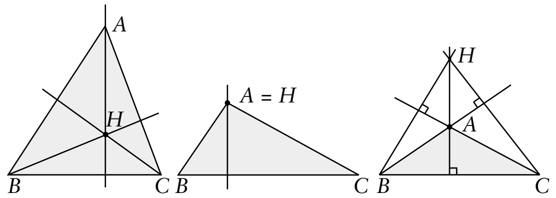
Geometri Köşesi

Mustafa Yağcı
yagcimustafa@yahoo.com

Diklik Merkezi

Bir üçgenin üç yüksekliği daima tek noktada kesişir. Bu noktaya üçgenin ***diklik merkezi*** denir.

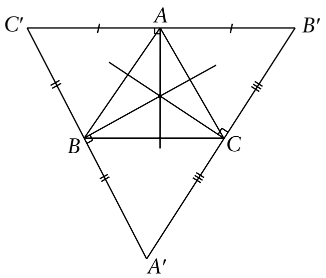


Diklik merkezi genelde H ile gösterilir. Üçgen daraçılı ise diklik merkezi üçgenin içinde, geniş açılı ise dışındadır. Eğer üçgen dik ise diklik merkezi dik kenarların kesiştiği köşedir.

Önce yüksekliklerin neden noktadaş olduğunu gösterelim, daha sonra da diklik merkezinin üçgenin içinde, üstünde veya dışında olmasının neden üçgenin açılarına bağlı olduğuna ilişkin bir yorum getirelim.

Teorem. *Bir üçgende üç yükseklik noktadaştır.*

Kanıt: Bir ABC üçgeni alalım. Aşağıdaki şekildeki gibi ABC üçgeninin ters-orta üçgeni olan $A'B'C'$ üçgenini çizelim, yani öyle bir $A'B'C'$ üçgeni çizelim ki ABC üçgeni onun orta üçgeni (kenar orta noktalarını köşe kabul eden üçgen) olsun.



Bir üçgenin üç köşesinden bir çember geçtiğinden (üçgenin çevrel çemberi) ve bu çemberin merkezi üçgenin üç kenarına eşit uzaklıkta olduğundan, bir üçgenin kenar orta dikmeleri (çevrel çemberin merkezinde) kesişirler. Bu, özel olarak $A'B'C'$ üçgeninde de böyle. Orta üçgenin kenarları asıl üçgene daima paralel olduğundan, $A'B'C'$ üçgeninin kenar orta dikmeleri ABC üçgeninin yükseklikleridir. Teoremimiz kanıtlandı. □

Diklik Merkezi Üçgenin Neresinde? Diklik merkezi üçgenin ne zaman içinde, üstünde veya dışında olur sorusunu yanıtlayalım şimdi: Eğer ABC üçgeni geniş/dar açılı olsaydı $A'B'C'$ üçgeni de ABC üçgenine benzer olduğundan geniş/dar açılı olacaktı. Böyle üçgenlerin çevrel çember merkezinin üçgenin dışında/içinde olacağını biliyoruz. O halde diklik merkezi de üçgenin dışında/içinde olur. Eğer ABC bir dik üçgen olsaydı, $A'B'C'$ üçgeni de dik üçgen olurdu ki çevrel çember merkezi hipotenüsünün orta noktası olacaktı, bu da orta üçgeninin dik köşesidir.

Üçgen Eşitsizliğinin Bir Sonucu

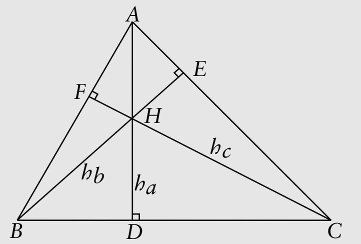
Bilindiği üzere bir üçgenin alanı, taban×yükseklik/2'dir. Demek ki kenarları a, b ve c ve bu kenarlara yükseklikleri sırasıyla h_a, h_b ve h_c olan bir üçgende,

$$ah_a = bh_b = ch_c$$

eşitlikleri geçerlidir, yani yükseklikler kenarlarla ters orantılıdır. Dolayısıyla, $|a - b| < c < a + b$ ve diğer üçgen eşitsizliklerinden,

$$|1/h_a - 1/h_b| < 1/h_c < 1/h_a + 1/h_b,$$
$$|1/h_a - 1/h_c| < 1/h_b < 1/h_a + 1/h_c,$$
$$|1/h_c - 1/h_b| < 1/h_a < 1/h_c + 1/h_b.$$

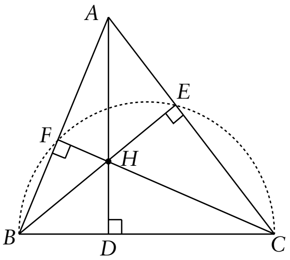
çıkar.



Soru. Bir üçgenin yükseklikleriyle her zaman bir üçgen oluşturulabilir mi? Yani, herhangi bir üçgenin üç yüksekliğini birer kibrit çöpü gibi elime alsam, uçlarını ikişer ikişer birbirine değdirerek her zaman bir üçgen yapabilir miyim?

Benzer soru(lar):

Soru. Bir üçgenin kenarortaylarıyla/içaçıortaylarıyla her zaman bir üçgen oluşturulabilir mi?



Teorem. *Bir üçgende diklik merkezinin yükseklikleri ayırdığı parçaların uzunluklarının çarpımı sabittir.*

Kanıt: Üçgenimiz ABC olsun. Yandaki şekilden takip edelim. FHB i EHC ve AHE i BHD üçgen benzerliklerinden dolayı,

$$FH \times HC = BH \times HE = AH \times HD.$$

Teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Üç Eşitlik Daha. F ve E açıları dik olduklarından, B, F, E, C noktaları çemberseldir; dolayısıyla $m(ACF) = m(ABE)$ ve ACF i ABE. Bundan da,

$$AF \times AB = AE \times AC$$

eşitliğini elde ederiz. (Bu eşitliğe Dış Kuvvet Teoremi de denir.) Durum simetrik olduğundan, aynen yukardaki gibi,

$$BF \times BA = BD \times BC$$
$$CD \times CB = CE \times CA$$

eşitlikleri de geçerlidir.

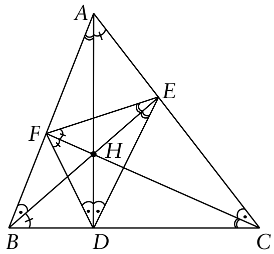
Bir ABC üçgeninin yükseklik ayaklarını köşe kabul eden üçgene ***ortik üçgen*** denir (bkz. aşağıdaki şekil).

Teorem. *ABC üçgeninin diklik merkezi olan H, ortik üçgeninin içteğet çember merkezidir.*

Kanıt: $AEHF$, $FHDB$ ve $EHDC$ dörtgenlerinin birer kiriş dörtgeni olduklarını ve üçgen benzerliklerini kullanarak,

$$m(HEF) = m(HAF) = m(HCD) = m(HED),$$
$$m(HFE) = m(HAE) = m(HBD) = m(HFD),$$
$$m(HDF) = m(HBF) = m(HCE) = m(HDE)$$

elde ederiz. Örneğin, birinci eşitlikten, FD ve FE içteğet çembere teğet olduklarından, FC'nin içteğet çemberin merkezinden geçtiği çıkar. Aynı şey EB ve AD için de geçerlidir. Dolayısıyla bu üç doğrunun kesişimi içteğet çemberin merkezidir. □



Demek ki ABC üçgeninin yükseklikleri ortik üçgenin içaçıortaylarıdır. Aynı zamanda ABC üçgeninin kenarlarının da ortik üçgenin dışaçıortayları olduğu sonucuna varılır. Bu bilgiyi birazdan kullanacağız.

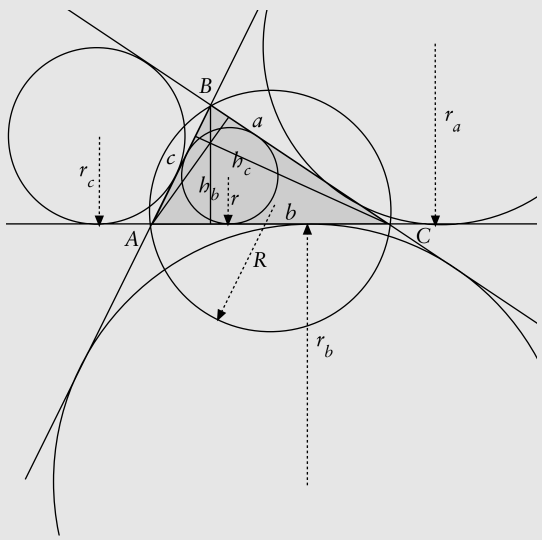
Teorem (Fagnano). *ABC bir üçgen olsun. Her köşesi ABC'nin üç farklı kenarı üzerinde bulunan ABC'nin iç üçgenleri arasında en küçük çevreye sahip olanı üçgenin ortik üçgenidir.*

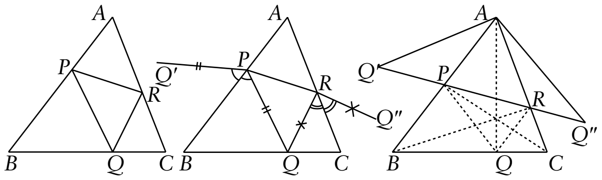
Kanıt. Herhangi bir daraçılı ABC üçgeni çizelim. Kenarları üzerinde rasgele P, Q, R noktaları alıp PQR üçgenini oluşturalım (aşağıda, soldaki şekil). Daha sonra PQ'nün AB'ye göre simetriği olan PQ' ve RQ'nün AC'ye göre simetriği olan RQ'' doğru parçalarını çizelim (ortadaki şekil). Çevre(PQR) = $PQ + PR + RQ = PQ' + PR + RQ''$ olduğundan $PQ' + PR + RQ''$ toplamını ne kadar

Yüksekliklerle İlgili Bağıntılar

Çevre uzunluğu u olan ABC üçgeninin iççember yarıçapı r, çevrel çember yarıçapı R, dışteğet çember yarıçapları r_a, r_b ve r_c ise ve ayrıca a, b, c kenarlarına inen yükseklikler sırasıyla h_a, h_b, h_c , üç açısı α, β ve γ ise,

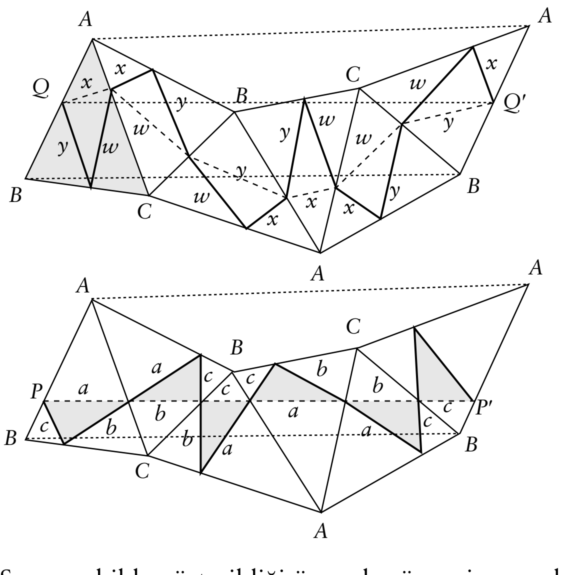
$h_a = c \sin \beta = c(b/2R) = abc/2Ra = 2A(ABC)/a$
$= 2(u(u-a)(u-b)(u-c))^{1/2}/a,$
$h_b = a \sin \gamma = a(c/2R) = abc/2Rb = 2A(ABC)/b$
$= 2(\sqrt{u}(u-a)(u-b)(u-c))^{1/2}/b,$
$h_b = b \sin \alpha = b(a/2R) = abc/2Rc = 2A(ABC)/c$
$= 2(\sqrt{u}(u-a)(u-b)(u-c))^{1/2}/c,$
$1/h_a + 1/h_b + 1/h_c = 1/r,$
$-1/h_a + 1/h_b + 1/h_c = 1/r_a,$
$1/h_a - 1/h_b + 1/h_c = 1/r_b,$
$1/h_a + 1/h_b - 1/h_c = 1/r_c,$
$1/r_a + 1/r_b + 1/r_c = 1/r = 1/h_a + 1/h_b + 1/h_c.$





küçük tutarsak PQR üçgeninin çevresi de o denli küçük olur. Bu da Q', P, R, Q'' noktalarının doğrusallığıyla mümkün. Yani $Q'PRQ''$ kırık çizgisini bir doğru parçası haline getirmeliyiz. Diğer yandan A açısı sabit ve $m(Q'AQ'') = 2 \times m(BAC)$ olduğundan $Q'Q''$ uzunluğunun en küçük olması $Q'A = Q''A$ uzunluklarının mümkün olan en küçük tutulmasıyla mümkün. Bu uzunluklar aynı zamanda QA'ya eşit olduğundan ve QA en küçük değerini h_a olduğu zaman aldığından Q noktası da a kenarına ait yükseklik ayağı olmalı. Aynı işlemleri diğer köşeler için de yaparsak P ve R noktalarının da bulundukları kenarlar ait yükseklik ayakları olması gerektiğini buluruz (en sağdaki şekil). O halde çevrece en küçük üçgen ortik üçgendir. □

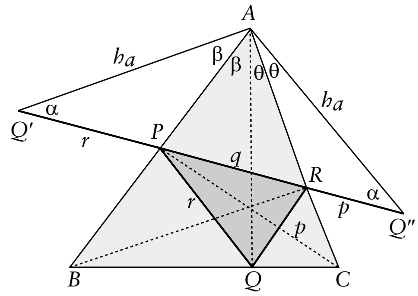
Bir Başka Muhteşem Kanıt. Şimdi aynı teoremin muhteşem bir kanıtına daha hazır olun. Herhangi bir ABC üçgeni çizelim ve köşeleri bu üçgenin farklı kenarları üzerinde olan herhangi bir üçgen daha çizelim. Kenar uzunlukları x, y, w olsun.



Sonra şekilde gösterildiği üzere bu üçgeni sırasıyla farklı kenarları üzerine katlayalım (simetrilerini çizelim). Beşinci katlamadan sonra AB kenarının, ilk üçgeninin AB kenarına paralel bir hal aldığını görürüz. QQ' kırık çizgisinin uzunluğunun $2x + 2y + 2w$, yani içerde çizilen üçgenin çevresinin iki katı olduğuna dikkat ediniz. Şimdi de aynı dönüşümleri, çizilen ilk ABC üçgeninin ortik üçgeniyle yapalım. Ortik üçgeninin kenarları da a, b, c olsun. ABC üçgeninin kenarlarının ortik üçgenin birer dışaçıortayı olduğunu bulmuştuk ya, işte bu, QQ' kırık çizgisini dosdoğru bir doğru yapar (alt şekildeki PP' doğrusu). $2a + 2b + 2c$ toplamının $2x + 2y + 2w$ toplamından küçük olduğu aşikar olduğu gibi olabilecek en küçük değer olduğu da gözler önünde. P noktasından P' noktasına daha kısa bir yol olabilir mi? □

Ortik Üçgenin Çevresi. Bu en küçük çevrenin değeri, yani ortik üçgenin çevresi ne acaba?

Son şekil üzerinde biraz oynama yapacağız.



Uzunluklar ve açılar yukarıdaki şekildeki gibi adlandırılsın. Çok bilinen trigonometrik eşitliklerden ve $Q'AQ''$ üçgeninde sinüs teoreminden,

$$(p + q + r)/2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = (p + q + r)/\sin(2\alpha)$$
$$= (p + q + r)/\sin(2\beta + 2\theta) = h_a/\sin\alpha,$$

yani,

$$(p + q + r)/2\sin(\beta + \theta) = (p + q + r)/2\cos\alpha = h_a$$

elde ederiz; demek ki, PQR üçgeninin çevresi

$$p + q + r = 2h_a\sin(\beta + \theta) = 2h_a\sin A$$

olur. Benzer şekilde PQR üçgeninin çevresi $2h_b\sin B = 2h_c\sin C$ dir.

İlginç Bir Eşitlik

Bulduğumuz bu sonuçlarla biraz oynayalım. Alan(ABC) = $S = ah_a/2$ ve $a/\sin A = 2R$ eşitliklerinden h_a ve $\sin A$ değerlerini çekip yukarda bulduğumuz çevre formülünde yerlerine yazarsak; Çevre(PQR) = $2S/R$ bulunur.

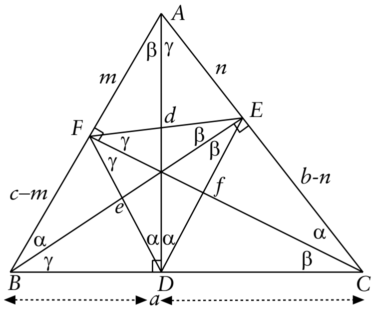
Diğer yandan $S = a \times b \times c/4R$ olduğundan üstteki formülde R yerine $a \times b \times c/4S$ yazarsak,

$$\text{Çevre}(PQR) = 8S^2/a \times b \times c$$
$$= (2S/a) \times (2S/b) \times (2S/c)/S$$
$$= h_a \times h_b \times h_c/S$$

buluruz. Düzenlersek ilginç bir eşitlik buluruz:

$$h_a \times h_b \times h_c = \text{Çevre}(PQR) \times \text{Alan}(ABC).$$

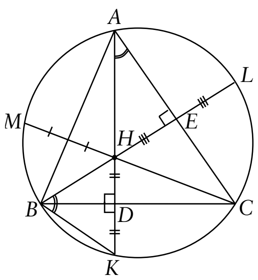
Ortik Üçgenin Kenarları. Peki ortik üçgenin kenarlarını acaba asıl üçgenin kenarları cinsinden yazmak mümkün mü?



ABC üçgeninin kenarları *a*, *b* ve *c* olsun. Ayrıca, |*AF*| = *m* ve |*AE*| = *n* olsun. Ortik üçgen olan *DEF* üçgeninin kenarları da sırasıyla *d*, *e* ve *f* olsun. Açıların şekildeki gibi olduklarını sayfa 57'de görmüştük.

$m(AEF) = 90 - \beta = \alpha + \gamma = m(ABC)$ ve ortak olan *A* açısından ötürü *ABC* ile *AEF* üçgenleri benzer olduğundan, $d/a = m/b = n/c$. Diğer yandan $n/c = \cos(\beta + \gamma) = \cos A$. O halde $d = a \times \cos A$. Benzer şekilde $e = b \times \cos B$ ve $f = c \times \cos C$ formülleri geçerlidir.

***H*'nin Simetrileri Ne Âlemde?** Diklik merkezi olan *H* noktasının üçgenin kenarlarına göre simetrileri daima *ABC* üçgeninin çevrel çemberi üzerindedir. Yani, yükseklikler çevrel çemberi şekildeki

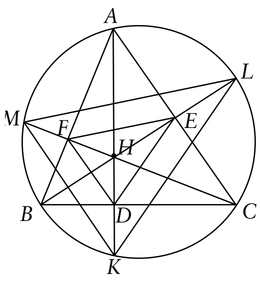


gibi *K*, *L*, *M* noktalarında kesiyorsa, *HD* = *DK*, *HE* = *EL* ve *HF* = *FM* eşitlikleri geçerlidir.

Biz *HD* = *DK*'yı kanıtlayalım, diğerleri benzer şekilde kanıtlanabilir.

AEH ile *BDH* üçgenlerinin ikişer açısı eşit olduğundan $m(EAH) = m(DBH)$. Diğer yandan *CAK* ile *CBK* aynı yayı gören çevre açılar olduğundan, $m(CAK) = m(CBK)$. O halde $m(DBH) = m(DBK)$. Ama o zaman, *HBK* üçgeninde *BD* hem yükseklik hem de açıortaydır, yani *HBK* ikizkenardır, dolayısıyla *HD* = *DK*.

Çevrel Çemberler. Bir *ABC* üçgeninin ortik üçgeninin çevrel çember yarıçapı, *ABC* üçgeninin çevrel çember yarıçapının yarısıdır. Bunun çok basit bir kanıtı var:



K, *L*, *M* noktaları yukarıda tanımlanan noktalar olsun.

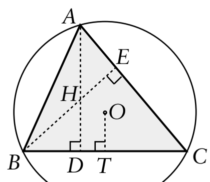
DEF üçgenine *ABC* üçgeninin ***birinci ortik üçgeni***, *KLM* üçgenine de ***ikinci ortik üçgeni*** dersek, *ABC* üçgeniyle ikinci ortik üçgeninin çevrel çemberlerinin aynı olduğu âşikar. *FHD* ile *MHK* üçgenlerinin benzerliğinden (*K-A-K*); *MK*//*FD*'dir. Benzer şekilde *ML*//*FE* ve *KL*//*DE* dir. *EDF*'yle *KLM* üçgenlerinin benzerlik oranı 1:2 olduğundan çevrel çember yarıçaplarının oranı da 1:2'dir.

Şekilden çıkarabileceğimiz bir diğer sonuç ise *H* noktasının her iki ortik üçgeninin de iççember merkezi olması.

Bir noktayı daha anımsatalım: *ABC* bir dik üçgen ise ikinci ortik üçgeni oluşmaz, sadece bir doğru oluşur.

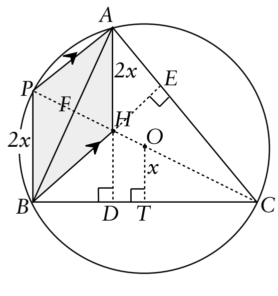
Hayırlara Vesile Olacak. Şimdi, varoluş nedeni birazdan anlaşılacak ve önemli sonuçlara vesile olacak hoş bir problem çözeceğiz.

Önsav. *Herhangi bir ABC üçgeni verilsin ve bu üçgenin çevrel çemberi çizilsin. Üçgenin herhangi bir köşesinin diklik merkezine olan uzaklığı, üçgenin çevrel çember merkezinin seçilmiş köşenin karşısındaki kenara olan uzaklığının iki katıdır. Yani yukardaki şekle göre, AH = 2 × OT'dir.*



Kanıt: *C* köşesinden geçen çap, çevrel çemberi *P*'de kessin. Tales Teoremi'nden dolayı çapı gören çevre açılar diktir: $m(CAP) = m(CBP) = 90°$.

PO = *OC* ve *BT* = *TC* olduğundan, *PBC* üçgeninde *OT* orta tabandır. Dolayısıyla, *OT* = *x* ise *PB* = 2*x* olur.



Öte yandan *PB*//*AD* ve *PA*//*BE* olduğundan, *PBHA* bir paralelkenardır. O halde *AH* = *PB* = 2*x*'tir. □

Sonuç 1. *ABC* üçgeninde *BC* = *a*, *AC* = *b* ve *AB* = *c* olsun. *PBC* diküçgeninde Pisagor Teoremi'ni uygularsak, $PB^2 + a^2 = 4R^2$ buluruz. *PB* = *HA* olduğundan $HA^2 + a^2 = 4R^2$. Benzer şekilde $HB^2 + b^2 = 4R^2$ ve $HC^2 + c^2 = 4R^2$'dir. Bu üç eşitlik taraf tarafa toplanırsa tüm üçgenlerde sağlanan güzel bir eşitliğe ulaşmış oluruz:

$$HA^2 + HB^2 + HC^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 12R^2.$$

Sonuç 2. Yine buradan doğan bir eşitlik:

$$OH^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2.$$

(İpucu: Kenarortay Teoremi.)

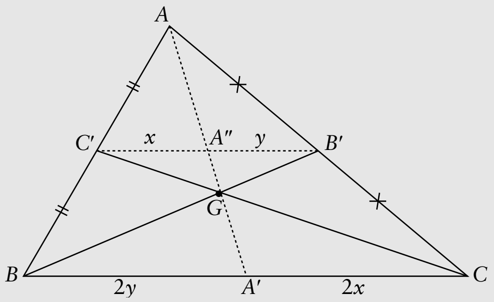
Sonuç 3. $AH \times HD = BH \times HE = FH \times HC = (a^2 + b^2 + c^2)/2 - 4R^2$.

Bunu da okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

Ağırlık Merkezi

Teorem. *Bir üçgende kenarortaylar* (***ağırlık merkezi*** *adı verilen*) *bir noktada kesişirler.*

Kanıt: ABC üçgeninde B ve C köşelerinden aşağıdaki şekildeki gibi kenarortayları çekelim. Bunların kesişimi G olsun. AG'nin BC'yi tam ortada kestiğini kanıtlamalıyız. BC ve $B'C'$ paralel olduklarından, $ABC \approx AC'B'$; dolayısıyla $BC =$

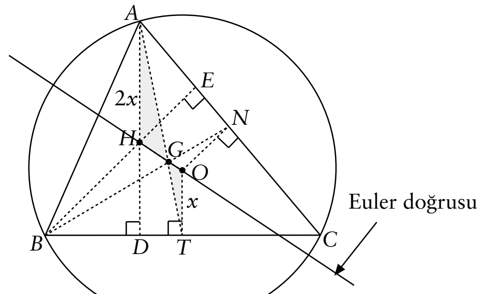


$2B'C'$. Bundan ve $C'GB' \approx CGB$ benzerliğinden, $CG = 2C'G$ ve $BG = 2B'G$ çıkar. Bunlardan ve $CGA' \approx C'GA''$ ve $BGA' \approx B'GA''$ benzerliklerinden, $CA' = 2C'A''$ ve $BA' = 2B'A''$ çıkar. Demek ki şekildeki x, $2x$, y ve $2y$ doğru konmuş. Öte yandan, $AC'A'' \approx ABA'$ ve $AB'A'' \approx ACA'$. Bunlardan da sırasıyla, $x/2y = C'A''/BA' = AA''/AA' = A''B'/A'C = y/2x$, $2x^2 = 2y^2$ ve $x = y$ çıkar. □

Bunlardan kolaylıkla, $GA' = 2GA''$ ve $AA'' = 3GA''$ çıkar. Yani $AG = 2AA'/3$. Benzer biçimde, $BG = 2BB'/3$ ve $CG = 2CC'/3$.

Şimdi bir önceki sayfadaki şekille biraz oynayacağız. A'yla T'yi birleştirip aşağıdaki şekilden takip edelim. $BT = TC$ olduğundan AT kenarortaydır. Aynı şekilde BN kenarortaydır. Demek ki kesiştikleri nokta G, ABC üçgeninin ağırlık merkezidir. (Bkz. yukardaki gri kare.)

Öte yandan, $AH // OT$ paralelliği sayesinde $AHOT$ kelebeği oluşur. $AH = 2OT$ olduğundan kelebekteki benzerlik oranı 2:1'dir. Demek ki OH ile AT'nin kesişim noktası üçgenin ağırlık noktası olan G'dir. Aşağıdaki teoremi kanıtladık:



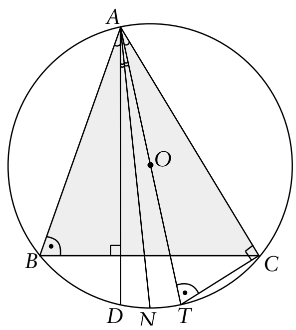
Teorem. *Bir üçgende diklik merkezi H, ağırlık merkezi G ve dışçember merkezi O doğrusaldır.*

Onlarca özel noktayı daha üzerinde barındıran bu doğruya ***Euler doğrusu*** denir.

Daha Neler Neler! Şimdi de yüksekliklerin içaçıortay ve kenarortaylarla ilişkisine bir bakacağız.

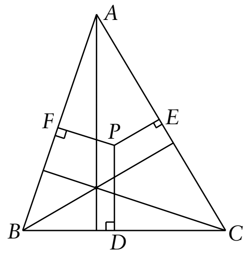
Teorem. *Bir üçgenin herhangi bir içaçısına ait içaçıortayı, aynı köşeye ait yükseklikle çapın arasındaki açının da açıortayıdır.*

Kanıt: Yandaki şekle göre $m(DAN) = m(NAT)$ olduğunu göstermemiz lazım. AT çap olduğundan ACT açısı diktir. Aynı yayı gören çevre açı ilişkisinden, $m(ABC) = m(ATC)$ dir. O halde $m(BAD) = m(TAC)$. Sonuçta $m(BAN) = m(CAN)$ olduğundan $m(DAN) = m(NAT)$ eşitliği bulunmuş oldu. □



Bu kural dik üçgenlerde daha şık bir hal alıyor: Herhangi bir dik üçgende dik köşeye ait açıortay, aynı köşeye ait yükseklik ile kenarortay arasında oluşan açının da açıortayıdır. Buna ayrı bir kanıt yapmamıza gerek yok, zira dik üçgende dik açıya ait çap zaten kenarortayı da taşır.

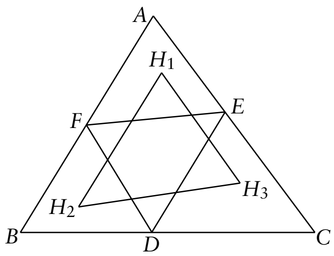
Bir üçgenin iç bölgesinde isteksel olarak alınan bir P noktasından üçgenin kenarlarına inen dikme ayaklarını köşe kabul eden üçgene P noktasının ***pedal üçgeni*** denir. Yan şekildeki DEF üçgeninden bahsediyoruz.



ABC üçgenin yükseklikleri sırasıyla h_a, h_b, h_c ise $PD/h_a + PE/h_b + PF/h_c = 1$ eşitliği de ilginçtir. Kanıtlayalım:

Alan(ABC) = S olsun. $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$ olduğunu biliyoruz. Öte yandan, üçgenin alanını üç parçaya ayırırsak, $aPD + bPE + cPF = 2S$ eşitliği görülür. İlk bulduğumuz eşitlikten a, b, c değerlerini çekip son eşitlikte yerine yazarsak istenen eşitliğe kolaylıkla erişebiliriz.

Alıştırma. *DEF* üçgeni bir *ABC* üçgeninin ortik üçgeni olsun. *AFE*, *BDF*, *CED* üçgeninin diklik merkezler sırasıyla H_1, H_2, H_3 ise *ABC* üçgeniyle $H_1H_2H_3$ üçgeni daima benzerdir.

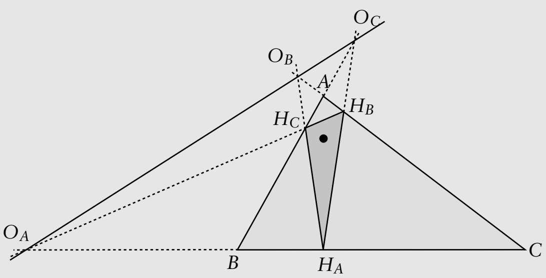


Yükseklikleri içeren bir çizim problemiyle yazımıza son verelim. Üç yüksekliği de bilinen bir üçgenin sadece cetvel ve pergel yardımıyla nasıl çizilebileceğini göstereceğiz:

$ah_a = bh_b = ch_c$ olduğunu alan hesabından biliyoruz. Eşitlikteki her terimi h_ah_b çarpımına bölersek, $a : b : c = h_b : h_a : h_ah_b/h_c$ buluruz. Üç kenar uzunluğu da bilinen üçgenlerin çizimini daha önce öğrenmiştik. Kenar uzunlukları h_a, h_b ve h_ah_b/h_c olan bir üçgen çizelim. Bu üçgene *DEF* diyelim. *DEF* ile *ABC* üçgenlerinin benzer olduklarını unutmayın. $|EF| = h_b$, $|DF| = h_a$ ve $|DE| = h_ah_b/h_c$ olsun. *D* köşesinden EF'yi dik kesen ve uzunluğu h_a olan bir *DL* doğru parçası çizelim. İşte bu *L* noktası *ABC* üçgeninin *a* kenarına ait yüksekliğidir. *EF*'ye paralel olarak *L*'den geçen bir doğru çizilir ve bu doğru *DE* ve *DF* ile kesiştirilirse *ABC* üçgeni çizilmiş olur.

Diklik Ekseni

Teorem. *Bir ABC üçgeninin kenarlarının uzantılarıyla aynı üçgenin ortik üçgeninin* ($H_AH_BH_C$) *kenarlarının uzantılarının kesiştiği* O_A, O_B, O_C *noktaları doğrudaştırlar.*



Bu doğruya *ABC* üçgeninin ***diklik ekseni*** veya ***diklik doğrusu*** denir.

Yukardaki teoremi gelecek sayımızda kanıtlayacağız.

Sorular.

1. Yüksekliklerinin toplamı 68 br, çevresi 80 br ve alanı 300 br^2 olan bir üçgenin kenar uzunluklarını bulunuz.

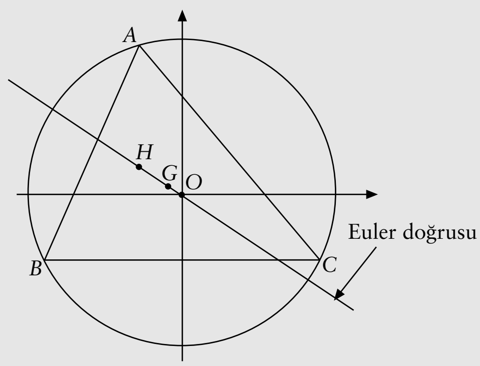
2 h_a, h_b, h_c bir üçgenin farklı üç yüksekliği olsun. $h_ah_b + h_bh_c > h_ah_c$ eşitsizliğini gösteriniz.

3. Daraçılı bir *ABC* üçgeninin tüm kenarorta noktalarından diğer iki kenara birer dikme indiriliyor. Oluşan altıgensel bölge alanının *ABC* üçgensel bölgesinin alanının yarısı olduğunu gösteriniz.

4. Çeşitkenar bir *ABC* üçgeninin kenarortaylarının kesişim noktası *G*, içteğet çemberinin merkezi I ve diklik merkezi *H* olsun. *GIH* açısının geniş olduğunu gösteriniz. ♦

Teorem. *Analitik düzlemde çevrel çember merkezi başlangıç noktası (orijin) olan bir ABC üçgeninin köşe koordinatları* $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ *ve* $C(x_c, y_c)$ *ise ABC üçgeninin diklik merkezinin koordinatları* $(x_a + x_b + x_c, y_a + y_b + y_c)$ dir.

Kanıt: Köşe koordinatları verilen bir üçgensel bölgenin ağırlık merkezinin koordinatlarının, üçgenin köşe koordinatları toplamının üçte biri olduğunu biliyoruz. Bir üçgende her zaman



$HG = 2 \times GO$ olduğunu kanıtlamıştık. O halde $HO = 3 \times GO$ olduğundan diklik merkezi olan *H* noktasının koordinatları, üçgenin köşe koordinatlarının toplamına eşittir. □