Küreselleşen Geometri

1. Karıncaların Yürüyüşü

Tosun Terzioğlu*
tosun@sabanciuniv.edu.tr

Günlük hayatımızda geometriyle ilgili bazı kavramları kullanma ihtiyacı hissettiğimizde nedense kendimizi çoğunlukla düzlem geometrisiyle kısıtlarız. Örneğin, iki nokta arasındaki en kestirme yol, bu noktaları birleştiren doğru parçasıdır; bir üçgenin iç açılarının toplamı mutlaka 180 derecedir; herhangi bir doğruyu üzerindeki iki nokta belirler; iki doğru ya tek bir noktada kesişir ya da birbirlerine paraleldir... Fazla düşünmeden bu ve benzeri ifadeleri hep kullanırız.

Oysa üç boyutlu uzayda bambaşka bir geometri vardır. Sözgelimi üç boyutlu uzayda birbirini kesmeyen ama paralel de olmayan doğrular olduğunu görmek hiç de zor değil; kesişmeyen doğruların paralel olmaları gerektiği sadece aynı düzlemde bulunan doğrular için geçerli.

İki boyutlu bir uzayda, yani düzlemde yaşıyormuşuz gibi düşünmeye alışmışız. Olsa olsa, düzleme bir boyut daha ekleyerek elde edilen üç boyutlu $\mathbb{R}^3$ uzayı sanki en gelişmiş düşünme modelimizi oluşturur. Düzlem ve üç boyutlu $\mathbb{R}^3$ uzayı dışında, üstünde yaşadığımız dünyanın geometrisi gibi ilginç geometriler de vardır!

Dünyamızın düz olmadığı artık biliniyor! Dünyamız bir küre! Hatta tam bir küre bile değil. Kutuplar arasında hafif bir basıklık var: Ekvator çemberinin çapı 12.756 km iken kutupların arasındaki uzaklık biraz daha az, 12.714 km. Dünyamız basık ama çok da basık değil, nitekim kutuplar arası uzunluğu ekvatorun çapına bölersek 1'e yakın bir sayıyı, 0.997'yi elde ederiz.

Dünyamızı yarıçapı 6378 km. olan bir küre olarak düşünmek oldukça gerçekçi. Zaten son yıllarda her iki lafın arasında "küreselleşen dünya" demiyor muyuz!

Bu yazıyı yazmakta olduğum odanın bulunduğu koridorun öbür ucundaki dekanlık ofisini soran birine, o yönü gösterip "dosdoğru git" dersem ona en kestirme yolu göstermiş olurum, ama İstanbul'dan kalkan bir uçağın pilotuna İstanbul'la aynı enlemde olan New York'a gitmesi için "hep batı yönünde uç" desem, ona en kestirme yolu göstermiş olur muyum?

Bir zamanlar böyle sanılmış, ama bu doğru değil, İstanbul-New York arası en kestirme yol, durmadan batıya giden yol değildir.

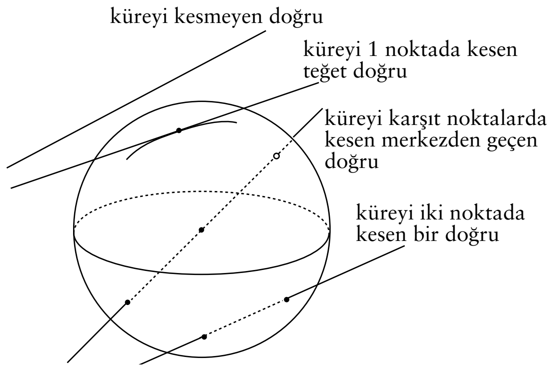
En iyisi kürede geometriyi incelemeye başlayalım. Küre geometrisinin düzlem geometrisinden çok farklı olduğunu göreceğiz.

Yarıçapı $r > 0$ ve merkezi $(0, 0, 0)$ noktasında olan küre,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

denklemini sağlayan (x, y, z) üçlülerinin kümesidir. Kürenin geometrik özellikleri yarıçaptan bağımsız olduğu için, gerekirse, yarıçapı 1 olan ve merkezi de $O = (0, 0, 0)$ noktasında bulunan ***standart*** ya da ***birim küre***yi ele alabiliriz. $\mathbb{R}^3$'te yaşayan bu cismi S ile göstereceğiz. Tabii bulduğumuz sonuçları dünyamıza uygularken, örneğin İstanbul-New York arasındaki uzaklığı hesaplarken, dünyamızın yarıçapı 6378 km. olan bir küre olduğunu unutmayacağız!

Doğruyla Küre. $\mathbb{R}^3$ uzayında, bir l doğrusuyla S küresinin hiç ortak noktası olmayabilir. Eğer $l \cap S$ kümesi boş değilse, ya l küremize tek bir noktada değer (yani l kürenin bir teğetidir) ya da l küreyi iki farklı noktada keser. İkinci şıkkın özel bir



durumu olarak, eğer l kürenin merkezinden geçiyorsa bu iki kesişim noktasına ***karşıt noktalar*** denir. Kuzey kutbunu kürenin merkezine birleştiren doğru, küreyi bir de güney kutbunda kestiğinden, kuzey ve güney kutupları karşıt noktalardır.

$\mathbb{R}^3$'teki noktaların birer vektör olduğunu hatırlayalım. Böylece $A = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ise,

* Sabancı Üniversitesi öğretim üyesi.

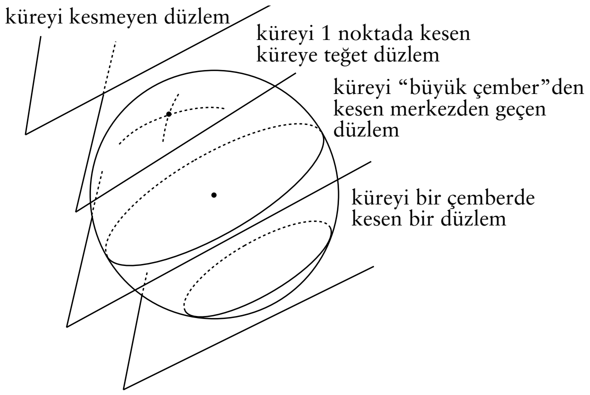
$$-A = (-x, -y, -z),$$

veya daha genel olarak herhangi bir $\alpha \in \mathsf{R}$ için

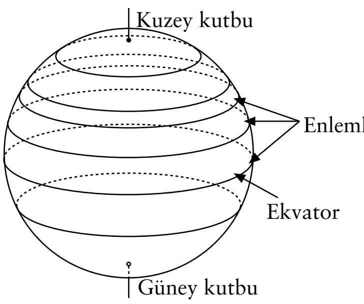
$$\alpha A = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

yazabiliriz. Eğer $A \in S$ ise, elbette $-A$ da bu noktanın karşıt noktasıdır (çünkü küremizin merkezini (0, 0, 0) noktası olarak belirledik.)

Düzlemle Küre. Şimdi de herhangi bir Δ düzlemiyle kürenin ilişkisine bir göz atalım. Δ ile S küresinin hiç ortak noktası olmayabilir. Veya Δ düzlemi küreye teğet olan bir düzlem olabilir; yani $\Delta \cap S$ tek bir noktadan ibaret olabilir. Çok daha ilginç olan hal ise düzlemin küreyi birden fazla noktada kesmesidir. Bu takdirde $\Delta \cap S$ bir çemberdir. Eğer Δ düzlemi kürenin merkezinden geçiyorsa, $\Delta \cap S$ çemberine ***büyük çember*** denir. Büyük çemberin yarıçapı kürenin yarıçapına eşittir elbette.



Kuzey kutbuna teğet olan bir düzlemi gözümüzün önüne getirelim ve bu düzlemi yönünü değiştirmeden güneye doğru kaydıralım. Düzlemimiz, yarıçapları giderek büyüyen çemberler kesmeye başlar küreden. Tam yarı yolda, yani kürenin merkezi de düzlemin üzerinde olduğunda, kürenin yarıçapına eşit yarıçaplı büyük çemberi elde ederiz. Bu özel büyük çembere ***ekvator*** denir.



Bu işleme devam edersek, düzlemimizin küreden kestiği çemberlerin yarıçapları giderek azalmaya başlar. Son olarak da düzlem güney kutbunda küreye teğet olur. Bu süreçle ortaya çıkan çemberlere ***enlem çemberleri*** veya kısaca ***enlemler*** denir. Enlemlerden sadece biri (ekvator) büyük çemberdir.

Bu yaptığımızdan da anlaşılacağı üzere, merkezden geçen her düzlem küreyi bir büyük çemberde keser.

Küremizin üzerinde karşıt olmayan A ve B noktalarını alalım. Bu iki nokta ve kürenin merkezi olan O noktası aynı doğru üzerinde olamaz; çünkü böyle olsaydı $B = -A$, yani A ve B karşıt noktalar olurdu. Demek ki uzayda O, A ve B noktalarını içeren tek bir düzlem vardır. Bu düzlemle kürenin kesişimi mutlaka bir büyük çemberdir, çünkü kürenin merkezi olan O noktası da bu düzlem üzerindedir. Basit ama önemli bu sonucunu teorem olarak yazalım.

(1) *Küre üzerinde karşıt olmayan iki noktadan tek bir büyük çember geçer.*

Eğer küre üzerindeki iki karşıt noktayı birleştiren doğruyu l ile gösterirsek, bu doğru kürenin merkezinden de geçer. R^3 uzayında bir doğruyu içeren istediğimiz sayıda düzlem bulabiliriz. Bu düzlemlerin küreyle kesişimleri, her biri verilen iki karşıt noktayı içeren büyük çemberler olur. Kutuplardan geçen büyük çemberlere ***boylam çemberleri*** denir. Keşifler çağında denizciler için boylamı sağlıklı bir şekilde saptamak en büyük sorunlardan biri olmuştur. (Bkz. [1])

(2) *Kürenin herhangi iki karşıt noktasından geçen sonsuz sayıda büyük çember vardır.*

Şimdi, iki farklı büyük çember alalım. Bu çemberler Δ_1 ve Δ_2 düzlemlerinin üstünde olsunlar. Her ikisi de O noktasını içerdiğinden, bu iki düzlem kesişir, kesişimleri de bir doğrudur. $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \mathsf{l}$ olsun. O noktası bu doğru üzerindedir elbette.

$$\Delta_1 \cap \Delta_2 \cap S = \mathsf{l} \cap S$$

eşitliği bize Δ_1 ve Δ_2 düzlemleriyle l doğrusunun küreyle kesiştiği noktaların aynı olduğunu ve bu noktaların da karşıt noktalar olduğunu gösterir. Bundan da şu çıkar:

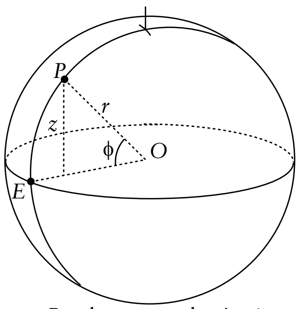
(3) *Kürenin iki büyük çemberi iki karşıt noktada kesişir.*

Bir yüzey olduğundan, küre "iki boyutludur", yani kürenin üstünde bir noktanın iki koordinatla belirlenmesi gerekir. Yukardaki (x, y, z) gösterimi üç koordinat gerektiğinden, bu üç koordinatı ikiye indirgemenin bir yolunu bulmalıyız. Bu, birazdan tanımlayacağımız enlem ve boylam açılarıyla yapılır.

Enlem. Küremiz üzerinde kuzey ve güney kutuplardan değişik bir $P = (x, y, z)$ noktası alalım. Bu noktadan ve kuzey kutbundan geçen büyük çemberin ekvatoru kestiği noktaya E diyelim. POE açısına ***P noktasının enlemi*** denir. ϕ ile göstereceğimiz bu açıyı kullanarak

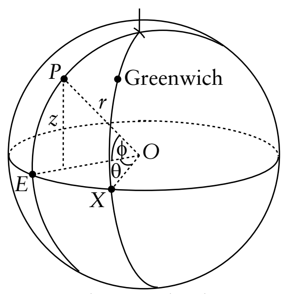
$$z = r \sin \phi$$

eşitliğini hemen görebiliriz. $r \cos \phi$ ise P noktasının ekvator düzlemindeki izdüşümünün uzunluğudur. Kuzey kutbunun enlemi 90°, güney kutbunun enlemi –90° olarak tanımlanır.



P noktasının enlemi = ϕ
$z = r \sin \phi$

Boylam. Küre üzerinde bir noktanın yerini belirlemek için, enlem açısından başka, bir de boylamı belirlememiz gerekiyor. Bunun için herhangi bir boylam çemberini referans boylamı olarak seçelim[1]. Coğrafyada Greenwich boylamı terimiyle karşılaşmışsınızdır. Gerçekten Londra yakınlarındaki Greenwich gözlemevinden geçen boylam çemberi dünya üzerindeki noktaların boylamları için referans alınır. Biz de referans boylamımıza ***Greenwich boylamı*** ismini verelim. Bu boylam çemberi, ekvator düzlemini X noktasında kessin. Bu takdirde XOE açısına P noktasının boylamı denir. Bu açıyı da θ ile gösterelim. $\theta = 0$ referans boylamını, yani Greenwich boylamını gösterir.



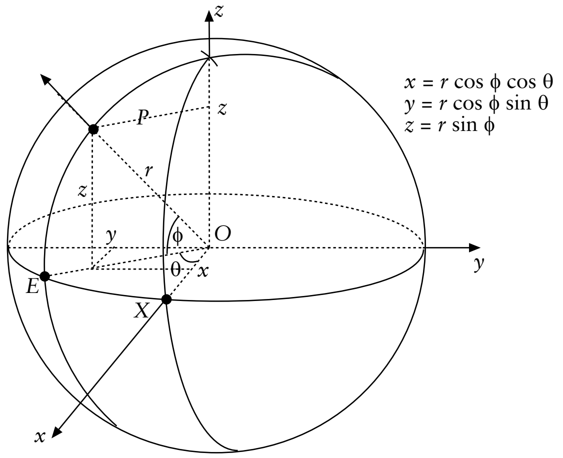
P noktasının boylamı = θ

Boylam açısının doğuya doğru artı, batıya doğru eksi değerler alması âdet olmuştur. Dolayısıyla boylam açısı –180° ile 180° arasında değişir. Elbette $\theta = 0$, $\theta = -180$ ve $\theta = 180$ dereceleri hep Greenwich çemberi üzerindeki noktaları belirler. Enlem açısı ϕ ise güney kutbuna doğru eksi, kuzey kutbuna doğru artı değerler alır. Bu da bir gelenektir. Yani $\phi = 0°$ ekvatoru, $\phi = -90°$ güney kutbunu ve $\phi = 90°$ de kuzey kutbunu gösterir.

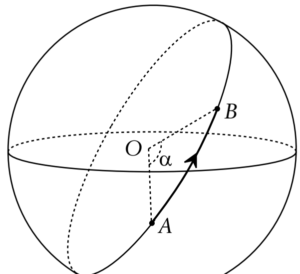
Küresel Koordinatlar. Böylece, aşağıdaki şekil üzerinden kolay bir trigonometrik hesapla, yarıçapı r olan bir küre üzerindeki $P = (x, y, z)$ noktasını,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \cos \theta \\ y &= r \cos \phi \sin \theta \\ z &= r \sin \phi \end{aligned} \qquad (1)$$

olarak ifade ederiz. Bunlara, P noktasının ***küresel koordinatları*** adı verilir.



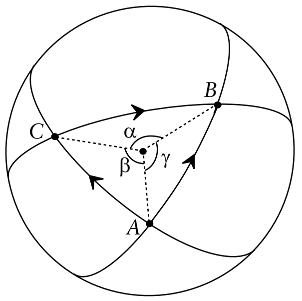
Büyük Çember Yolu. Küremizin üzerindeki bir A noktasına bir karınca koyalım. Karıncamız bu noktayı başka bir B noktasına birleştiren büyük çember üzerinde yürümeye başlasın. Büyük çemberden hiç ayrılmadan B noktasına varan karıncamız, AOB açısı α radyan ise, $r\alpha$ kadar yol yürümüş olur. Karıncamız gene A noktasından yola aksi yönde çıkıp, büyük çemberden ayrılmadan B noktasına gelseydi bu kez $r(2\pi - a)$ kadar yol yürümüş olacaktı. İsterseniz karıncamızın büyük çember üzerinde kısa olan yay parçası ile uzun olanı ayırt edebilmesi için $0 < \alpha \leq \pi$ varsayımını yapalım. Karıncamız A'dan herhangi bir yönde yola çıkıp, büyük çember boyunca yürüyerek, B noktasında kısa bir yemek ve ihtiyaç molası verip yoluna devam ederek tekrar A noktasına gelse, tam $2\pi r$ kadar yol yürüyecekti.



Karıncanın büyük çember üzerinde A'dan B'ye yolu.

1 Dikkat edilirse, enlem için de bir referans enlemi seçmiştik: ekvator; ancak bu referans enlemi yatay olduğundan bu seçim kendiliğinden doğal olarak yapılmıştı, özel bir çaba harcamamıştık.

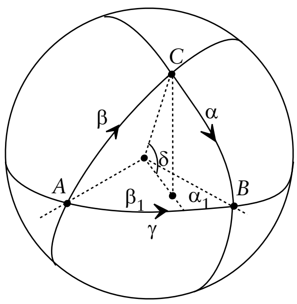
Kürede Üçgen Eşitsizliği. Şimdi karıncamız A'dan B'ye büyük çember üzerinde gitmek yerine, önce, bir başka büyük çember üzerinden A'dan bir C noktasına, sonra da bu C noktasından B'ye gene bir büyük çember üzerinden gitsin.



Hangi yol daha uzundur, direkt giden AB yolu mu yoksa aktarmalı giden $AC + CB$ yolu mu? Yandaki şekilden de görüleceği üzere birinci yol daha kısadır. Bir başka deyişle kürenin büyük çemberlerinde "üçgen eşitsizliği" geçerlidir. Bunu matematiksel olarak kanıtlamak çok zor değildir, kanıtlayalım. Yarıçapın 1 olduğunu varsayabiliriz. Açılar birinci şekildeki gibi α, β ve γ olsun. O zaman

$$\gamma \le \alpha + \beta$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerekmektedir. Küreyi döndürerek AB'nin ekvator üzerinde olduğunu varsayabiliriz.



Ayrıca küreyi bir kez daha döndürerek, A'nın Greenwich boylamıyla ekvatorun kesiştiği nokta olduğunu varsayabiliriz. Demek ki A'nın koordinatları (1, 0, 0). Eğer δ ve β_1 açıları yandaki şekildeki gibiyse, C noktasının koordinatlarının $(\cos\delta \cos\beta_1, \cos\delta \sin\beta_1, \sin\delta)$ olduğunu görmek çok zor değil. Şimdi OA ile OC vektörlerinin skaler çarpımını alırsak bir yandan

$$|OA|\,|OC| \cos\beta = \cos\beta$$

buluruz, diğer yandan,

$$(1, 0, 0)(\cos\delta \cos\beta_1, \cos\delta \sin\beta_1, \sin\delta) = \cos\delta \cos\beta_1$$

buluruz. Demek ki

$$\cos\beta = \cos\delta \cos\beta_1$$

ve dolayısıyla $\cos\beta \le \cos\beta_1$. Kosinüs, 0 ile 180 derece arasında azalan bir fonksiyon olduğundan, bundan $\beta \ge \beta_1$ çıkar. Benzer şekilde $\alpha \ge \alpha_1$ elde edilir. Demek ki, $\alpha + \beta \ge \alpha_1 + \beta_1 = \gamma$. Büyük çemberlerde üçgen eşitsizliği kanıtlanmıştır.

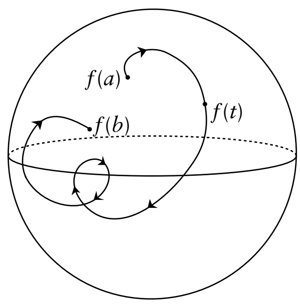
Daha Kısa Yol Var mı? Küre üzerindeki karıncamız acaba büyük çember üzerinde yürümekle akıllıca bir iş mi yapıyor? İki nokta arasında bu noktaları birleştiren büyük çemberden daha kısa bir yol var mı? Bu sorunun yanıtını vermek için ilkin yolun matematiksel bir tanımını yapalım.

> Bildiğimiz düzlemde iki nokta arasındaki en kısa yolun bir doğru üzerinde olduğu o kadar çok söylenmiştir ki bunu kanıtsız kabul ederiz, içimize işlemiştir bu çok sık tekrarlanan "gerçek". Bunu kanıtlamaya çalışırsanız, "yol" ve "mesafe" kavramları üzerinde düşünmek zorunda olduğunuzu anlarsınız. Aynen burada bizim küre için yaptığımız gibi...

Yol. Eğer $f : [a, b] \to S \subset \mathbb{R}^3$ sürekli bir fonksiyonsa, bu fonksiyona ***f(a) noktasını f(b) noktasına birleştiren yol*** denir. Vektör değerli bu fonksiyonu koordinatlar cinsinden,

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad (a \le t \le b)$$

olarak yazalım. Burada, değişkenimiz olan t'yi zaman olarak düşünebiliriz, ama t illa da zaman olmak zorunda değil. Örneğin t, duruma göre, karıncanın küre üzerinde bulunduğu noktanın enlemi, boylamı ya da başlangıç noktasına olan mesafesi gibi bir başka parametre de olabilir.



Küre üstünde f(a) noktasından f(b) noktasına giden bir f yolu.

f fonksiyonu karıncanın yol boyunca gittiği hızı da belirler. Sözgelimi, karınca başlangıçta hızlı gidebilir, daha sonra yorularak yavaşlayabilir, ya da zamanla ısınan karınca gittikçe daha hızlı gidebilir. Tüm bu bilgiler f fonksiyonunun içinde gizlidir.

f fonksiyonuyla verilen bu yolun uzunluğunu bulup bu uzunluğu büyük çember yolunun uzunluğuyla karşılaştıracağız.

Yolumuzun çok ani ve keskin virajlardan arınmış olduğunu da varsayalım; daha matematiksel

> Kürede iki nokta arasındaki mesafeyi, burada yaptığımız gibi, bu iki nokta arasındaki yolların uzunluklarının infimumu (en büyük altsınırı) olarak tanımlayabiliriz. Doğal gelen başka tanımlar da yapılabilir. Öne sürülen tüm tanımların eşdeğer olduklarını kanıtlanması arzu edilir elbet. Bu tanımı kabul ettiğimizde karşımıza kendiliğinden şu soru çıkar: Eğer iki nokta arasındaki mesafe d ise, bu iki nokta arasında uzunluğu gerçekten d olan bir yol var mıdır?

bir deyişle, x, y ve z fonksiyonlarının t değişkenine göre türevleri olduğunu ve bu türevlerin sürekli olduklarını varsayalım. Bu türevleri,

$$dx/dt = x',\ dy/dt = y' \text{ ve } dz/dt = z',$$

olarak gösterelim. Bu takdirde, karıncanın t anındaki hızı,

$$h(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

formülüyle verilir. Hızla zamanı yol boyunca çarpıp toplarsak, yani hızın integralini alırsak,

$$\int_a^b h(t)dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt \qquad (*)$$

sayısını buluruz; bu sayı da, karıncanın, f yolunu izleyerek $f(a)$ noktasından $f(b)$ noktasına giderken katettiği mesafedir.

Küre üzerinde sürekli türevlenebilir bir $f : [a, b] \to S$ fonksiyonunun uzunluğunu yukardaki integralle tanımlayabiliriz. Bu ve integralin tanımından şu kanıtlanabilir: Küre üstündeki iki nokta arasındaki uzunluk, o iki nokta arasındaki uçları birbirine dokunan sonlu tane büyük çember yollarından oluşan yolların uzunluklarının infimumudur. Bu olguyu kabul edersek, daha önce kanıtladığımız büyük çemberlerdeki üçgen eşitsizliğinden, en kısa yolun bir büyük çember üzerinde olduğu oldukça kolay çıkar.

Artık yapmamız gerekeni biliyoruz: Yukardaki integrali hesaplayıp büyük çember üstünde karıncanın katettiği yolla karşılaştırmalıyız.

Bu integrali hesaplamak hiç de kolay değil. Yalnız şunu aklımızda tutalım. Eğer,

$$\gamma : [c, d] \to [a, b]$$

sürekli türevlenebilir bir eşlemeyse, o zaman

$$f : [a, b] \to S$$

yolunun uzunluğuyla,

$$f \circ \gamma : [c, d] \to S$$

yolunun uzunluğu eşittir. Karıncanın her anki hızı f ve $f \circ \gamma$ yollarında aynı olmayabilir, ama katettiği toplam mesafede bir değişiklik olmaz. Geometrik ve sezgisel olarak doğruluğu apaçık olan bu önerme, (*) formülünde değişken değişikliği yapılarak kolaylıkla kanıtlanabilir. Yani f yolunu değiştirmeye hakkımız var. Bu hakkımızı kullanarak yukardaki integrali daha hesaplanabilir bir şekle sokacağız.

Yola Gelelim! Yolumuza geri dönelim. Anımsarsanız karıncanın yolu,

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

fonksiyonuyla verilmişti. Karıncanın t anında bulunduğu bu $f(t)$ noktasının enlem ve boylam açılarına sırasıyla $\phi(t)$ ve $\theta(t)$ adını verelim. Demek ki, yukardaki (1) formülüne göre,

$$x(t) = r\cos\phi(t)\cos\theta(t)$$
$$y(t) = r\cos\phi(t)\sin\theta(t)$$
$$z(t) = r\sin\phi(t).$$

Ama biz yazımda kolaylık olması açısından bu formülden t'yi atacağız ve x, y, z, ϕ ve θ'yı t'nin birer fonksiyonu olduğunu hep aklımızda tutarak (1)'i yazmakta ısrar edeceğiz.

Şimdi, t'ye göre türev alırsak (1)'den,

$$x' = r(-\theta'\cos\phi\sin\theta - \phi'\sin\phi\cos\theta)$$
$$y' = r(\theta'\cos\phi\cos\theta - \phi'\sin\phi\sin\theta)$$
$$z' = r\phi'\cos\phi$$

elde ederiz. Bunlar, karıncanın t anında x, y ve z yönündeki hızlarıdır. Bir önceki sayfada bulduğumuz

$$h(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

hız fonksiyonunda x', y' ve z' yerine yukarda bulduğumuz ifadeleri koyup sadeleştirsek, kolaylıkla,

$$h(t) = r(\theta'^2\cos^2\phi + \phi'^2)^{1/2}$$

ifadesine varırız.

Demek ki yolun uzunluğunu bulmak için

$$\int_a^b (\theta'^2\cos^2\phi + \phi'^2)^{1/2}dt \qquad (**)$$

integralini hesaplamamız gerekecek. Ama θ ve ϕ fonksiyonlarını bilmiyoruz ve integral de pek sevimli görünmüyor. Biraz düşüneceğiz.

En Kısa Yol Varsayımı. f sürekli türevlenebilir fonksiyonuyla verilen yolun A'dan B'ye giden olabilecek en kısa yol olduğunu varsayacağız ve bu yolun uzunluğunun büyük çember yolundan daha kısa olamayacağını hatta bu yolun bir büyük çember yolu olduğunu kanıtlayacağız. Böyle bir "en kısa yol"un varlığı okura ne derece sezgisel gelir bilmiyoruz ama "en kısa yol"un varlığının matematiksel kanıtının pek kolay olmadığını biliyoruz. Bunu kanıtlamadan varsayacağız. Bir de ayrıca f'nin sürekli türevlenebilir olduğunu varsayacağız.

Bu varsayımın gerektiğini ve bedava olmadığını ilk farkeden Dedekind'dir. Dedekind'den önce bu nokta hep gözden kaçmıştır. Hatta Dedekind, düzlemde iki nokta arasındaki en kısa mesafenin bu iki noktadan geçen doğru parçası olduğunun o güne dek verilen kanıtlarının da yanlış olduğunu farketmiştir.

Daha ileri seviyede en kısa yolun varlığı şöyle kanıtlanabilir: Uzunluğu d olan bir yolun varlığını varsayalım. O zaman, uzunluğu en fazla d olan A'dan B'ye giden yollar kümesi tıkız (compact) bir kümedir. Yol uzunluğu fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olduğundan, en kısa mesafeyi veren (en az) bir yol vardır.

Eğer AB yolu A'dan B'ye giden en kısa yolsa ve C bu yolun ortasında bir noktaysa, elbette aynı yolu izleyen AC ve CB yol parçaları da (sırasıyla) A'dan C'ye ve C'den B'ye giden en kısa yollardır; yoksa bu AC yol parçası yerine daha kısa bir AC yolu bularak daha kısa bir AB yolu bulabilirdik. Yani en kısa yolun parçaları da en kısa yollardır.

Başlangıç. Bu bölümde, A'dan B'ye giden f en kısa yolunun A noktasından değişik bir C noktasına kadar bir büyük çemberi izleyerek gittiğini kanıtlayacağız. Yani f yolu tümüyle bir büyük çember üstünde olmasa da, en azından, bu yol üstündeki bir C noktası için, f yolunun AC parçasının bir büyük çember üstünde olduğunu, yani karıncanın AB yoluna bir büyük çember üstünde başladığını kanıtlayacağız.

Küreyi döndürerek, A noktasının enlem ve boylamının 0 olduğunu, yani A noktası Greenwhich boylamıyla ekvatorun kesiştiği nokta olduğunu varsayabiliriz.

A noktasından B noktasına giderken, karıncanın enlemi artabilir, azalabilir ya da aynı kalabilir, bazen artıp bazen azalabilir, her şey olabilir.

Eğer karıncanın enlemi başlangıçta bir süre aynı (yani 0) kalıyorsa, o zaman karınca bu süre zarfında ekvatoru izlemek zorundadır. Ekvator da bir büyük çember olduğundan, bu şıkta sorun yok, karınca ekvator enleminin üstünde giderek başlar yoluna ve kanıtlamak istediğimiz gerçekleşmiş olur.

Şimdi karıncanın başlangıçta kuzey yarımküreye girdiğini varsayalım, yani enlemi başlangıçta artsın. Diyelim karıncanın enlemi $[a, c]$ zaman dilimi arasında artıyor. $f(c) = C$ olsun.

Bu varsayımda, karıncanın yol boyunca bulunduğu noktaların enlemleri kümesiyle zaman olarak yorumladığımız $[a, c]$ aralığı arasında bir γ eşlemesi vardır, çünkü A'yla C arasında her an enlem artmaktadır ve iki değişik anda aynı enlemi elde etmeyiz. Dolayısıyla zaman olarak yorumladığımız t değişkeni yerine karıncanın enlemi olan ϕ'yi alabiliriz. Öyle de yapacağız: Bundan böyle $t = \phi$ olsun. Bu durumda, karıncanın ϕ enlemi, yol boyunca 0'la C'nin enlemi, yani 0'la $0 \leq \alpha \leq \pi$ eşitsizliğini sağlayan bir α arasında değişir. O zaman hız fonksiyonumuz,

$$h(t) = (\theta'^2 \cos^2 t + 1)^{1/2}$$

olarak sadeleşir (çünkü $\phi = t$) ve (**) integrali

$$\int_0^\alpha (\theta'^2 \cos^2 t + 1)^{1/2}\, dt \qquad (***)$$

integraline dönüşür. Öte yandan A noktasından C noktasına büyük çember üzerinden gidersek, eğer OA ile OC arasındaki açı β ise, katettiğimiz mesafe β olur, ama $\beta \geq \alpha$ (bknz. aşağıdaki şekil) demek ki büyük çember yolu α'dan, yani

$$\int_0^\alpha 1 dt$$

integralinden küçük. O halde, f üzerindeki AC yoluyla AC büyük çemberi arasındaki fark,

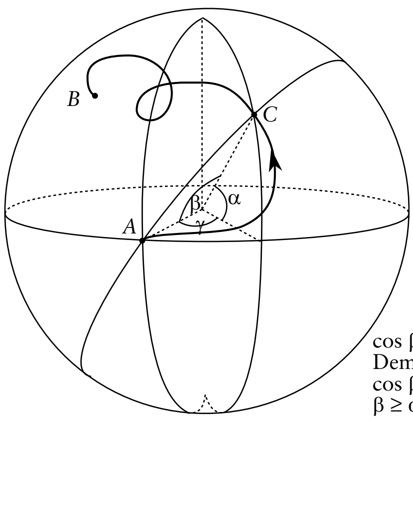
$$\int_0^\alpha \left[(\theta'^2 \cos^2 t + 1)^{1/2} - 1\right] dt$$

integralinden büyük. Ama θ' ne olursa olsun her $t > 0$ için,

$$(\theta'^2 \cos^2 t + 1)^{1/2} \geq 1$$

eşitsizliği aşikârdır. Demek ki bu varsayımla f yolu büyük çember yolundan daha kısa olamaz. Hatta eğer (sürekli olduğunu varsaydığımız) θ' hep 0 değilse, o zaman yukardaki integral 0'dan büyük olur ve karıncanın yolu büyük çember yolundan daha uzun olur, ki bu bir çelişkidir. Demek ki θ' = 0 olmalı, yani θ sabit olmalı ve karınca AB üzerinde yol almalı.

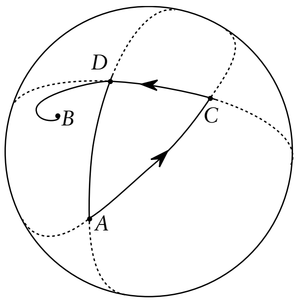
Enlem azalsaydı da aynı kanıtı verebilirdik. Yukardaki kanıtta önemli olan enlemin aynı kalması, ya sürekli artması ya da sürekli azalmasıdır.



$\cos \beta = \cos \gamma \cos \alpha$. Demek ki, $\cos \beta \leq \cos \alpha$, yani $\beta \geq \alpha$.

Daha Sonra. Karıncanın f yoluna bir büyük çember üzerinde başladığını kanıtladık: f'nin bir AC yol parçası bir büyük çember üzerinde. $A \neq C$ eşitsizliğini aklımızda tutalım. Eğer $C = B$ ise kanıt bitti, en kısa yol gerçekten büyük çemberlerin üstündeki yollardır. Bundan böyle $C \neq B$ eşitsizliğini varsayalım.

Ayrıca C'yi f'nin AC parçasının bir büyük çember olduğu A'dan en uzak nokta olarak alalım, yani f yolu C'den sonra AC büyük çember yolundan sapsın.



Bir önceki bölümde AB yolu için yaptığımızı şimdi CB yolu için yapalım. Buna hakkımız var çünkü f'nin CB yol parçası da bir en kısa yoldur. Nasıl AB üstünde AC'nin büyük çember üstünde olduğu A'dan değişik bir C noktası bulmuşsak, CB yolu üstünde de CD'nin bir büyük çember olduğu C'den değişik bir D noktası buluruz. Şimdi büyük çemberler üstünde olan iki yolumuz var: AC ve CD. Üçgen eşitsizliğinden dolayı, iki büyük çember parçasından oluşan ve f üzerindeki $AC + CD$ yolunu AD büyük çemberi yoluyla kısaltabiliriz. Ama hani f en kısa yoldu? Bir çelişki elde ettik. Demek ki $C = B$. Kanıtımız bitmiştir.

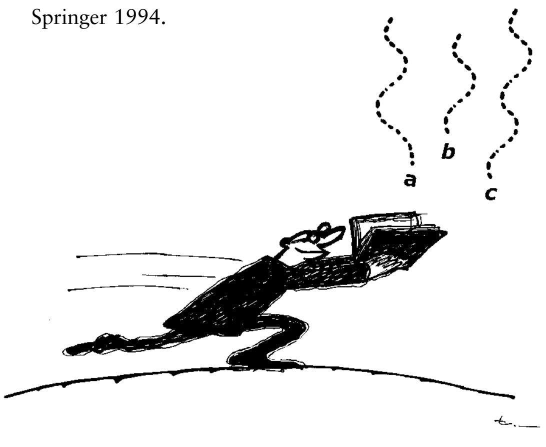
(4) *Büyük çemberi izleyen bir yol iki nokta arasındaki en kısa yoldur.* ♦

Kaynakça

[1] : Dava Sobel ve William J.H. Andrewes, **Boylam**, Çev. M. Göktepeli, TÜBİTAK Popüler Yayınları, 2004.

[2] Roger Fenn, **Geometry**, Springer 2001.

[3] George A. Jennings, **Modern Geometry with Applications**, Springer 1994.



Matematik

Bir sınıfta tam kırk çocuk dizili;
Bir kara tahta, üstünde bir üçgen;
Bir koca daire, sağır, çekingen;
Merkezi güm güm eder davul gibi.

Dilsiz, vatansız harfler, küme küme
Bekleşir dururlar, azap içinde.

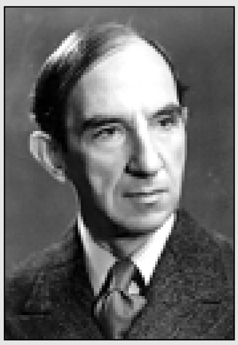
Bir yamuğun yan kenarı tam takır,
Bir ses yükselir yükselir, alçalır.
Azgın bir problem tutar yolunu,
Döner döner ısırır kuyruğunu.

Bir açının çeneleri gerilir;
Kurt mudur, köpek mi, neyin nesidir?

Ne kadar rakam varsa yeryüzünde
Üşüşmüş, karıncalar gibi tahtaya;
Koşarlar bir yuvadan bir yuvaya,
Fal taşına dönmüş gözler önünde.

Jules Supervielle
Çeviren: Sabahattin Eyuboğlu

Jules Supervielle


Jules Supervielle

1884 - 1960 arasında yaşamış, Uruguay doğumlu, Bask kökenli ünlü Fransız şair ve yazarı. Yaşamı doğduğu yer olan Montevideo'yla eğitim aldığı Paris arasında geçmiştir. Annesini babasını 8 aylıkken bir kazada kaybetmiştir.


Jules Supervielle, Dubuffet'nin fırçasından

Yapıtlarında yalnızlığın etkisi görülür. Ölüm, boşluk, varlık, hiçlik ve matematik gibi görkemli konuları, fantezi ve allegorileri kullanarak ve mitolojiden esinlenerek basit ama son derece müzikal bir dille işlemiştir.