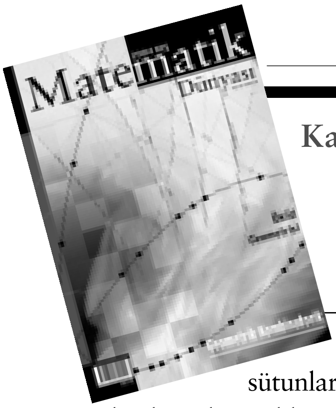

Kapak Konusu: Geometrik Kombinatorik

Latin Dönüşümleri

Ali Nesin* - Emine Şule Yazıcı** / *anesin@bilgi.edu.tr - yazici@maths.uq.edu.au*

Herhangi bir latin karenin sütunlarının yerlerini değiştirirsek gene bir latin kare elde ederiz elbette. İşte, latin kare olma özelliğini koruyan bu tür dönüşümlerden sözedeceğiz bu yazıda.

"Latin kare olma özelliğini koruyan dönüşümler"in matematiksel tanımını yazının sonunda vereceğiz. Literatürde böyle bir tanımda genel bir uzlaşma olmadığını da hemen belirtelim.

Sym(n) Grubu

Daha sonraki yazılardan bağımsız olan bu yazıyı hakkıyla anlamak için Sym(n) grubunu bilmek gerekir. 2003-I sayımızda (sayfa 26) bahsettiğimiz Sym(n) grubunu (yazıdan bağımsız görünmesi için) anımsatalım.

$\{1, 2, ..., n\}$ kümesinden gene $\{1, 2, ..., n\}$ kümesine giden birebir ve örten fonksiyonlara ***eşleşme*** adı verilir. Bu eşleşmelerin kümesi Sym(n) olarak gösterilir. Kolayca kanıtlanabileceği üzere Sym(n)'nin tam $n!$ tane elemanı vardır.

Sym(n)'nin elemanlarını göstermek için, evrensel kabul görmüş çok pratik bir yöntem vardır. Bir örnekle açıklayalım: Sym(8)'in 1'i 2'ye, 2'yi 4'e, 4'ü tekrar 1'e, 3'ü 6'ya ve 6'yı tekrar 3'e götüren ve diğer sayıları sabitleyen eşleşmesi,

$$(1\ 2\ 4)(3\ 6)$$

olarak yazılır. Bir başka örnek: Sym(5)'in

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$$

olarak gösterilen elemanı, 1'i 2'ye, 2'yi 3'e, 3'ü 4'e, 4'ü 5'e ve 5'i tekrar 1'e götürür. Sym(n)'nin $\{1, 2, ..., n\}$ kümesinin hiçbir elemanın yerini değiştirmeyen ***etkisiz eleman***ı Id olarak yazılır.

İki eşleşmenin bileşkesi gene bir eşleşmedir. Bu işlem yüzünden Sym(n)'ye ***grup*** adı verilir. Örneğin, (1 2)(3 4 5) eşleşmesiyle (2 3 4) eşleşmesinin bileşimi (1 2 4)(3 5)'tir. Bunu,

$$(1\ 2)(3\ 4\ 5) \circ (2\ 3\ 4) = (1\ 2\ 4)(3\ 5)$$

biçiminde gösteririz. Ama dikkat:

$$(2\ 3\ 4) \circ (1\ 2)(3\ 4\ 5) = (1\ 3\ 2)(4\ 5) \neq (1\ 2\ 4)(3\ 5).$$

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.
** Queensland Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.

Sütun ve Sıraların Permütasyonu. Bir latin karenin sütunlarının yerlerini değiştirirsek gene bir latin kare elde edeceğimiz çok bariz. Bu tür latin kare özelliğini koruyan dönüşümlere ***latin dönüşümü*** adını verelim.

Latin dönüşümü kavramını biraz muğlak verdiğimizin ayırdındayız. Zaten yazımızın amaçlarından biri de bu kavrama matematiksel bir içerik kazandırmak olacak.

Eğer derecemiz n ise, sütun değiştiren latin dönüşümlerinden tam $n!$ tane vardır, çünkü n sütunu Sym(n)'nin elemanlarıyla tam $n!$ değişik biçimde değiştirebiliriz. Ayrıca Id dışında hiçbir dönüşüm bir latin kareyi sabitlemez, yani Id dışında her dönüşüm her latin kareyi **bir başka** latin kareye dönüştürür.

Eğer $\alpha \in$ Sym(n) ise, latin karenin n sütununu α'ya uygun biçimde değiştiren dönüşümüne k_α adını verelim. Bunların kümesine de K_n ya da kısaca K diyelim. Buradaki k ve K "kolon"un k'sidir.

Sıraları değiştirirsek de latin kare olma özelliği bozulmaz. Sym(n) grubunun her elemanı her latin kare için bu yöntemle ayrı bir latin dönüşümü verir. Eğer $\beta \in$ Sym(n) ise, latin karenin sıralarını β'ya uygun biçimde değiştiren dönüşüme s_β diyelim. Bunların kümesine de S_n ya da kısaca S diyelim. Buradaki s ve S de "sıra"nın s'sidir.

Her $\alpha, \beta \in$ Sym(n) için,

$$k_\alpha \circ s_\beta = s_\beta \circ k_\alpha$$
$$k_\alpha \circ k_\beta = k_{\alpha\beta}$$
$$s_\alpha \circ s_\beta = s_{\alpha\beta}$$
$$s_{Id} = k_{Id} = Id$$

eşitlikleri kolayca kanıtlanabilir. Bu hesaplardan şu çıkar: Bu sıra ve sütun değiştirme dönüşümlerinin birbirleriyle bileşkelerini alıp bunları bir latin kareye uygularsak, bir latin kareden $(n!)^2$ kadar latin kare üretebiliriz. Hatta, iyimser bir günümüzde, böylece tam $(n!)^2$ tane latin kare üreteceğimizi umabiliriz. Ama ne yazık ki bu $(n!)^2$ latin karenin bazıları eşit olabilirler. Örneğin, yandaki latin karenin önce birinci ve ikinci sütunlarını, sonra birinci ve ikinci sıralarını de-

1	2
2	1

ğiş tokuş edersek, aynı latin kareyi elde ederiz. Aşağıda buna başka örnekler de göreceğiz.

Matematiksel deyişle, $\mathrm{Sym}(n) \times \mathrm{Sym}(n)$ grubunun, n dereceli latin kareler kümesi üzerine bir etkisi vardır, ancak $\mathrm{Sym}(n) \times \mathrm{Sym}(n)$ grubunun birden fazla elemanı bir latin kareyi sabitleyebilir.

Düzgün Latin Kareler

Önce sütunları, sonra satırları değiştirerek, n-inci dereceden bir latin karenin ilk sütun ve sırasının yandaki gibi olduğunu varsayabiliriz. Bu tür latin karelere ***düzgün latin kare*** denir.

1	2	3	...	n
2				
3				
c				
n				

Eğer L_n, derecesi n olan latin kare sayısıysa ve D_n, derecesi n olan düzgün latin kare sayısıysa, o zaman,

$$L_n = n!(n-1)!D_n$$

eşitliğini kanıtlamak mümkündür. Daha yayına kabul edilmemiş bir makaleye göre,

Teorem [McW]. $[n/2]!$ *sayısı* D_n*'yi böler.*

K ve S'deki dönüşümlerin birbirleriyle türlü biçimde bileşkelerini alarak elde edeceğimiz dönüşümler kümesine KS diyelim:

$$KS = \{k_\alpha \circ s_\beta : \alpha, \beta \in \mathrm{Sym}(n)\}$$

K, S ve KS kümeleri bileşke altında kapalıdır, yani bu kümelerden alınan herhangi iki dönüşümün bileşkesi gene bu kümededir. Bu özellikleri yüzünden, K, S ve KS kümelerine ***grup*** denir.

1	2	3
2	3	1
3	1	2

$\mathrm{Sym}(3) \times \mathrm{Sym}(3)$ (ya da K_3S_3) grubunun yandaki üçüncü dereceden latin kareye etkisini aşağıdaki tabloda bulacaksınız. Bu tabloda, üst sıradaki dönüşümler sütunları, sol taraftaki dönüşümler sıraları etkiliyor. Etkisiz dönüşümlerin etkileri (!) koyu griyle gösterilmiş: Görüldüğü gibi, $k_{(123)} \circ s_{(132)}$ ve $k_{(132)} \circ s_{(123)}$ latin dönüşümleri bu latin kareyi etkilemiyor.

	Id	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
Id	123 231 312	213 321 132	321 132 213	132 213 321	312 123 231	231 312 123
(12)	231 123 312	321 213 132	132 321 213	213 132 321	123 312 231	312 231 123
(13)	312 231 123	132 321 213	213 132 321	321 213 132	231 123 312	123 312 231
(23)	123 312 231	213 132 321	321 213 132	132 321 213	312 231 123	231 123 312
(123)	312 123 231	132 213 321	213 321 132	321 132 213	231 312 123	123 231 312
(132)	231 312 123	321 132 213	132 213 321	213 321 132	123 231 312	312 123 231

K_3S_3 grubunu yukardaki latin kareye uygulayarak, $(3!)^2/3$, yani 12 tane latin kare ürettik, üçüncü dereceden tüm latin kareleri.

$(n!)^2$ tane elemanı olan K_nS_n grubunu n-inci dereceden herhangi bir latin kareye uygulayarak en fazla $(n!)^2$ tane yeni latin kare elde ederiz elbette, daha fazla değil.

$(4!)^2 = 576$ eşitliğinden ve dördüncü dereceden tam 576 tane latin kare olduğundan (bkz. sayfa 9), aynen $n = 3$ şıkkında olduğu gibi, $n = 4$ için de, K_4S_4 grubunun dönüşümlerini dördüncü dereceden bir latin kareye uygulayarak, dördüncü dereceden tüm latin kareleri elde etmeyi umabiliriz, hiç olmazsa sayılar tutuyor (her ikisi de 576). Malesef olmuyor: K_4S_4 grubunun $k_{(12)(34)} \circ s_{(12)(34)}$ elemanı, yandaki latin kareyi sabitler. Biraz grup teorisiyle, bu bilgiden, dördüncü dereceden her latin karenin K_4S_4 grubunun en az iki elemanı tarafından sabitlendiği çıkar.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

Eğer $n \geq 5$ ise, latin kare sayısı $(n!)^2$'den çok daha büyük olduğundan, bu dönüşümlerle tüm n-inci dereceden latin kareleri elde etme şansımız hiç yok.

Simetri. Başka latin dönüşümü var mı? Yeni bir tane daha bulmak pek o kadar zor değil: Karenin sıralarını sütun, sütunlarını sıra yapabiliriz, yani çapraza göre karenin simetrisini alabiliriz.

τ

1	2	3	4	5
4	3	1	5	2
3	4	5	2	1
2	5	4	1	3
5	1	2	3	4

1	4	3	2	5
2	3	4	5	1
3	1	5	4	2
4	5	2	1	3
5	2	1	3	4

Bu dönüşüme τ adını verelim. Ayrıca $T = \{\mathrm{Id}, \tau\}$ olsun. T bir gruptur, çünkü $\tau \circ \tau = \mathrm{Id} \in T$.

Her $\alpha, \beta \in \mathrm{Sym}(n)$ için, kanıtı kolay olan,

$$k_\alpha \circ s_\beta \circ \tau = \tau \circ k_\beta \circ s_\alpha$$

eşitliğinden, K_nS_n ile T gruplarının elemanlarının türlü bileşkelerini alarak, toplam en fazla $2(n!)^2$ tane latin dönüşümü elde ederiz. İşte bu latin dönüşümleri:

$$\{k_\alpha \circ s_\beta \circ \tau^\varepsilon : \alpha, \beta \in \mathrm{Sym}(n), \varepsilon \in \{0, 1\}\}.$$

(Burada, $\tau^0 = \mathrm{Id}$ ve $\tau^1 = \tau$ anlamına kullanılıyor.) Bileşke işlemi altında kapalı olan bu kümeye (dolayısıyla gruba) KST adını verelim.

Döndürüler. Karenin 90 derecelik döndürüsü de bir latin dönüşümüdür. Aşağıda döndürüye bir örnek görülüyor.

1	2	3	4	5
4	3	1	5	2
3	4	5	2	1
2	5	4	1	3
5	1	2	3	4

5	2	3	4	1
1	5	4	3	2
2	4	5	1	3
3	1	2	5	4
4	3	1	2	5

Ancak bu döndürüyü daha önce tanımladığımız dönüşümlerden elde edebiliriz, yani bu döndürü yukarda tanımlanan *KST* grubundadır. Aşağıdaki şekildeki gibi, kareye önce τ simetrisini uygulayalım. Sonra birinci ve n-inci sütunları, ikinci ve $(n-1)$-inci sütunları vs değiştirelim. Aynen 90 derecelik döndürüyü elde ederiz. Yani 90 derecelik döndürü,

$$k_{(1\ n)(2\ n-1)\ \ldots} \circ \tau$$

dönüşümüdür.

1	2	3	4	5
4	3	1	5	2
3	4	5	2	1
2	5	4	1	3
5	1	2	3	4

1	4	3	2	5
2	3	4	5	1
3	1	5	4	2
4	5	2	1	3
5	2	1	3	4

5	2	3	4	1
1	5	4	3	2
2	4	5	1	3
3	1	2	5	4
4	3	1	2	5

Yukardaki latin dönüşümleri geometrikti, yani geometri kullanılarak tanımlanmışlardı. Şimdi biraz daha kombinatorik dönüşümler tanımlayacağız.

Sayıların Permütasyonu. Daha başka latin dönüşümleri de var. Hem de çok var: Herhangi bir latin karede, sözgelimi, tüm 1'leri 2, tüm 2'leri 3 ve tüm 3'leri 1 yaparsak gene bir latin kare elde ederiz. Genel olarak, $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin her permütasyonu, yani Sym(n) grubunun her elemanı, bu yöntemle bir latin dönüşümü verir. Bunlardan da elbette tam $n!$ tane vardır.

Eğer $\alpha \in$ Sym(n) ise, n-inci dereceden bir latin karenin her i sayısını $\alpha(i)$ sayısı yapan latin dönüşümüne p_α olarak gösterelim. Elbette,

$$p_\alpha \circ p_\beta = p_{\alpha\beta}.$$

p_α latin dönüşümlerinin kümesine de P diyelim:

$$P = \{p_\alpha : \alpha \in \mathrm{Sym}(n)\}.$$

P bir gruptur elbet. Buradaki p ve P, permütasyonun p'sidir.

Bazı latin karelerde, bazı p_α dönüşümleri daha önce bulduğumuz *KST* grubunda olabilirler. Örneğin, $p_{(123)}$ dönüşümünü soldaki latin kareye uygularsak $k_{(132)}$ dönüşümünün etkisini buluruz.

1	2	3
2	3	1
3	1	2

2	3	1
3	1	2
1	2	3

P grubunun $n!$ latin dönüşümüyle *KST* grubunun (en fazla $2(n!)^2$ olan) latin dönüşümlerinin çeşitli bileşkelerini alarak, daha birçok latin dönüşümü buluruz. Bu yöntemle en fazla $2(n!)^3$ tane latin dönüşümü elde ederiz, çünkü, her $\alpha, \beta \in$ Sym(n) için,

$$s_\alpha \circ p_\beta = p_\beta \circ s_\alpha$$
$$k_\alpha \circ p_\beta = p_\beta \circ k_\alpha$$
$$\tau \circ p_\beta = p_\beta \circ \tau$$

eşitlikleri geçerlidir. Bu eşitlikler daha öncekiler kadar bariz değil. Birazdan latin dönüşümlerini başka türlü görerek (yani bakış açısı değiştirerek) yukardaki eşitlikleri bariz bir hale getireceğiz.

Latin Kümeler. Başka latin dönüşümler var mı? Evet var! Ama bunları tanımlamadan önce latin kareleri başka türlü görmesini öğrenelim.

1	2	3
2	3	1
3	1	2

L bir latin kare olsun. L' kümesini şöyle tanımlayalım: $L' = \{(i, j, k)$: L'nin i-inci sırasında ve j-inci sütununda k sayısı var$\}$. Örneğin, eğer L yandaki latin kareyse, o zaman,

$$L' = \{(1, 1, 1), (1, 2, 2), (1, 3, 3), (2, 1, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 3), (3, 2, 1), (3, 3, 2)\}.$$

Her L latin karesi bu yöntemle,

$$\{1, 2, \ldots, n\}^3$$

kümesinin bir L' altkümesini verir. Latin karelerden bu yöntemle elde edilen L' altkümeleri şu üç özelliği sağlarlar:

1. Her i ve j için, $(i, j, k) \in L'$ ilişkisini sağlayan bir ve sadece bir tane k vardır. (Yani her (i, j) hücresine bir ve sadece bir tane k sayısı yazabiliriz.)

2. Her i ve k için, $(i, j, k) \in L'$ ilişkisini sağlayan bir ve sadece bir tane j vardır. (Yani her i-inci sıraya her k sayısı bir ve sadece bir kez yazılmış olmalı.)

3. Her j ve k için, $(i, j, k) \in L'$ ilişkisini sağlayan bir ve sadece bir tane i vardır. (Yani her j-inci sütuna her k sayısı bir ve sadece bir kez yazılmış olmalı.)

$\{1, 2, \ldots, n\}^3$ kümesinin yukardaki özellikleri sağlayan altkümelerine ***latin kümeleri*** adını verelim. Demek ki her latin kare bir latin kümesi doğurur. Bunun tersi de doğrudur: Her latin kümesi bir L latin karesi için L' latin kümesine eşittir. Bir başka deyişle, latin karelerle latin kümeleri arasında kavram olarak önemli bir ayrım yoktur; biri diğerine "denk"tir.

Dikkat ettiyseniz latin kümelerin tanımında üç koordinat arasında ayrım yok: Tanımda i, j ve k'nin yerlerini değiştirirsek gene aynı kavramı elde ederiz.

Latin Dönüşümleri. Artık, tam matematiksel olarak tanımlamadığımız “latin kare olma özelliğini koruyan dönüşümleri” bulmak yerine, “latin kümesi olma özelliğini koruyan dönüşümleri” bulabiliriz. “Latin kümesi olma özelliğini koruyan dönüşümler”le neyi kastettiğimizi açıklayalım. (En sonunda matematikselleşiyoruz!)

Eğer $\{1, 2, ..., n\}^3$ kümesinin bir σ eşleşmesi, her $L' \subseteq \{1, 2, ..., n\}^3$ latin kümesini gene bir latin kümesine yolluyorsa, o zaman σ eşleşmesine n-inci dereceden ***latin dönüşümü*** diyelim. (Eski “tanımı” unutalım!) Her latin dönüşümü latin kare olma özelliğini koruyan bir dönüşüm doğurur elbette.

$\mathrm{Sym}(n)$ grubu, $\{1, 2, ..., n\}^3$ kümesinin her koordinatını ayrı ayrı ve tahmin edileceği gibi dönüştürür ve böylece $\mathrm{Sym}(n)^3$ grubunun her elemanı, $\{1, 2, ..., n\}^3$ kümesinin şöyle tanımlanmış bir latin dönüşümünü doğurur: Eğer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Sym}(n)$ ve $(i, j, k) \in \{1, 2, ..., n\}^3$ ise,

$$(\alpha, \beta, \gamma)(i, j, k) = (\alpha(i), \beta(j), \gamma(k)).$$

Bu yolla, $\mathrm{Sym}(n)^3$ grubunun her elemanı bir latin dönüşümüne yol açar.

Bir latin kümede, üç koordinat arasında bir ayrım olmadığından, $\{1, 2, ..., n\}^3$ kümesinin üç koordinatını $\mathrm{Sym}(3)$ grubunun yardımıyla değiştirmek de latin dönüşümleri verir. Böylece 3!, yani 6 latin dönüşümü daha bulmuş oluruz.

Böylece toplam $6(n!)^3$ tane latin dönüşümü elde ederiz, yukarda bulduğumuzun üç katı!

Şimdi de, daha önce tanımladığımız K, S, T, P gruplarının $\{1, 2, ..., n\}^3$ kümesinin hangi dönüşümlerine tekabül ettiklerini bulalım. $\alpha \in \mathrm{Sym}(n)$ ise, latin karelerin s_α, k_α, τ ve p_α dönüşümleri sırasıyla $\{1, 2, ..., n\}^3$ kümesinin

$$s_\alpha(i, j, k) = (\alpha(i), j, k) = (\alpha, \mathrm{Id}, \mathrm{Id})(i, j, k)$$
$$k_\beta(i, j, k) = (i, \beta(j), k) = (\mathrm{Id}, \beta, \mathrm{Id})(i, j, k)$$
$$\tau(i, j, k) = (j, i, k)$$
$$p_\gamma(i, j, k) = (i, j, \alpha(k)) = (\mathrm{Id}, \mathrm{Id}, \gamma)(i, j, k)$$

dönüşümlerine tekabül ederler. Bunların dışında, örneğin,

$$\sigma(i, j, k) = (i, k, j)$$

dönüşümü de vardır. Bu σ dönüşümü, latin karelerde şu dönüşüme tekabül eder: L bir latin kareyse ve L’nin (i, j) hücresinde k varsa, σL’nin (i, k) hücresinde j olsun.

Anlayana: Bulduğumuz latin dönüşümler grubu, $\mathrm{Sym}(n)^3$ Ù $\mathrm{Sym}(3)$ grubuyla eşyapısaldır. σ ve τ dönüşümleri $\mathrm{Sym}(3)$ grubunu gerer.

Soru. Yukarda, $6(n!)^3$ tane latin dönüşümü bulduk. Daha fazla var mıdır?

Bu sorunun yanıtını başvurduğumuz birkaç uzmanın da bilmediğini belirtelim. Ama yanıt çok zor olmamalı. ♣

1	2	3	4
4	1	2	3
3	4	1	2
2	3	4	1

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

Bu iki latin kareden biri, yukarda bulduğumuz latin dönüşümleri diğerine uygulanarak elde edilmez. Ama 4’üncü dereceden her latin kare bu ikisinden birine latin dönüşümleri uygulanarak elde edilebilir.

Simetrisiz Latin Kareler

$\mathrm{Sym}(n)^3$ Ù $\mathrm{Sym}(3)$ grubunun Id dışında hiçbir elemanı tarafından sabitlenmeyen latin karelere ***simetrisiz latin kare*** denir. Beşinci dereceye kadar simetrisiz latin kare olmadığını gördük. Beşinci ve altıncı dereceden de olamaz çünkü,

$$6 \times (5!)^3 = 10.368.000 > 161.280$$
$$6 \times (6!)^3 = 2.239.488.000 > 812.851.200$$

(sağdaki sayılar 5’inci ve 6’ncı dereceden latin kare sayısıdır.) Aynı eşitsizlik 7 için geçerli olmadığından yedinci dereceden simetrisiz bir latin kare olabilir. Nitekim var da! Aşağıda 7’nci dereceden simetrisiz bir latin kare görüyorsunuz [Nor].

1	2	3	4	5	6	7
2	7	5	3	6	4	1
3	1	7	6	4	5	2
4	6	1	5	2	7	3
5	3	6	1	7	2	4
6	4	2	7	1	3	5
7	5	4	2	3	1	6

Henüz yayına kabul edilmemiş bir makalelerinde (haberler MD’ye çabuk ulaşır!), Brendan D. McKay ve Ian M. Wanless simetrili latin karelerin tüm latin karelere oranının n sonsuza giderken 0 olduğunu kanıtladı, yani latin karelerin “büyük çoğunluğu”nun simetrisi yoktur. McKay ve Wanless, oranın

$$n^{-3n^2/8+o(n^2)}$$

den küçük olduğunu kanıtladılar.