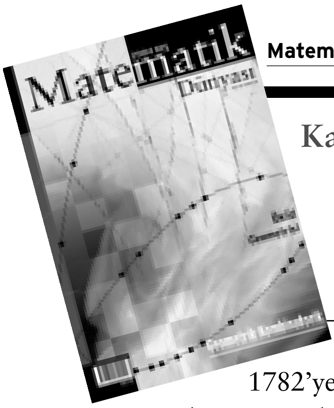


Kapak Konusu: Geometrik Kombinatorik

Steiner Üçlü Sistemleri ve Çizgeler

Selda Küçükçifçi* / *skucukcifci@ku.edu.tr*

Tasarım kuramının geçmişi 1782'ye, Euler'in ***36 subay problemi***'ne dayanır. Problemi biliyoruz. Anımsatalım: 6 farklı alay ve 6 farklı rütbeden 36 subayı 6 satır ve 6 sütunluk bir çizelgeye, her alay ve her rütbe her satır ve her sütunda sadece bir kez görülecek biçimde yerleştirmek mümkün müdür?

Tasarım kuramında 1850'de T. P. Kirkman'ın sorduğu ***Kirkman öğrenci problemi*** de önemlidir. Kirkman öğrenci problemi ***blok tasarımları*** adı verilen bir başka konuya yol açmıştır. Problem şöyle: Bir öğretmen 15 öğrencisini haftanın yedi günü yürüyüşe çıkarıyor. Öğrenciler 3'erli beş sıra halinde yürüyorlar. Bu yürüyüş programını herhangi iki öğrenci sadece bir gün aynı sırada yürüyecek şekilde ayarlamak mümkün müdür?

Bu sorunu yanıtının evet olduğu gösterilebilir. Örneğin, aşağıdaki yürüyüş programı çözümlerden biridir. (15 öğrenciyi 1'den 15'e kadar sayılarla adlandırdık.)

Ptesi	Salı	Çmba	Pmbe	Cuma	Ctesi	Pazar
1 2 3	1 4 5	1 6 7	1 8 9	1 10 11	1 12 13	1 14 15
4 8 12	2 8 10	2 9 11	2 12 15	2 13 14	2 4 6	2 5 7
5 10 14	3 13 15	3 12 14	3 5 6	3 4 7	3 9 10	3 8 11
6 11 13	6 9 14	4 10 15	4 11 14	5 9 12	5 11 15	4 9 13
7 9 15	7 11 12	5 8 13	7 10 13	6 8 15	7 8 14	6 10 12

Bu soruyu ve çözümünü gördükten sonra aklınıza doğal olarak gelen soru, "15 yerine başka sayıda öğrenci olsaydı ne olurdu?" olabilir.

Yukarıdaki çözüm 15'lik ***Kirkman üçlü sistemi*** diye adlandırılan özel bir ***Steiner üçlü sistemi***ne örnektir.

Steiner Üçlü Sistemi (SÜS). $v > 0$ bir doğal sayı ve $S = \{1, 2, ..., v\}$ olsun. B, S'nin bazı üç elemanlı altkümelerinden oluşan bir küme olsun. Eğer S'nin herhangi iki farklı sayısı B'nin elemanlarında sadece bir kez görülüyorsa, yani her $1 \le x \ne y \le v$ için,

$$\{x, y\} \subseteq A$$

özelliğini sağlayan bir ve bir tek $A \in B$ varsa, o zaman (S, B) sıralı ikilisine v'lik ***Steiner üçlü sistemi***[1] denir. B'nin elemanlarına da ***üçlü*** denir. "Steiner üçlü sistemi" terimini ***SÜS*** olarak kısaltalım.

Örnekler. 1. $v = 1$, $B = \emptyset$.

2. $v = 3$, $B = \{\{1, 2, 3\}\}$.

3. $v = 7$,

$$B = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 7, 2\}, \{7, 1, 3\}\}$$

sırasıyla 1, 3 ve 7'lik SÜS'lerdir.

Üçüncü örneği,

1234567
2345671
4567123

olarak gösterebiliriz. Burada her sütun bir üçlüdür.

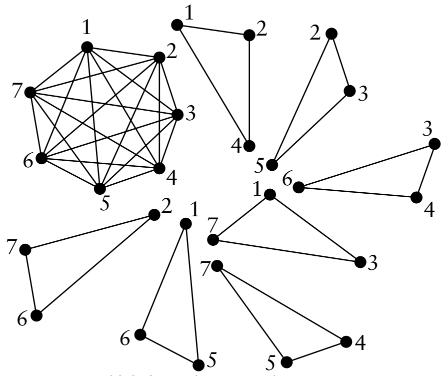
4. Her günün her sırasını bir üçlü olarak görürsek, Kirkman öğrenci probleminin her çözümü 15'lik bir SÜS verir.

SÜS'ün tanımında, simgeler kümesini,

$$S = \{1, 2, ..., v\}$$

yerine, v tane simgesi olan herhangi bir kümeyi de alabilirdik elbet. İlerde buna gereksinim duyacağız.

SÜS'leri çizgelerle de yorumlamak mümkündür. S'deki her sayı bir noktayı temsil etsin ve her $\{a, b, c\}$ üçlüsünü a, b, c köşeli ve $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ kenarlı üçgen olarak düşünelim. Her sayı çifti B'nin sadece bir üçlüsünde olacağından her kenar sadece bir üçgende olacaktır. Dolayısıyla (S, B) SÜS'ü, K_v tamçizgesinin üçgenlere parçalanmasına denktir. Aşağıda $v = 7$ için bunun bir resmini görüyorsunuz.



K_7'nin üçlü parçalanışı

* Koç Üniversitesi Matematik bölümü öğretim üyesi.

1 İngilizcesi *Steiner triple system*, kısa adıyla STS.

Biraz önce v = 1, 3, 7 için SÜS örnekleri gördük. Bir SÜS'ün olduğu bir sonraki v sayısı 9'dur. Okur, yazının devamını okumadan 9'luk bir SÜS bulmaya çalışabilir. Bir sonraki teorem hangi v'ler için SÜS'lerin olduğunu söyleyecek.

Teorem [T.P. Kirkman, 1847]. *v'lik Steiner üçlü sisteminin varlığı için gerek ve yeter koşul $v \equiv 1$ ya da 3 (mod 6)'dır. Ayrıca bu durumda*

$$|B| = v(v-1)/6$$

dır.

Kanıt. Bu koşulun gerekliliğini görmek kolaydır. SÜS'ü K_v tamçizgesinin üçgenlere parçalanışı olarak düşünürsek, her üçgende üç kenar olduğundan, üçgen sayısı $|B|$ olduğundan ve v noktadan herhangi ikisi mutlaka tek bir kenar üzerinde olması gerektiğinden, parçalanıştaki kenar sayısını iki değişik şekilde hesaplayarak,

$$\binom{v}{2} = 3\,|B|$$

buluruz. Demek ki $v(v-1)/2$ sayısı, dolayısıyla $v(v-1)$ de 3'ün katı olmalıdır, yani $v \equiv 0$ ya da 1 mod 3 olmalı, yani $v \equiv 0$, 1, 3 ya da 4 mod 6 olmalı.

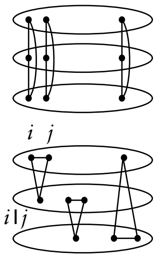
Şimdi 1 noktasından geçen kenarları sayalım. Bunlardan $v - 1$ tane vardır elbet. Bu noktayı içeren her üçgende de bu kenarlardan 2'şer tane olduğundan, $v - 1$ çift bir sayı olmalı. Bu koşuldan dolayı, yukardaki dört seçenekten sadece ikisi kalır: $v \equiv 1$ ya da 4 mod 6. Gerekliliği gösterdik. Bu arada üçlü sayısını veren formülü de göstermiş olduk.

Yeterlilik koşulunu gösteren birçok kanıt olmasına karşın, en yalın ve şık olanı $n \equiv 3$ (mod 6) durumu için Bose, $n \equiv 1$ (mod 6) durumu için Skolem tarafından verilmiştir. Her iki kanıt da latin karelerini içerir.

$v \equiv 3$ (mod 6) Şıkkı. Önce, köşegeni 0, 1, ..., $2n$ olan (bunlara ***tekgüçlü*** (idempotent) ***latin kare*** denir) ve (i, j) hücresindeki sayısı (j, i) hücresindeki sayısına eşit olan (bunlara ***değişmeli latin kare*** denir) bir latin karesi bulalım (bkz. aşağıdaki gri kare). Eğer tekgüçlü ve değişmeli latin karenin (i, j) hücresinde k varsa, bunu $i \mid j = k$ olarak gösterelim. İnşa edeceğimiz SÜS'ün simgeler kümesini,

$$S = \{(i, \varepsilon) : i = 0, 1, ..., 2n, \varepsilon = 1, 2, 3\}$$

olarak tanımlayalım. B'de iki değişik türden üçlü olacak. Bu üçlüleri şöyle tanımlayalım:



1. Her $1 \le i \le 2n + 1$ için,

$\{(i, 1), (i, 2), (i, 3)\} \in B$

olsun.

2. Her $1 \le i < j \le 2n + 1$ için,

$\{(i, 1), (j, 1), (i \mid j, 2)\} \in B$

$\{(i, 2), (j, 2), (i \mid j, 3)\} \in B$

$\{(i, 3), (j, 3), (i \mid j, 1)\} \in B$

olsun.

B, kolayca sınanacağı üzere, $6n + 3$'lük bir SÜS oluşturur.

Tekgüçlü ve Değişmeli Latin Kare İnşası

$\{0, 1, ..., 2n\}$ tabanlı, tekgüçlü ve değişmeli bir latin kare şöyle inşa edilebilir:

- Eğer $i \ne j$, $i \ne 0$ ve $j \ne 0$ ise, (i, j) hanesine, $i + j \equiv k$ (mod $2n$+1) denkliğini ve $0 \le k \le 2n$ eşitsizliğini sağlayan k sayısını yazalım.
- (i, i) hanesine i yazalım.
- $(i, 0)$ ve $(0, i)$ hanelerine, $2i \equiv k$ (mod $2n$+1) denkliğini ve $0 \le k \le 2n$ eşitsizliğini sağlayan k sayısını yazalım.

Bir başka deyişle, Z/($2n$+1)Z'nin toplama cetvelinde $i + i$'yi gösteren (i, i) hanesiyle $i + 0$ ve $0 + i$'yi gösteren $(i, 0)$ ve $(0, i)$ hanelerinin yerlerini değiştirelim. Örneğin, $n = 4$ ise, soldaki toplama cetvelinden sağdaki tekgüçlü ve değişmeli latin kareyi elde ederiz.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	0
2	3	4	5	6	7	8	0	1
3	4	5	6	7	8	0	1	2
4	5	6	7	8	0	1	2	3
5	6	7	8	0	1	2	3	4
6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	8	0	1	2	3	4	5	6
8	0	1	2	3	4	5	6	7

0	2	4	6	8	1	3	5	7
2	1	3	4	5	6	7	8	0
4	3	2	5	6	7	8	0	1
6	4	5	3	7	8	0	1	2
8	5	6	7	4	0	1	2	3
1	6	7	8	0	5	2	3	4
3	7	8	0	1	2	6	4	5
5	8	0	1	2	3	4	7	6
7	0	1	2	3	4	5	6	8

$v \equiv 1$ (mod 6) Şıkkı. Şimdi de Skolem'in bu durum için verdiği kanıtı gösterelim. Bu inşa metodu Bose'un inşa yönteminden birazcık daha karmaşık.

Bu kez $2n$ dereceli "***yarı tekgüçlü***" ve değişmeli latin kareleri kullanacağız. Bunlar,

$$i \mid j = j \mid i$$

ve

$$i \mid i = (n + i) \mid (n + i) = i$$

eşitliklerini sağlayan $2n$'lik latin karelerdir (bkz. aşağıdaki gri kare). Böyle bir latin karenin simgelerinden oluşan kümeye Q diyelim. Ayrıca ∞ gibi yepyeni bir simge alalım. Steiner üçlü sistemin simgeler kümesi,

$$S = \{\infty\} \cup (Q \times \{0, 1, 2\})$$

olarak alalım. B'deki üç tür üçlü olacak:

Yarı Tekgüçlü ve Değişmeli Latin Kare İnşası

n bir tek sayı olsun. A, $\{0, 1, ..., n-1\}$ tabanlı tekgüçlü ve değişmeli bir latin kare olsun. B, $\{n, n+1, ..., 2n-1\}$ tabanlı bir latin kare olsun. B^t, B'nin köşegene göre simetriği olsun. O zaman,

$$\begin{matrix} A & B \\ B^t & A \end{matrix}$$

$2n$ dereceli, yarı tekgüçlü ve değişmeli bir latin karedir. Örneğin,

$$A = \begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{matrix} \quad \text{ise} \quad \begin{matrix} A & B \\ B^t & A \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{matrix} \quad \text{dir.}$$

Şimdi n bir çift sayı olsun. $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$ grubunun toplama cetvelindeki sayıları, her $i < n$ için, $2i$'yi i'ye götüren bir dönüşümle değiştirelim. $2n$ dereceli, yarı tekgüçlü ve değişmeli bir latin kare elde ederiz.

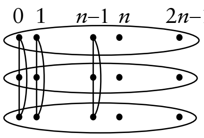
Örneğin $n = 4$ ise, $(1\ 4\ 2)(3\ 6)$ dönüşümü 2'yi 1'e, 4'ü 2'ye, 6'yı 3'e götüren dönüşümlerden biridir. Şimdi aşağıdaki karenin sayılarını bu dönüşüme göre değiştirirsek sağdaki yarı tekgüçlü ve değişmeli kareyi elde ederiz.

$$\begin{matrix} 0&1&2&3&4&5&6&7 \\ 1&2&3&4&5&6&7&0 \\ 2&3&4&5&6&7&0&1 \\ 3&4&5&6&7&0&1&2 \\ 4&5&6&7&0&1&2&3 \\ 5&6&7&0&1&2&3&4 \\ 6&7&0&1&2&3&4&5 \\ 7&0&1&2&3&4&5&6 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0&4&1&6&2&5&3&7 \\ 4&1&6&2&5&3&7&0 \\ 1&6&2&5&3&7&0&4 \\ 6&2&5&3&7&0&4&1 \\ 2&5&3&7&0&4&1&6 \\ 5&3&7&0&4&1&6&2 \\ 3&7&0&4&1&6&2&5 \\ 7&0&4&1&6&2&5&3 \end{matrix}$$

1. Her $0 \le i \le n-1$ için,

$$\{(i, 0), (i, 1), (i, 2)\}$$

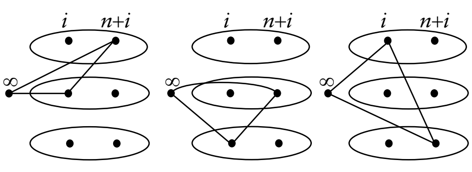
üçlüleri. Bunları aşağıda resmettik.



2. Her $0 \le i \le n-1$ için,

$$\{\infty, (n+i, 0), (i, 1)\},$$
$$\{\infty, (n+i, 1), (i, 2)\},$$
$$\{\infty, (n+i, 2), (i, 0)\}$$

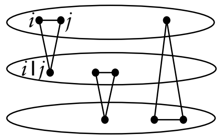
üçlüleri. Bunları da aşağıda resmettik.



3. Her $0 \le i < j \le 2n-1$ için,

$$\{(i, 0), (j, 0), (i \mid j, 1)\},$$
$$\{(i, 1), (j, 1), (i \mid j, 2)\},$$
$$\{(i, 2), (j, 2), (i \mid j, 0)\}$$

üçlüleri. İşte resimleri:



Bu üçlülerin hepsi birden $6n + 1$'lik bir Steiner üçlü sistemi oluşturur. Oldukça kolay olan kanıtı okura bırakıyoruz. □

Devirli SÜS'ler

Yazının başında verdiğimiz üçüncü örnekteki B üçlüler kümesinde 7 yerine 0 yazarsak,

$$B = \{\{1 + i, 2 + i, 4 + i\} : i \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\}$$

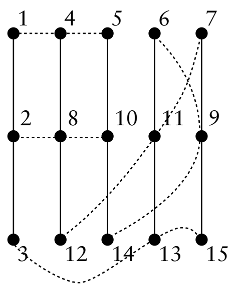
elde ederiz. Buradaki $\{1, 2, 4\}$ üçlüsüne ***temel blok*** denir. Belli bir (a, b, c) için,

$$B = \{\{a + i, b + i, c + i\} : i \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\}$$

biçiminde olan Steiner üçlü sistemlerine ***devirli Steiner üçlü sistemleri*** denir. SÜS'leri, Bose ve Skolem'in inşa yöntemlerinin yanısıra, eğer $n \ne 9$ ise devirli bir şekilde de elde etmek de mümkündür (soru [Hef]'te sorulmuş, [Pel]'de yanıtlanmıştır), ancak inşaat Bose ve Skolem'inkiler kadar sade değildir. Örneğin, eğer $n = 13$ ise, $(0, 1, 4)$ ve $(0, 2, 7)$ üçlülerinin bu özelliği vardır.

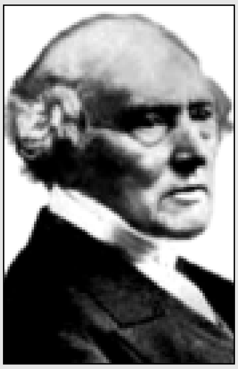
Kirkman Üçlü Sistemleri

Bir (S, B) Steiner üçlü sisteminde B'deki üçlüleri üçer noktalı "doğru"lar olarak yorumlarsak, kesişmeyen üçlüler "paralel doğrular" olarak algılanabilir. (S, B)'nin bir ***paralel sınıfı*** S'nin her elemanının (her noktanın) sadece ve mutlaka bir kez göründüğü ayrık üçlüler (paralel doğrular) kümesidir. Yani bir paralel sınıfı demek, aslında, S kümesinin B'nin üçlüleriyle parçalanışı demektir, ya da, paragrafın başındaki yorumla, S'nin birbirine paralel doğrularla kaplanması demektir. Örneğin Kirkman Öğrenci Problemi'nin çözümünde her gün bir paralel sınıfına tekabül eder. Yanda çözümdeki pazartesi ve salı günlerine tekabül eden iki paralel sınıfı görüyorsunuz.



Thomas Kirkman

Thomas Kirkman (1806-1895) Manchester yakınlarındaki Bolton'da okula gitmiş, Eski Yunanca ve Latince öğrenmiş, ancak matematik görmemiştir. Okul müdürü Kirkman'ın Cambridge'e girebilecek yetenekte olduğuna inansa da, babayı ikna edemediğinden Kirkman 14 yaşında okulu terkedip babasının bürosunda çalışmaya başlar. Büroda boş durmaz, Eski Yunanca ve Latince bilgisini genişlettiği gibi Fransızca ve Almanca da öğrenir. 9 yıl burada çalıştıktan sonra canına tak eder ve babasını dinlemeyerek Dublin'e Trinity College'a matematik, felsefe, klasik eserler ve bilim okumaya gider. 1835'te İngiltere'ye geri döndüğünde İngiltere Klisesi'ne girip papaz olur.



İlk makalesini 40 yaşında yazar ve ölümüne dek matematikten kopmaz, durmadan yazar çizer, sorular sorar. Grup teoriye ve geometriye katkılarıyla bilinir. Steiner'ın SÜS'lerle ilgili problemi sormasından 6 yıl önce problemi Lady's and Gentleman's Diary'de görüp yanıtlamış ve 1846'da Cambridge and Dublin Mathmatical Journal'da yayımlamıştır. 1859'da M. Reiss'in soruyu yanıtlamasından sonra, alaycı bir dille, "Nasıl oluyor da Cambridge and Dublin Mathematical Journal, cilt II, sayfa 191, daha sonra yayımlanan Crelle's Journal cilt LVI, sayfa 326'daki bir kombinatorik makalesinden bu kadar çalabilmiş, anlamış değilim" demesiyle bilinir. Ne var ki üçlü sistemler bugün Kirkman'ın değil Steiner'ın adıyla anılmaktadır. ♣

Sonuç olarak, bir P paralel sınıfı,

1) Her değişik a, $b \in P$ için, $a \cap b = \emptyset$,

2) $\cup_{a \in P}\, a = S$

özelliklerini sağlayan B'nin bir P altkümesidir.

(S, B)'de en az bir paralel sınıfı olması için v'nin 3'e tam bölünmesi gerekir elbette, yoksa paralel sınıf olamaz. Demek ki, biraz önce kanıtladığımız teoreme göre, bir paralel sınıfın olması için $v \equiv 3 \pmod 6$ denkliği gereklidir.

Her üçlüde/doğruda üç nokta olduğundan, bir paralel sınıfında tam $v/3$ tane doğru vardır. Toplam doğru sayısı $v(v-1)/6$ olduğundan, en fazla $(v-1)/2$ tane paralel sınıfı olabilir. Kirkman öğrenci probleminde ($v = 15$) haftanın her gününe tekabül eden 7 ayrık paralel sınıfı bulmuştuk.

Eğer v'lik bir SÜS $(v-1)/2$ tane ayrık paralel sınıfına ayrışıyorsa, o zaman bu SÜS v'lik ***Kirkman Üçlü Sistemi*** (***KÜS***) adını alır.

1971'de Dijen Ray-Chaudhuri'yle Rick Wilson $v \equiv 3 \pmod 6$ denkliğini sağlayan her v için bir KÜS olduğunu kanıtladı.

Ayrık Steiner Üçlü Sistemleri

Kirkman Öğrenci Problemi'ne bir kez daha bakalım. Problemde 15 öğrenci var. Bu 15 öğrenciyi, 15'in 3'lüsü kadar, yani,

$$\binom{15}{3} = \frac{15 \times 14 \times 13}{6} = 455 = 13 \times 35$$

kadar üç kişilik gruplara ayırabiliriz. Her SÜS'te 35 tane üçlü olacağından şu soru akla gelebilir: Bu 455 üçlüyü 13 tane SÜS'e parçalayabilir miyiz? Yani öyle 13 tane (S, B_1), ..., (S, B_{13}) SÜS'ü bulabilir miyiz ki, her $i \neq j$ için, $B_i \cap B_j = \emptyset$ olsun.

Bu problemi ilk kez yeryüzünün gelmiş geçmiş en eksantrik matematikçilerinden biri olan Sylvester sormuştur. Yanıt için 120 yıldan fazla beklemek gerekti. 1971'de R. Denniston yanıtın olumlu olduğunu gösterdi [Den]. Denniston'un yanıtı şöyle: Simgeler 0, 1, 2, ..., 12, a, b olsun. Önce aşağıdaki SÜS'ü kuralım. Bu birinci SÜS'ümüz.

0 1 9	2 4 12	5 10 11	7 8 a	3 6 b
0 2 7	3 4 8	5 6 12	9 11 a	1 10 b
0 3 11	1 7 12	6 8 10	2 5 a	4 9 b
0 4 6	1 8 11	2 9 10	3 12 a	5 7 b
0 5 8	1 2 3	6 7 9	4 10 a	11 12 b
0 10 12	3 5 9	4 7 11	1 6 a	2 8 b
1 4 5	2 6 11	3 7 10	8 9 12	0 a b

Sonra, yukardaki SÜS'ün sayılarına 1'le 12 arasında modülo 13 sayılar ekleyelim. a ve b simgelerine dokunulmayacak. Böylece 12 tane daha SÜS elde edilir. Örneğin yukardaki SÜS'e 1 ekleyerek elde edilen SÜS,

1 2 10	3 5 0	6 11 12	8 9 a	4 7 b
1 3 8	4 5 9	6 7 0	10 12 a	2 11 b
1 4 13	2 8 0	7 9 11	3 6 a	5 10 b
1 5 7	2 9 12	3 10 11	4 0 a	6 8 b
1 6 9	2 3 4	7 8 10	5 11 a	12 0 b
1 11 0	4 6 10	5 8 12	2 7 a	3 9 b
2 5 6	3 7 12	4 8 11	9 10 0	1 a b

dür. Bu sayede elde edilen 13 SÜS'ün hiçbirinin ortak üçlüsü yoktur.

Şimdi 15 yerine v öğrenci alalım. O zaman tüm üç öğrencilik grupların sayısı,

$$\binom{v}{3} = \frac{v(v-1)(v-2)}{6} = (v-2)\times\frac{v(v-1)}{6}$$

dır. Her SÜS'te $v(v-1)/6$ tane üçlü bulunduğundan, birbirinden ayrık $v-2$ tane SÜS'ün olup olmadığını sorabiliriz.

Cayley 1850'de $v = 7$ için 5 tane ayrık SÜS'ün olamayacağını kanıtladı. Ama $v = 7$ için 2 tane ayrık SÜS bulabiliriz. Örneğin,

1230100	3120100
2344521	5241342
4565663	6655463

ayrık iki SÜS'tür. (Her sütun bir üçlüyü gösteriyor.)

Birçok matematikçinin, ama özellikle Denniston, Lu Jiaxi'ın ve Teirlinck'in katkılarıyla 1989'da soru tamamıyla çözüldü: Eğer $v > 7$ ise ve elbette $v \equiv 1, 3 \pmod 6$ ise, $v - 2$ tane ayrık v'lik SÜS vardır.

Dik Steiner Üçlü Sistemleri

Birbirinden ayrık en büyük sayıda SÜS bulunabileceğini yukarda gördük. Ayrıklığa bir koşul daha ekleyelim. (S, A) ve (S, B) iki ayrık SÜS olsunlar, yani $A \cap B = \varnothing$ olsun. Bir de ayrıca, (S, A) ve (S, B)'nin şu özelliği sağladığını varsayalım:

$$x \neq y,\ z \neq t,\ (x, y) \neq (z, t)$$

özelliklerini sağlayan her $x, y, z, t \in S$ için,

$$\{x, y, w\}, \{z, t, w\} \in A$$

özelliğini sağlayan bir $w \in S$ varsa, o zaman,

$$\{x, y, w'\}, \{z, t, w'\} \in B$$

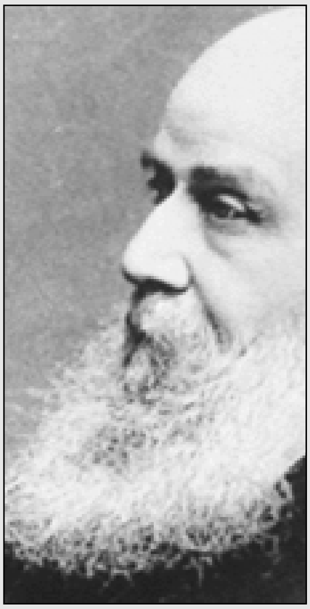
özelliğini sağlayan bir $w' \in S$ yoktur. Yani (S, A)'da (x, y) ve (z, t) nokta çiftlerinden geçen bloklar kesişiyorsa, (S, B)'de (x, y) ve (z, t) nokta çiftlerinden geçen bloklar kesişmez.

Yukardaki koşulu sağlayan SÜS'lere ***dik SÜS***'ler denir.

1994'te her $v \geq 7$, $v \neq 9$ ve $v \equiv 1, 3 \pmod 6$ için birbirine dik iki v'lik SÜS olduğu kanıtlandı [CGMMR]. 2003'te her $v \geq 19$ ve $v \equiv 1 \pmod 6$ için ve belki 24 sayı dışında her $v \geq 27$ ve $v \equiv 3 \pmod 6$ için her biri diğerine dik üç tane v'lik SÜS olduğu kanıtlandı [DDL]. Aynı makalede $v = 3, 7, 9, 13, 15$ için birbirine dik üç tane SÜS olmadığı kanıtlanıyor.

James Joseph Sylvester

James Joseph Sylvester ilkokulu Londra'da, liseyi Liverpool'da okudu. 1833'te Cambridge Üniversitesi'ne girdi. O zamanlar mezun olmadan önce İngiliz Klisesi'nde dini bir yemin gerekiyordu. Ama Sylvester Musevi olduğundan yemin etmedi ve mezun olamadı. Mezun olamadığı gibi birçok ödül ve bursu da kaçırdı. Din ayrımı yapmayan birkaç yerden biri olan Londra Üniversitesi'nde üç yıl fizik okuttu. 27 yaşında Virginia Üniversitesi'nde bir iş bulduysa da birkaç ay sonra dersinde gazete okuyan ve üstüne üstlük diklenen bir öğrencisine bıçak uçlu bastonuyla vurunca öğrencisini öldürdüğünü sanıp ilk vapurla New York'a kaçtı. Daha sonra avukatlık ve muhasebecilik yaptı ve özel matematik dersi verdi. (Öğrencilerinden biri Florence Nightingale'di.) Aynı adliyede avukat olarak çalışan meşhur matematikçi Cayley'le tanıştı ve iki matematikçi hayat boyu dost oldular. Adliye koridorlarında sık sık matematik yapıyorlardı. Bu arada Sylvester akademik bir iş bulmaya çalışıyordu. Birçok başarısızlıktan sonra, kendisi yerine tercih edilen bir aday ölünce, Woolwich Askeri Akademisi'ne profesör olarak atandı. Matrislerde önemli işler yapmasına karşın, burada yazdığı tek kitap şiir üzerineydi: Mısraların Kanunu. ♣



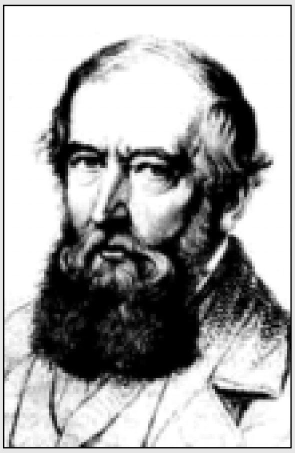
Alıştırmalar

1) 9'luk SÜS'leri bulun. Bu sistemleri devirli elde etmek mümkün müdür?

2) K_n tamçizgesini K_4'lere parçalıyor olsaydık gerek koşul ne olacaktı? (Bu parçalanışın aslında $k = 4$, $\lambda = 1$ olan bir tasarım olduğunu farkettiniz mi? Bkz. sayfa 27.)

3. $v = 7$ için 3 tane ayrık SÜS bulabilir misiniz? $v = 9$ için en fazla kaç tane ayrık SÜS vardır? ♣

Jakob Steiner



Jakob Steiner okumayı 14 yaşında öğrendi. Okula ilk kez 18 yaşında gitti. Daha sonra Heidelberg ve Berlin üniversitelerinde okudu. Özel derslerden kazandığı çok az bir harçlıkla öğrenciliğini sürdürebildi. İzdüşümsel geometriye çok önemli katkıları vardır. Analizi ve cebiri sevmezdi, çünkü hesapların düşünmeyi gereksizleştirdiğini öte yandan geometrinin düşünmeyi tetiklediğini savunurdu. Gerçek payı olan bir düşünce...

Matematikçilerle ilgili tuttuğu günlüğüyle bilinen matematikçi Thomas Hirst, Steiner hakkında şunları yazmıştır: *Ortayaşlı bir adam, iri kıyım, bıyıklı, sakallı, geniş alınlı, uzun bir entellektüel yüz, grileşmeye yüz tutmuş koyu saçlar. Yüzde göze ilk çarpan derin bir endişe ve kaygı, nerdeyse acı. Romatizma... Derslerini önceden hazırlamazdı ve derste sık sık takılır, kanıtlamak istediğini kanıtlayamazdı ve o zaman da dersini hep iğneleyici bir lafla noktalardı.* ♣

SÜS Sayısı

(S, B) bir SÜS olsun. π, S'nin bir eşleşmesi (yani permütasyonu) olsun. O zaman $(S, \pi(B))$ de bir SÜS'tür. Burada,

$$\pi(B) = \{\pi(A) : A \in B\}$$

ve

$$A = \{a, b, c\} \text{ ise } \pi(A) = \{\pi(a), \pi(b), \pi(c)\}$$

dir. (S, B) ve $(S, \pi(B))$ SÜS'lerine ***eşyapısal*** denir. Eşyapısal SÜS'ler arasında dişe dokunur bir fark yoktur ve bu yüzden eşyapısal SÜS'leri tek bir SÜS olarak algılayabiliriz. Bu anlamda, $v = 7$ ve 9 için bir tek SÜS, $v = 13$ için 2 SÜS, $v = 15$ için 80 SÜS vardır. Bu konuda fazla bir şey bilinmiyor.

SÜS'lerin Özyapı Dönüşümleri

(S, B) bir SÜS olsun. $\pi : S \to S$ eşleşmesi B'deki üçlüleri gene B'deki üçlülere gönderiyorsa π'ye (S, B)'nin ***özyapı dönüşümü*** denir. ♣

Steiner Sistemleri

S, v elemanlı bir küme, $t < k$ birer doğal sayı ve B, S'nin k elemanlı altkümelerinden oluşan bir küme olsun. Eğer S'nin t elemanlı herhangi bir altkümesi B'deki kümelerden sadece birinin altkümesiyse, (S, B)'ye t-$(v, k, 1)$ ***tasarımı*** ya da ***Steiner sistemi*** adı verilir. Eğer $t = 2$ ve $k = 3$ ise Steiner üçlü sistemlerini elde ederiz.

(S, B) bir t-$(v, k, 1)$ tasarımı olsun. $P \in S$ sabit bir nokta olsun.

$$S' = S \setminus \{P\} \text{ ve } B' = \{\mathsf{l} \setminus \{P\} : P \in \mathsf{l} \in B\}$$

olsun. O zaman, (S', B') bir $(t-1)$-$(v-1, k-1, 1)$ tasarımıdır.

Açık Soru. 5-(12, 6, 1), 5-(24, 8, 1) gibi t'nin 5 olduğu birçok Steiner sistemleri bilinmektedir [Cuy], ama $t > 5$ için, t-$(k, v, 1)$ parametreli bir Steiner sistemi bilinmemektedir. Ayrıca, $t \geq 4$ için, sadece sonlu tane Steiner sistemi bilinmektedir. ♣

Selda Küçükçifçi

1971 İstanbul doğumluyum. Liseyi Saint Benoit Fransız Lisesi'nde, üniversiteyi Boğaziçi'nde okudum. Matematik ağır basınca, Kimya Mühendisliği'nden Matematik'e geçtim. 1995 mezunuyum. Yine aynı bölümde yüksek lisans yaptıktan sonra ABD'deki kombinatorik diyarı Auburn Üniversitesi'nde doktora yaptım. Doktora sonrası araştırmacı olarak bir yıl Auburn Üniversitesi'nde ve Etna yanardağının eteklerindeki Catania Üniversitesi'nde çalıştım. Eylül 2001'den beri Koç Üniversitesi'ndeyim. Araştırma alanım genelde kombinatorik, özelde tasarım ve çizge kuramlarıdır.

Orta ve lisede halkoyunları, üniversitede seramik, son yıllarda yan flüt ve sürekli olarak sinema, matematiğin yanısıra yaşamımdaki güzel şeyler arasında oldular. ♣