Kapak Konusu: Geometrik Kombinatorik

Latin ve Grekoromen Kareler

Emine Şule Yazıcı* / *yazici@maths.uq.edu.au*

1, 2, ..., n sayıları (ya da n tane simge), $n \times n$ boyutlu bir ızgaraya (tabloya), herbiri her satır ve her sütunda birer kez belirecek biçimde yerleşmişse, elde edilen sayı dizinine ***n-inci dereceden latin kare*** denir. Örneğin, soldaki, üçüncü dereceden bir latin karedir.

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Bu örneğin devirli yapısını genelleştirerek her n doğal sayısı için kolaylıkla bir latin kare oluşturabiliriz. $n = 4$ ve 5 için işte bu devirli yapılar:

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

$n = 4$

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

$n = 5$

İkinci dereceden, aşağıdaki iki latin kare vardır sadece. Üçüncü dereceden 12 (bunları bir sonraki yazıda sayfa 14'te görebilirsiniz), dördüncü dereceden 576 latin kare vardır. Dereceyi beşe çıkardığımızda latin kare sayısı 161.280'e çıkar, belki fırlar demek daha doğru olur. Aşağıdaki çizelgede de görüldüğü üzere, derece büyüdükçe latin kare sayısı çok hızlı bir artış gösterir. Sadece yakın zamanda 11'inci dereceden latin kare sayısının aşağıdaki 48 basamaklı bir sayı olduğu gösterilebilmiştir.

1	2
2	1

2	1
1	2

n	**latin kare sayısı**
1	1
2	2
3	12
4	576
5	161280
6	812851200
7	61479419904000
8	108776032459082956800
9	5524751496156892842531225600
10	9982437658213039871725064756920320000
11	776966836171770144107444346734230682311065600000

Öyle bir c sabiti vardır ki, n "çok büyük" bir sayıysa, derecesi n olan aşağı yukarı $(cn)^{n^2}$ tane latin kare vardır.

Euler'in Subay Problemi. *Altı alayın her birinden, her biri farklı rütbeye sahip (sözgelimi asteğmen, teğmen, yüzbaşı, binbaşı, albay, general) altı subay seçiliyor. Bu 36 subay, her sırada ve her sütunda her rütbe ve her alaydan birer temsilci olacak biçimde 6 × 6'lık bir kareye yerleştirilebilir mi?*

Euler bu soruyu 1782'de sormuş ama yanıtlayamamış ve yanıtın olumsuz olacağını öngörmüştür.

Eğer alay ve rütbeleri 1'den 6 ya kadar numaralandırırsak, her subay, $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ için, ayrı bir (x, y) ikilisine tekabül eder. Euler'in sorusunu çözmek demek, bu 36 tane (x, y) ikilisini (yani alay ve rütbeleriyle gösterilen subayları) 6 × 6'lık bir kareye, hem birinci koordinatlar (yani x'ler) hem de ikinci koordinatlar (yani y'ler) bir latin kare oluşacak biçimde yerleştirmek demektir.

Bu tür karelere ***grekoromen*** (ya da ***grekolatin***) ***kare***ler denir. Koordinatlarından iki ayrı latin kare elde edilmiş bir grekoromen kare yanda görülüyor.

1,1	2,2	3,3
2,3	3,1	1,2
3,2	1,3	2,1

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	2	3
3	1	2
2	3	1

Birleştirildiğinde grekoromen kare elde edilen latin karelere ***dik latin kareler*** denir. Yukarda birbirine dik iki latin kare gördük. İşte birbirine dik iki latin kare daha:

1	3	4	2
4	2	1	3
2	4	3	1
3	1	2	4

+

1	4	2	3
3	2	4	1
4	1	3	2
2	3	1	4

=

11	34	42	23
43	22	14	31
24	41	33	12
32	13	21	44

İkiden fazla latin kare birbirine dik olabilir. İşte herhangi ikisi birbirine dik dört latin kare:

1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5
2 3 4 5 1	3 4 5 1 2	4 5 1 2 3	5 1 2 3 4
3 4 5 1 2	5 1 2 3 4	2 3 4 5 1	4 5 1 2 3
4 5 1 2 3	2 3 4 5 1	5 1 2 3 4	3 4 5 1 2
5 1 2 3 4	4 5 1 2 3	3 4 5 1 2	2 3 4 5 1

Tarihçe. Euler'in Subay Problemi, dediğimiz gibi, derecesi 6 olan bir grekoromen kare bulmaya, yani derecesi 6 olan birbirine dik iki latin kare bulmaya denktir. Euler böyle iki latin kare bulamadığı gibi, derecesi 10, 14, 18, 22 olan birbirine dik latin

* Queensland Üniversitesi Matematik Bölümü ziyaretçi öğretim üyesi.

kareler de bulamamıştır. Bundan yola çıkarak, Euler'in ölümünden sonra, derecesi $4k + 2$ olan iki dik karenin olamayacağı sanısı ortaya çıkmıştır.

Aα	Cδ	Dβ	Bγ
Dγ	Bβ	Aδ	Cα
Bδ	Dα	Cγ	Aβ
Cβ	Aγ	Bα	Dδ

Euler, birbirine dik iki latin karenin birini Yunan diğerini Latin harfleriyle simgelendirdiğinden, bunlara ***grekolatin kare*** demiş. Sorusunu ve bulduklarını 1782'de yayımlamıştır [Eul bkz. s. 58]. Yüz yıldan fazla bir zaman bu sanı ne kanıtlanabilmiş ne de sanıya ters bir örnek gösterilebilmiştir. Nihayet, 1900'de, Cezayir'de bir kız okulunda matematik öğretmeni olan Fransız Gaston Tarry (1843-1913), tüm olasılıkları tarayarak, daha doğrusu öğrencilerine taratarak, gerçekten de, altıncı dereceden birbirine dik iki latin karesi olmadığını göstermiştir. Tarry'nin kanıtı türünden kaba kuvvet kanıtlar matematikte pek hoş karşılanmazlar.


Gaston Tarry

Teorem. *Herbiri diğerine dik en fazla $n-1$ tane n-inci dereceden latin kare olabilir.*

Kanıt: Önce, birbirine dik k tane latin kare varsa, gene birbirine dik ama bu sefer ilk sıraları sırasıyla 1, 2, ..., n sayılarından oluşan k tane latin kare olduğunu kanıtlayalım. Birbirine dik k latin kareden birini ele alalım, diyelim A. Birinci sırasındaki sayılar sırasıyla a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n} olsun. A karesindeki **her** a_{1j} sayısını j'ye dönüştürelim. Gene bir latin kare elde ederiz elbet. Elde ettiğimiz latin kareye A' diyelim. Eğer A ile B latin kareleri birbirine dikse, A' ile B latin karesi de birbirine diktir, çünkü eğer $A'B$'de (j, b) iki defa beliriyorsa, o zaman (a_{1j}, b) de AB'de iki kez belirir. Böylece birbirine dik k latin kareden birinin ilk sırasını istediğimiz gibi 1, 2, ..., n sırasına dönüştürdük. Aynı yöntemi diğer latin karelere de uygulayalım.

Şimdi ilk sıraları 1, 2, ..., n olan birbirine dik k latin karesi alalım. İkinci sırada ve birinci sütunda bulunan sayılara bakalım. Bunlar 2, 3, ..., n olabilir. Ayrıca hepsi birbirinden değişik olmalı. Demek ki en fazla $n - 1$ tane n dereceli birbirine dik latin kare olabilir. □

Hangi n'ler için n dereceli birbirine dik $n - 1$ tane latin kare vardır? Bu soru bugüne dek yanıtlanamamış, ama hiç olmazsa sorunun çok önemli geometrik bir soruya denk olduğu kanıtlanabilmiştir. Bkz. sayfa 46, Bose Teoremi.

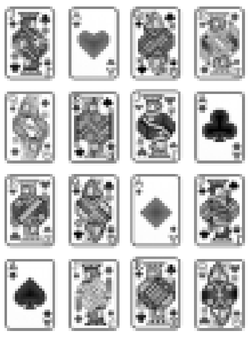
1984'te Stinson, derecesi 6 olan grekoromen karelerin olamayacağını matematikçilerin ince zevkine daha hitap eden üç sayfalık bir kanıt vermiştir [Sti].

1958'de, bir bilgisayar şirketinde çalışan Ernest Tilden Parker (1926-1991) onuncu dereceden grekoromen karelerin olabileceğine dair bazı ipuçları yakaladı. R.C. Bose, Parker'ın bulduklarından yola çıkarak çok büyük k'ler için $4k + 2$ dereceli grekoromen kareler buldu. Ardından, 1958'de, Bose ile Hintli matematikçi Schrikhande 22 dereceli bir grekoromen kare inşa etmeyi başardılar ve ABD'de New York Times gazetesine haber oldular. Parker bu sonucu gördükten sonra, 1959'da 10'uncu dereceden bir grekoromen kare elde etti. 1960'da Bose, Shrikhande ve Parker bir araya gelerek problemi tamamen çözüp 2 ve 6 dışında bütün n'ler için, aralarında dik n-inci dereceden latin kareler inşa ettiler [BS1, BS2, BPS, Lie]. Bu arada, bu araştırmalarda bilgisayar kullanılmadığını da belirtelim.

00	11	22	33	44	55	66	77	88	99
36	82	19	24	03	47	75	61	90	58
65	06	94	18	27	83	41	39	52	70
49	35	86	57	10	21	93	08	74	62
53	48	05	96	71	12	29	80	67	34
28	73	40	85	56	69	14	92	31	07
17	20	63	42	95	76	38	54	09	81
72	64	37	01	89	98	50	13	26	45
84	97	51	79	68	30	02	46	15	23
91	59	78	60	32	04	87	25	43	16

Onuncu dereceden bir grekoromen kare

Dik Latin Kare İnşası. Bu bölümde, $4k + 2$ biçiminde olmayan her n için, n-inci dereceden birbirine dik latin kareler inşa edeceğiz. Hatta çoğu zaman sadece iki tane değil, her biri diğerine dik birçok latin kare inşa edeceğiz. Bunu iki aşamada yapacağız. Önce n'nin bir asalın üssü olduğu durumu ele alacağız, genel problemi daha sonra çözeceğiz. Yöntemi MacNeish'a borçluyuz [Mac].


İskambil kâğıtlarından bir latin kare

Bu arada şunu da belirtelim ki, kombinatorik dalında genel kanı, bir problemin ardında cebir belirmiyorsa, o problemin ya ilginç olmadığı ya da insan gücünü aştığı yönündedir.

Eğer n bir Asalın Üssüyse. MD-2004 sayılarında cisimlerden sözedilmişti. Örneğin, asal p'ler için modüler sayılar kümesi $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ ve gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$, bilindik toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte birer cisimdirler. Genel olarak, bir cisim, bir küme ve bu küme üzerine toplama (+) ve çarpma adı verilen iki işlemden oluşur. Bir cismin oluşması için, toplama ve çarpma işlemlerinin sağlaması gereken bazı koşullar vardır. Bu koşulları bir kez daha yazmayacağız, ama bu koşulların $x(y + z) = xy + xz$ gibi son derece "doğal" ve çocukluğumuzdan beri alışık olduğumuz koşullar olduklarını belirtelim. Cisimlerin önemli bir özelliği de, her $x \neq 0$ için (burada 0, toplamanın etkisiz öğesidir), $xy = 1$ eşitliğini sağlayan bir y olmasıdır (burada 1, çarpmanın etkisiz elemanıdır.)

Şimdi F sonlu bir cisim olsun. Örneğin, asal bir p için $F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ olabilir. F'nin eleman sayısına n diyelim ve bu n elemanı $0, 1, 2, ..., n-1$ olarak adlandıralım. 0, alışılageldiği üzere, toplamanın etkisiz elemanı olsun. Şimdi her $k \in F \setminus \{0\}$ için, F üzerine $\bullet_k$ olarak adlandıracağımız bir işlemi,

$$x \bullet_k y = xk + y$$

kuralıyla tanımlayalım. $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ bu $n-1$ işlemin çarpım tabloları olsun.

Bu çarpım tablolarının her biri bir latin karedir, çünkü $x \bullet_k y = x' \bullet_k y$ ise, yani $xk + y = x'k + y$ ise, o zaman $xk = x'k$ ve, $k \neq 0$ olduğundan, $x = x'$ eşitliği geçerlidir. Aynı şekilde, $x \bullet_k y = x \bullet_k y'$ eşitliğinden de kolayca $y = y'$ elde edilir. Böylece her işlem tablosunda, her sütun ve her sırada her elemanın en fazla bir kez görüldüğünü kanıtlamış olduk.

A_k		x		z	
y		$xk+y$			
t				$zk+t$	

A_l		x		z	
y		$xl+y$			
t				$zl+t$	

A_kA_l		x		z	
y		$(xk+y, xl+y)$			
t				$(zk+t, zl+t)$	

Ayrıca, latin karesi oluşturan bu $n - 1$ çarpım tablosu birbirine diktir. Nitekim, eğer A_k ve A_l latin karelerinde iki değişik (x, y) ve (z, t) pozisyonundaki elemanlar eşitlerse (bkz. yukardaki şekil), yani $xk + y = zk + t$ ve $xl + y = zl + t$ ise, o zaman, $(x - z)k = t - y = (x - z)l$ ve eğer $x \neq z$ ise $k = l$, tam istediğimiz gibi. Öte yandan eğer $x = z$ ise $y = t$, yani aynı pozisyonlardan söz ediyoruz.

Matematik Dünyası okuru daha bilmiyor ama, n elemanlı bir cisim ancak, n bir asalın üssüyse vardır. Dolayısıyla yukardaki yöntem bize n dereceden $n - 1$ tane birbirine dik latin kareyi ancak n bir asalın üssüyse verir.

Birkaç Cisim Örneği

p bir asal ve $k \geq 1$ bir doğal sayı olsun. p^k elemanlı bir cisim olduğu kanıtlanabilir, bir gün MD'de kanıtlarız. Burada, bazı p ve k değerleri için p^k elemanlı bir cisim sunacağız. Kümemiz $\mathbb{F}_{p^k} = \mathbb{F}_p[x]$ olsun, yalnız x üzerine bir koşulumuz var.

$p = k = 2$ ise, $x^2 = x + 1$;

$p = 2$ ve $k = 3$ ise, $x^3 = x + 1$;

$p \equiv 3 \pmod 4$ ve $k = 2$ ise, $x^2 = -1$;

$p \equiv 5 \pmod 6$ ve $k = 2$ ise, $x^2 = x - 1$

olsun. Şimdi $\mathbb{F}_{p^k}$ kümesinde toplamayı ve çarpmayı "en doğal" biçimde yapalım. Her seferinde bir cisim elde ederiz.

Diğer n'ler için, n-inci dereceden dik latin kareleri şöyle inşa edeceğiz: Önce n'yi asal çarpanlarına ayırıp n'yi tam olarak bölen her p^k asal üssü için yukardaki gibi birbirine dik $p^k - 1$ tane latin kare bulacağız. Sonra, aşağıda açıklayacağımız yöntemle bu latin kareleri (değişik p'ler için) birbirleriyle "çarpacağız". Böylece n-inci dereceden dik latin kareler elde edeceğiz.

Latin Karelerin Çarpımı. A ve B, sırasıyla n ve m-inci dereceden iki latin kare olsun. Bu iki latin kareden nm dereceli bir latin kare elde edeceğiz. Önce, B'nin her b terimini $A \times b$ karesiyle değiştirelim. Bu, en iyi bir örnekle anlatılır:

$A =$

1	2
2	1

$B =$

1	2	3
2	3	1
3	1	2

(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(1,3)	(2,3)
(2,1)	(1,1)	(2,2)	(1,2)	(2,3)	(1,3)
(1,2)	(2,2)	(1,3)	(2,3)	(1,1)	(2,1)
(2,2)	(1,2)	(2,3)	(1,3)	(2,1)	(1,1)
(1,3)	(2,3)	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
(2,3)	(1,3)	(2,1)	(1,1)	(2,2)	(1,2)

Sonra, elde ettiğimiz karede her çifti 1'den nm'ye kadar olan bir sayıyla değiştirelim. nm dereceli bir latin kare elde ederiz. Bu yeni latin kareyi $A \times B$ olarak gösterelim. Yukardaki örnekten bir sonraki sayfadaki latin kare elde edilir.

$A \times B =$

1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5
3	4	5	6	1	2
4	3	6	5	2	1
5	6	1	2	3	4
6	5	2	1	4	3

Latin karelerin çarpımının şu özelliği vardır: A_1 ve A_2 latin kareleri n-inci dereceden ve birbirine dikse, ayrıca B_1 ve B_2 latin kareleri m-inci dereceden ve birbirine dikse, o zaman, $A_1 \times B_1$ ve $A_2 \times B_2$ birbirine dik ve mn-inci dereceden latin karelerdir. (Okura alıştırma.)

Bu sonuçtan yararlanarak şu sonuca varırız: Eğer

$$L_1, L_2, .., L_t$$

latin kareleri n-inci dereceden ve birbirlerine dikse ve

$$K_1, K_2, .., K_t$$

latin kareleri m-inci dereceden ve birbirlerine dikse, o zaman,

$$L_1 \times K_1, L_2 \times K_2, .., L_t \times K_t$$

latin kareleri mn-inci dereceden ve birbirlerine diktirler.

Dolayısıyla, eğer $n = p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}$ ise ve p_i'ler birbirinden değişik asallarsa, o zaman, daha önceki bölümde bulduğumuz yöntemle yukardaki yöntemi kullanarak birbirine dik n-inci dereceden $\min\{p_1^{r_1}, \ldots, p_k^{r_k}\} - 1$ tane latin kare bulabiliriz.

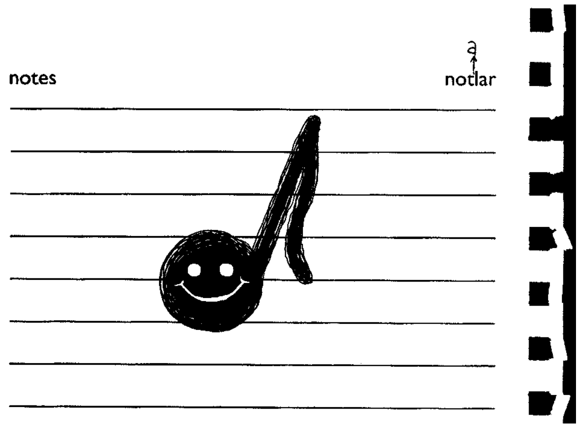
Böylece, eğer n è 2 mod 4 ise, yani her $p_i^{r_i} \neq 2$ ise n-inci dereceden birbirine dik latin kareler bulmuş oluruz.

Ama $n \equiv 2$ mod 4 ise de (ama $n \neq 2$ ya da 6) birbirine dik n-inci dereceden latin kareler vardır. İşte $n = 10$ iken birbirine dik iki latin kare:

4	X	9	8	3	2	7	5	6	1	5	4	X	1	2	7	8	9	3	6
2	3	7	5	4	X	9	8	1	6	3	1	6	4	8	5	9	2	X	7
8	1	6	9	X	4	5	3	2	7	X	9	8	7	3	6	1	4	5	2
9	8	1	4	5	6	3	2	7	X	2	5	4	3	6	1	7	8	9	X
X	9	8	6	1	3	2	7	4	5	9	8	7	6	1	X	4	5	2	3
7	2	3	1	6	5	4	X	9	8	1	6	3	5	9	2	X	7	4	8
5	4	X	3	2	7	6	1	8	9	8	7	2	9	X	4	5	3	6	1
6	5	4	2	7	1	8	9	X	3	4	X	9	2	7	8	3	6	1	5
1	6	5	7	8	9	X	4	3	2	7	2	5	X	4	3	6	1	8	9
3	7	2	X	9	8	1	6	5	4	6	3	1	8	5	9	2	X	7	4

Onuncu dereceden birbirine dik iki latin kare;
10 yerine X yazdık.

Latin karelerin uygarlığımıza ve günlük yaşamımıza katkıları çoktur. Zaten bu kadar doğal bir yapının uygulamasının olmaması herhalde imkânsızdır. Yerimizin ve ilgimizin azlığından latin karelerin uygulamalarından söz etmeyeceğiz. ♣



Emine Şule Yazıcı

1978 İstanbul doğumluyum. 1995'te Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü'yle başlayan matematik eğitimim 2003'te Auburn Üniversitesi "Discrete and Statistical Sciences" bölümünden aldığım doktorayla bitti. Bir yıl yine aynı bölümde "doktora-sonrası" çalışması yaptım. Şu anda Avustralya'nın Queensland Üniversitesi'nde bir yıllık pozisyonum var. Kombinatorik konusunda çalışıyorum.

Ortaokulda blok flüt grubundaydım. Lisede kimya olimpiyatları takımında yer aldım. Çocukluğumda gazetelerdeki bulmacalarla başlayan bilmece merakım liseden sonra çeşitli kulüplere üye olarak devam etti. Özellikle zekâ oyunlarına ve matematik ve mantık bulmacalarına büyük ilgim var. Türkiye Zekâ Oyunları Kulübü ve Türkiye Zekâ Vakfı'na üyeydim. Düzenli olarak bu kurumların düzenlediği zekâ oyunları yarışmalarına katıldım. Bunun dışında dans etmeyi çok severim. Doktora sırasında "balo dansları" dersleri aldım. Daha sonra, Latin Amerikalı arkadaşlarımın da etkisiyle Latin danslarına başladım. Özellikle Merenge ve Salsa müzikleriyle dans etmeyi severim. ♣