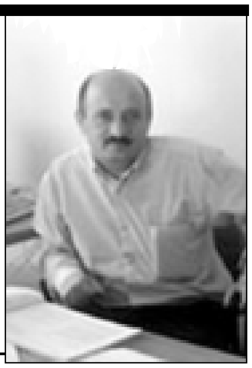
Problemler ve Çözümleri

Refail Alizade*
rafailalizade@iyte.edu.tr



Bu, bir yıl sürecek bir yarışmadır. Grup halinde, okul olarak ya da bireysel olarak katılabilirsiniz.

Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Ayrıca lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

Her sorunun çözümünü ayrı bir kâğıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

Kâğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenciyseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla İzmir adresine 01.03.2005 tarihine kadar adıma gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A306. Altıncı dereceden kuvvetinin ondalık yazılımı 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4 rakamlarından oluşan tüm pozitif tamsayıları bulunuz.

A307. İçteğet çemberi bulunan bir yamuğun taban uzunlukları 1 ve 3'tür. Yamuğun yan kenarlarının arasındaki açı en fazla kaç derece olabilir?

A308. Kongreye çeşitli ülkelerden 1000 kişi katılıyor. Her üç kişi kendi aralarında anlaşabiliyor (bunlardan biri ötekiler için tercümanlık yapabilir). Kongreye katılanları, her odada 2 kişi olacak ve bu kişilerin kendi aralarında anlaşabileceği şekilde 500 odaya yerleştirilebileceğini kanıtlayınız.

A309. a, b, c, d gerçel sayıları $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ ve $ac + bd = 0$ eşitliklerini sağlar. $ab + cd$ ifadesinin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

A310. 99 tane 9 ardarda yazılmıştır. Elde edilecek 199 basamaklı sayı tamkare olacak şekilde bu rakamların sağına 100 rakam daha yazılabileceğini kanıtlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y306. Beş basamaklı *abcde* sayısı 41'e bölünüyor. Beş basamaklı *eabcd* sayısının da 41'e bölündüğünü kanıtlayınız.

Y307. Bir dik üçgenin içteğet çemberi, hipotenüsü uzunlukları 4 ve 5 olan iki parçaya bölüyor. Üçgenin alanını bulunuz.

Y308. Birkaç voleybol takımı aralarında bir turnuva yaptı. Herhangi iki A ve B takımları alındığında, eğer A, B'yi yenmişse, A'ya yenilmiş ve B'yi yenmiş olan bir C takımı bulunur. Turnuvaya en az kaç takım katılmıştır?

Y309. $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitif gerçel sayıları
$$a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$$
eşitliğini sağlar. $i < j$ olmak üzere tüm
$$\frac{a_i a_j}{a_i + a_j}$$
sayılarının toplamının en fazla $(n - 1)/4$ olabileceğini kanıtlayınız.

Y310. $n \geq 5$ öğeden oluşan bir kümede $n + 1$ tane birbirinden farklı üç elemanlı altküme alınmıştır. Bunlardan, tam bir tane ortak elemanı olan ikisinin bulunduğunu kanıtlayınız.

ESKİ SORULARA ÇÖZÜMLER

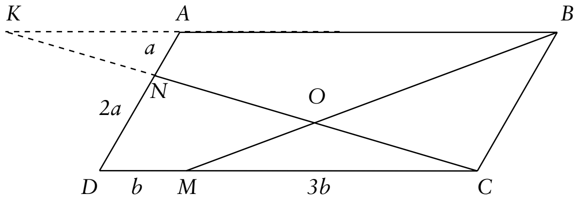
(Bahar 2004, yıl 13, sayı 1)

A296. *Karelerinin toplamı asal olan tüm ardışık asal sayı üçlülerini bulunuz.*

Çözüm: Sayılar, $p < q < r$ olmak üzere, p, q ve r olsun. Sayılardan hiçbiri 3 değilse (dolayısıyla 3'e bölünmüyorsa), $p^2 \equiv q^2 \equiv r^2 \equiv 1 \pmod 3$'tür, dolayısıyla $p^2 + q^2 + r^2$ toplamı 3'e bölünür ve asal olamaz. Demek ki sayılardan biri 3'tür. $p = 3$ ise $q = 5$ ve $r = 7$'dir ve $p^2 + q^2 + r^2 = 83$ asal olduğunudan (3, 5, 7) üçlüsü koşulu sağlar. $q = 3$ ise, $p = 2$ ve $r = 5$'tir. Bu durumda $p^2 + q^2 + r^2 = 38$ asal değil, dolayısıyla bu üçlü koşulu sağlamaz. $r = 3$ olamaz elbet. Yanıt (3, 5, 7)'dir.

A297. *ABCD paralelkenarının AD ve DC kenarları üzerinde*, $|AN|:|AD| = 1:3$ *ve* $|DM|:|DC| =$

* İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü öğretim üyesi.



1:4 *olacak şekilde sırasıyla N ve M noktaları alınmıştır. BM ve CN doğrularının kesişimine O diyelim.* $|OM|:|OB|$*'yi bulunuz.*

Çözüm: $|AN| = a$, $|DM| = b$ alalım. CN doğrusunu, AB'nin uzantısını bir K noktasında kesene kadar uzatalım. NKA ve NCD üçgenleri benzerdir. O halde $|KA|:|CD| = |AN|: |DN| = a:2a = 1:2$ eşitliğinden $|KA| = 2b$ ve $|KB| = |KA| + |AB| = 6b$ elde edilir. Ayrıca KOB ve COM üçgenleri benzerdir. O halde $|OM|:|OB| = |CM|:|KB| = 3b:6b = 1:2$ elde edilir.

A298. 1'*den* 2004'e *kadar olan tüm tamsayılar bir çember boyunca saat yönünde küçükten büyüğe sırayla yazılmıştır.* 1'*den başlayarak ve saat yönünde giderek, her adımda daha önce silinmemiş olan her ikinci sayıyı siliyoruz. En sona kalan sayı kaçtır?*

Çözüm: Önce 2004 yerine 2^n şeklinde bir sayı alalım. Bu durumda ilk olarak 2, 4, 6,... , 2^n sayıları silinecek ve geriye 2^{n-1} tane sayı kalacak: 1, 3, 5, ... Bu sefer 3, 7, 11, ..., 2^{n-1} sayıları silinecek ve geriye 1, 5, 9, ... sayıları kalacak vs. En sona kalan sayı başlangıçtaki ilk sayı, yani 1 olacak.

Şimdi, $2004 = 980 + 2^{10}$ eşitliğinin farkına varalım. Silinecek ilk 980 sayı 2, 4, ..., 1960 sayıları olacak ve geriye 2^{10} sayı kalacak. İlk sayımız 1961 olacağından, bu durumda, birinci paragraftan dolayı en sona kalan sayı 1961 olacak.

A299. $(a_n)_n$ *dizisi,* $a_1 = a_2 = 1$ *ve her* $n \geq 1$ *için* $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n/2^n$ *olarak tanımlanmıştır. Her* n *için* $a_n < 3$ *olduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm: $a_1 = a_2 = 1 < 3$'tür. Tümevarımla, her $n \geq 3$ için, $a_n \leq 3 - 12/2^n$ eşitsizliğinin sağlandığını kanıtlayalım. $a_3 = 3/2 = 3 - 12/2^3$ ve $a_4 = 7/4 < 3 - 12/2^4$ olduğundan, $n = 3, 4$ için eşitsizlik sağlanıyor. Şimdi her $3 \leq k < n$ için eşitsizliğin doğru olduğunu varsayarak, eşitsizliğin $n \geq 5$ için doğru olduğunu kanıtlayalım.

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2}/2^{n-2} \\ &\leq (3 - 12/2^{n-1}) + (3 - 12/2^{n-2})/2^{n-2} \\ &= 3 - 12/2^{n-1} + 3/2^{n-2} - 12/2^{2n-4} \\ &= 3 - 12/2^n - 12/2^{2n-4} \\ &\leq 3 - 12/2^n \end{aligned}$$

olduğundan $a_n \leq 3 - 12/2^n$ eşitsizliği n için de sağlanır. Demek ki her $n = 1, 2, ...$ için $a_n < 3$ eşitsizliği doğrudur.

A300. $n \geq 3$ *bir tek sayı olmak üzere,*

$$2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, \dots , 2^{n-1} - 1$$

sayıları verilmiştir. Bu sayılardan en az birinin n*'ye bölündüğünü gösteriniz.*

Çözüm: n tek sayı olduğundan $2^1, 2^2, 2^3, ...,$ 2^n sayılarından hiçbiri n'ye bölünmez. Bunlardan n tane (n – 1'den fazla) olduğundan, modülo n denk olan ikisi (diyelim 2^i ve 2^j) bulunur. $i < j$ olsun. Demek ki, $2^i \equiv 2^j \pmod n$. Dolayısıyla, n ile 2^i aralarında asal olduğundan $2^{j-i} \equiv 1 \pmod n$ olmalı. Şimdi $k = j - i$ alındığında $1 \leq k \leq n - 1$'dir ve $2^k - 1$ sayısı n'ye bölünür.

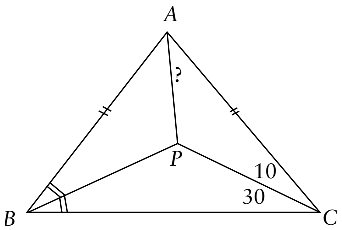
Y296. *Bir n pozitif tamsayısı için*

$$2n + 1 \text{ ve } 3n + 1$$

sayıları tamkarelerdir. n*'nin* 8'*e bölündüğünü gösteriniz.*

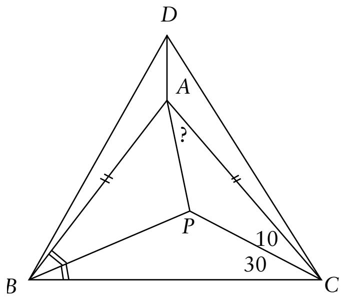
Çözüm: $p^2 = 2n + 1$, $q^2 = 3n + 1$ olacak şekilde p ve q pozitif tamsayıları bulunur. O halde p, 1'den büyük bir tek sayıdır; yani k pozitif tam sayı olmak üzere $p = 2k + 1$ şeklinde yazılabilir. $2n = p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1) = 2k(2k+2)$ eşitliğinden, $q^2 = 3n + 1 = (3/2)(2n) + 1 = (3/2)2k(2k+2) = 6k(k + 1) + 1$ elde edilir. Demek ki q^2 bir tek sayıdır. Bundan da q'nün bir tek sayı olduğu çıkar. Yani bir m tamsayısı için, $q = 2m + 1$ elde edilir. Bundan da $3n = q^2 - 1 = 2m(2m + 2) = 4m(m + 1)$ eşitliği elde edilir. İki ardışık sayıdan biri çift olduğundan, son eşitliklerin sağ tarafı 8'e bölünür. O halde, $3n$, ve dolayısıyla n de, 8'e bölünür.

Çözenler: Ertuğrul Aksünger, Antalya; Mustafa Ataklı, Safa Dersanesi, Gaziantep; Orhan Ateş, Balıkesir Üniversitesi; Behzat Aytimur, Zonguldak; Bilgin Canpolat, H.F.Z. Anadolu Lisesi, Çerkezköy, Tekirdağ; Alper Çay, Uzman Dersanesi, Kayseri; Yılmaz Dağ, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir; Jale Dinler, Adana Fen Lisesi; Aras Erzurumluoğlu, İstanbul Lisesi; Serdar Karatekin, İstanbul Lisesi; Ercan Karadaş, TCMB, Ankara; Halit Öztürk, Çorum; Rukiye Öztürk, Antalya; Metin Sarayköylü, Tire Akademik Dershanesi, İzmir; Cemal Sertkaya, Mücahit Meral, Dumlupınar Üniversitesi, Kütahya; İlknur Sever, Hacı Fahri Zümbül Anadolu Lisesi, Tekirdağ; Servet Soyarslan, Karadeniz Teknik Üniversitesi; Nasire Taçkın, Ege Üniversitesi, İzmir; Osman Telli, Özel Kazımoğlu Lisesi, İstanbul; Nami Yıldırım, Türkiye İş Bankası, İzmir; İhsan Yücel, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Amasya Eğitim Fakültesi; Hasan Zerve, ODTÜ, Kimya Müh., Ankara.



Y297. *ABC ikizkenar üçgeninin ($|AB| = |AC|$) içinde, $m(PBA) = m(PBC)$, $m(PCA) = 10°$ ve $m(PCB) = 30°$ olacak şekilde bir P noktası alınmıştır. $m(PAC)$ kaç derecedir?* (Soruyu öneren: Onur Baysal, İYTE, Matematik Bölümü.)

Çözüm: Aşağıdaki şekildeki gibi DBC eşkenar üçgenini çizelim. $m(ABP) = m(PBC) = (30° + 10°)/2 = 20°$ olduğundan $m(ABD) = 60° - 40° = 20°$'dir. $|BD| = |CD|$, $|AB| = |AC|$ ve $m(ABD) = m(ACD) = 20°$ olduğundan ABD ve ACD üçgenleri eşittir. Dolayısıyla $m(BDA) = m(CDA) = 30°$'dir. $|BD| = |BC|$, $m(BDA) = m(BCP) = 30°$ ve $m(ABD) = m(PBC) = 20°$ olduğundan ABD ve PBC üçgenleri eşittir. O halde $|BA| = |BP|$'dir. Buradan $m(BAP) = (180° - 20°)/2 = 80°$ elde edilir. $m(BAC) = 100°$ olduğundan $m(PAC) = 20°$'dir.



Çözenler: Ertuğrul Aksünger, Antalya; Osman Arşın, Ortaklar Anadolu Öğretmen Lisesi, Aydın; Mustafa Ataklı, Safa Dersanesi, Gaziantep; Bilgin Canpolat, H.F.Z. Anadolu Lisesi, Çerkezköy, Tekirdağ; Alper Çay, Uzman Dersanesi, Kayseri: Yılmaz Dağ, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir; Jale Dinler, Adana Fen Lisesi; Yavuz Marancı, Balıkesir Üniversitesi; Ercan Karadaş, TCMB, Ankara; Servet Soyarslan, Karadeniz Teknik Üniversitesi; Barış Şahbaz, Ankara; Osman Telli, Özel Kazımoğlu Lisesi, İstanbul; Eren Yoldaş Yıldırım, Atatürk Üniversitesi, Erzurum; İhsan Yücel, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Amasya Eğitim Fakültesi; Hasan Zerve, ODTÜ, Kimya Müh., Ankara.

Y298. *15 beyaz ve 15 siyah dama taşı çember boyunca herhangi sırayla dizilmiştir. Her hamlede herhangi iki taşın yerini değiştirebiliyoruz. Başlangıçtaki durum ne olursa olsun, belli bir n hamlede, tüm komşu taşların farklı renkte olması sağlanabilir. n en az kaç olabilir?*

Çözüm: Dama taşlarını saat yönünde 1'den 30'a kadar tamsayılarla numaralandıralım. Çift numaralı 15 taş arasında beyazlar siyahlardan daha az olsun (siyahların daha az olduğu durum benzer şekilde incelenir). O halde çift numaralı beyaz taşların sayısı en fazla 7'dir. Tek numaralı siyah taşların sayısı da aynıdır. Çift numaralı beyazlarla tek numaralı siyahların yerini değiştirdiğimizde en fazla 7 hamle yapmış olacağız ve taşları yeniden numaralandırdığımızda beyaz taşların numaraları tek, siyah taşların numaraları da çift olduğundan komşu taşlar farklı renkte olacaktır. n'nin 7'den az olamayacağını kanıtlamak için taşları, ilk 15 taş beyaz, sonraki 15 taş da siyah olacak şekilde sıralayalım. O halde {1, 2}, {3, 4}, ... , {13, 14}, {17, 18}, {19, 20}, ..., {29, 30} çiftleri aynı renkte olan komşulardır. Tüm komşuların farklı renkte olması için bu çiftlerin her birinden en az 1 taş üzerinde bir hamle yapılmalıdır. Çiftlerin sayısı 14 olduğu ve her hamle 2 taş üzerinde yapıldığı için en az 7 hamle yapılmalıdır.

Çözenler: Alper Çay, Uzman Dersanesi, Kayseri; Yılmaz Dağ, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir; Ercan Karadaş, TCMB, Ankara; Hasan Zerve, ODTÜ, Kimya Müh., Ankara.

Y299. $g(x) = f(x) + \sin f(x)$ *fonksiyonu devirli (periyodik) olacak şekilde* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu verilmiştir.* $f(x)$ *fonksiyonunun da devirli olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: $h(x) = x + \sin x$ fonksiyonu alınırsa $g(x) = h(f(x))$ yazılabilir. g'nin devri T ise f'nin de aynı devre sahip olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım. O halde $f(a + T) \neq f(a)$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ bulunur. $h'(x) = 1 + \cos x$ olduğundan $h(x)$ fonksiyonu artandır, dolayısıyla $f(a + T) > f(a)$ ise, $h(f(a + T)) > h(f(a))$, yani $g(a + T) > g(a)$ elde edilir, bu da g'nin devrinin T olmasıyla çelişir. $f(a + T) < f(a)$ durumunda $g(a + T) < g(a)$ eşitsizliğinden aynı çelişki edilir.

Çözenler: Seçil Çeken, Akdeniz Üniversitesi, Antalya; İhsan Yücel, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Amasya Eğitim Fakültesi; Hasan Zerve, ODTÜ, Kimya Müh., Ankara.

Y300. *Düzlem üzerinde 7 doğru verilmiştir. Bunlar* 13 *noktada kesişiyorlar. Bu noktaların on birinde ikişer doğru, birinde üç doğru ve birinde de dört doğru kesişiyor. Doğrulardan ikisinin birbirine paralel olduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm: Üç doğrunun kesiştiği nokta A, dört doğrunun kesiştiği nokta da B olsun. İki durum olabilir.

1) AB doğrusu sorudaki 7 doğrudan biridir. Bu durumda A noktasından AB ve a_1, a_2 gibi iki doğru daha geçer. B noktasından da AB, b_1, b_2, b_3 doğruları geçer. Bu 6 doğru dışında A'dan ve B'den geçmeyen bir doğru daha var, bu da l olsun. l doğrusu a_i ve b_j doğrularının ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$) kesişim noktalarından da geçmez, çünkü aksi taktirde A ve B dışında, en az 3 doğrunun geçtiği bir nokta daha bulunurdu. 7 doğrudan hiçbir ikilisi birbirine paralel olmasaydı doğruların kesiştiği nokta sayısı 13 değil 14 olacaktı: A, B; a_i'lerin b_j'lerle kesiştiği $2 \times 3 = 6$ nokta ve l'nin geriye kalan 6 doğruyla kesiştiği 6 nokta. Böylece bu durumda birbirine paralel olan iki doğru bulunur.

2) AB doğrusu 7 doğru arasında değildir. Bu durumda A'dan geçen doğruları a_1, a_2, a_3; B'den geçen doğruları da b_1, b_2, b_3, b_4 ile gösterelim. Bu doğrular birbirinden farklıdır, dolayısıyla tüm 7 doğruyu oluşturuyor. 7 doğru arasında birbirine paralel olan ikisi bulunmuyorsa, her a_i her b_j ile kesişiyor ve bu kesişim noktaları birbirinden farklıdır, çünkü aksi taktirde A ve B dışında en az 3 doğrunun geçtiği bir nokta daha bulunurdu. O halde bunlar $3 \times 4 = 12$ noktada kesişecekler ve A, B ile birlikte toplam 14 kesişim noktası bulunacaktı. Kesişim noktalarının sayısı 13 olduğundan çelişki elde ediyoruz. Böylece bu durumda da birbirine paralel olan iki doğru bulunur.

Çözenler: Mustafa Ataklı, Safa Dersanesi, Gaziantep; Bilgin Canpolat, H.F.Z. Anadolu Lisesi, Çerkezköy, Tekirdağ; Seçil Çeken, Akdeniz Üniversitesi, Antalya; Yılmaz Dağ, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir; Özge Duru, Aksaray Anadolu Öğretmen Lisesi; Aras Erzurumluoğlu, İstanbul Lisesi; Ercan Karadaş, TCMB, Ankara; Halit Öztürk, Çorum; Metin Saraykoylü, Tire Akademik Dershanesi, İzmir; Osman Telli, Özel Kazımoğlu Lisesi, İstanbul; Eren Yoldaş Yıldırım, Atatürk Üniversitesi, Erzurum; İhsan Yücel, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Amasya Eğitim Fakültesi; Hasan Zerve, ODTÜ, Kimya Müh., Ankara. ♦

Düzeltme

Bir yanlışlık sonucu geçen sayımızda daha eski sorulara doğru yanıt verenlerin listesini yayımlamışız. Yanlışımızdan dolayı özür dileyip doğru listeyi aşağıda sunuyoruz:

Doğru yanıt yollayanlar: Bayram Adaletsever (Uludağ Üniversitesi, Matematik Bölümü) Y291; Muhammet Alan-Halit Öztürk (Gazi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Bölümü) Y291, Y292, Y295; Osman Arşın (Menderes, İzmir) Y291, Y292; Tayfun Atalar (İstanbul Atatürk Fen Lisesi) Y292; Oktay Balkış (Aksaray Anadolu Öğretmen Lisesi) Y291, Y292, Y295; Dilek Bayrak (Karadeniz Teknik Üniversitesi, Matematik Öğretmenliği Bölümü) Y291; Ayşe Borat (Ege Üniversitesi, Matematik Bölümü) Y291; Alper Çay (Erciyes Üniversitesi, Matematik Bölümü) Y291, Y292; Enver Çetin (Karataş Erkek Lisesi, İstanbul) Y292; Serkan Dağlar (Eskişehir Kılıçoğlu Anadolu Lisesi) Y292; Mustafa Dönmez (Turgutlu Halil Kale Fen Lisesi), Yaşar Dönmez (Turgutlu Lisesi) Y291, Y292; Aras Erzurumluoğlu (İstanbul Lisesi) Y291; Cihat Gülcu (Ankara Fen Lisesi) Y291; Zekeriya Güney (Muğla Üniversitesi, Matematik Bölümü) Y291, Y292, Y293, Y294; Esma İnan (19 Mayıs Üniversitesi, Matematik Bölümü) Y291; Levent Kulaçoğlu (Ataköy İstanbul) Y291, Y292, Y293; Kürşat Hakan Oral (Bakırköy İstanbul) Y291; Yüksel Özaltın (Kadıköy İstanbul) Y292; Ercan Ünlü (Yatağan Anadolu Lisesi mezunu) Y292; Eren Yoldaş Yıldırım (Atatürk Üniversitesi, Matematik Eğitimi Bölümü) Y292; Hasan Zerve (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Kimya Mühendisliği Bölümü) Y291,Y293, Y294, Y295; Cengiz Zopluoğlu (Abant İzzet Baysal Üniversitesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü) Y291. ♦