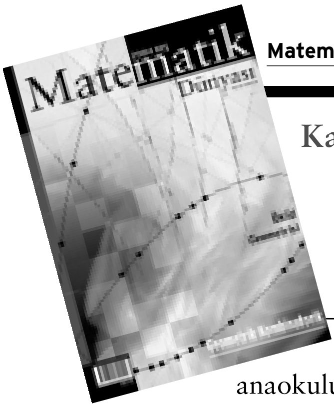


Kapak Konusu: Geometrik Kombinatorik

Tasarımlar

Sibel Özkan* / *ozkansi@auburn.edu*
Selda Küçükçifçi** / *skucukcifci@ku.edu.tr*

v çocuğun bulunduğu bir anaokulunda öğretmen çocuklara aynı anda k çocuğun oynayabileceği bir oyun oynatmak istiyor. Oyunun oynanabilmesi için çocuk sayısının, yani v'nin k'den büyükeşit olması gerekir elbet. Her çocuğu memnun etmek için oyun birkaç kez oynanabilir, ancak iki koşul var:

1) Herhangi iki çocuğun aynı oyunda bulundukları oyun sayısı eşit olmalı, diyelim λ, ve

2) Aynı k çocuk aynı oyunu birlikte iki kez oynamamalı.

Bu mümkün müdür?

$v = k$ ise, tek bir çözüm var: Bütün çocuklar aynı anda oyunu oynarlar. Bu durumda $\lambda = 1$'dir.

Eğer oyun iki kişi arasında oynanıyorsa, yani $k = 2$ ise, gene bir tek çözüm var: Her çocuğu her çocukla oynatmak zorundayız. Böylece her çocuk oyunu $v - 1$ kez oynar ve oyun toplam $v(v-1)/2$ kez oynanır. Herhangi iki çocuk birbiriyle sadece bir kez oynadığından $\lambda = 1$'dir.

Eğer $k = 3$ ise analiz zorlaşıyor. Olası tüm 3 kişilik ekipleri kurarak, oyunu toplam

$$\binom{v}{3} = \frac{v(v-1)(v-2)}{6}$$

kez oynatabiliriz ve böylece probleme bir çözüm elde ederiz. Bu durumda, iki çocuğun yanına oyun arkadaşı olarak geri kalan $v - 2$ çocuğun her biri teker teker geleceğinden, iki çocuk aynı oyunda $v - 2$ kez birlikte olurlar, yani $\lambda = v - 2$'dir. Ayrıca her çocuk oyunu

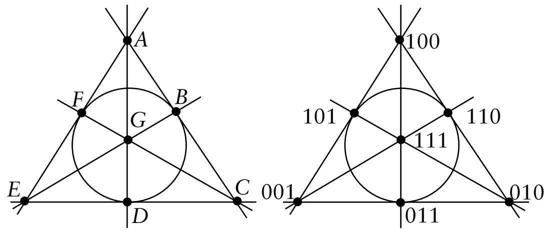
$$\binom{v-1}{2} = \frac{(v-1)(v-2)}{2}$$

kez oynar. Ancak oynanması gereken oyun sayısı çok fazla olduğundan bu çözüm uygulamada işe yaramayabilir. Örneğin çocuk sayısı 7 ise oyunun toplam 35 kez oynanması gerekir, ki her oyun 15 dakika sürse, bu, nerdeyse 9 saat eder. Daha ekonomik başka bir çözüm var mı?

Eğer $v = 7$ ise var! Çocuklara A, B, C, D, E, F, G diye ad verip oyunları şöyle oynatalım:

ABC, CDE, EFA, AGD, CGF, EGB, BDF.

Böylece herhangi iki çocuk oyunu birlikte sadece bir kez oynar, yani $\lambda = 1$ olur. Ayrıca her çocuk oyunu 3 kez oynar ve oynanan toplam oyun sayısı da sadece 7'dir. Aşağıda, solda, bu durumu geometrik olarak gösteren bir çizim görüyorsunuz, bunun sağında da bu geometrik çözüme cebirsel bir tad veren değişik bir adlandırma usulü.



Kuram. Çocukların kümesine S diyelim. S'nin eleman sayısı v olsun. Oyunu oynayacak her k çocuk kümesine ***blok***, blokların kümesine de B diyelim. İlginç olmayan durumu ekarte etmek için $v > k$ varsayımını yapalım. Eğer S'deki her eleman çifti tam tamına λ blokta yer alıyorsa, o zaman (S, B) çiftine 2-(v, k, λ) ***tasarımı*** adı verilir. Daha genel olarak, eğer S'nin her t elemanlı altkümesi tam tamına λ blokta yer alıyorsa, B'ye t-(v, k, λ) ***tasarımı*** adı verilir.

Tarih. Tasarımlar konusu çok eskiye dayanır. Geçmişte, daha çok amatör matematikçi olan asker ve din adamlarının ilgi duyduğu bir dal olmuştur. Örneğin, 1844'te daha çok matematik öğrencilerini eğlendirerek eğitmek için Amerika'da Rhode Island'da yıllık çıkan *Lady's and Gentelman's Diary*'de, derginin editörü ve amatör matematikçi papaz Wesley Woolhouse şu ödüllü soruyu sormuştur: v, k ve t verilmiş olsun. S, v elemanlı bir küme olsun. S'nin öyle k elemanlı altkümeler topluluğu bulabilir miyiz ki S'nin t elemanlı her altkümesi, topluluktaki bu kümelerin sadece birinde yer alsın. $t = 2$ olduğu durumda 2-$(v, k, 1)$ tasarımını elde ederiz.

Tasarımlar bugün ziraatten istatistiğe kadar birçok dala uygulanmaktadır.

* Auburn Üniversitesi Matematik Bölümü doktora öğrencisi.
** Koç Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.
Bu yazı için [And], [CV] ve [AK]'den yararlanılmıştır.

Yukardaki örneği, çocukların adları yerine okul numaralarını kullanarak,

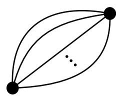
$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

ve

$$B = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{5, 6, 1\}, \{1, 7, 4\}, \{3, 7, 6\}, \{2, 7, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$$

olarak görebiliriz. Bu bir 2-(7, 3, 1) tasarımıdır.

Eğer $t = 2$ ve $\lambda = 1$ ise, blokları bir geometrinin "doğru"ları olarak görmek bize biraz sezgi kazandırabilir. Nitekim S'nin herhangi iki elemanı tek bir blokta bulunur, yani "herhangi iki noktadan tek bir doğru geçer". Bu yorumla, her doğruda k nokta vardır. $\lambda > 1$ (ama $t = 2$) ise bile tasarımları bir tür geometri olarak algılamakta yarar olabilir. Bu yüzden S'nin elemanlarına bazen ***nokta*** diyeceğiz.



İki noktadan geçen "doğru"lar, yani iki elemanı içeren bloklar, toplam λ tane. Her doğruda k tane nokta var.

2-(v, 3, 1) tasarımları aynen Steiner üçlü sistemleridir. 1847'de Rev. T. Kirkman, 2-(v, 3, 1) tasarımının ancak $v \equiv 1$ veya 3 (mod 6) olduğu durumlarda elde edilebildiğini göstermiştir. Bunun kanıtını Steiner Üçlü Sistemleri ve Çizgeler yazısında görmüştük.

Tasarım konusu, bir istatistikçi olan F. Yates'in 1936'da yazdığı bir makaleyle önem kazanmıştır [Yat]. Bu makalede yer alan örneklerden biri de şudur: $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ olsun, ve

$$B = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, f\}, \{a, e, f\}, \{b, c, f\}, \{b, d, e\}, \{b, e, f\}, \{c, d, e\}, \{c, d, f\}\}$$

olsun. İlginç bir örnek. Burada $v = 6$, $k = 3$ ve $\lambda = 2$. Ayrıca her nokta hep aynı sayıda (4) blokta yer alıyor. Birazdan göreceğimiz üzere, bu, 2-(v, k, λ) tasarımlarının ortak özelliğidir.

2-(v, k, λ) tasarımları elde etmek için en kaba çözüm, B'yi S'nin tüm k elemanlı altkümeleri olarak almaktır. O zaman,

$$\lambda = \binom{v-2}{k-2}$$

olur. Ama biz λ'yı çok daha küçük almak istiyoruz. $\lambda = 1$ ya da 2 olsa fena olmaz örneğin.

Şimdi bir noktanın içinde bulunduğu blok sayısının noktadan noktaya değişmediğini kanıtlayacağız ve parametreler arasında ilişkiler bulacağız. Kanıt yöntemimiz, bu tür geometrik ve kombinatoryel problemlerde sık sık kullanılır: Aynı kümenin elemanları iki değişik biçimde sayılır ve bulunan sayılar eşitlenir.

Teorem 1. *b tane bloku olan bir 2-(v, k, λ) tasarımında her eleman, aşağıdaki eşitlikleri sağlayan r tane blokta yer alır.*

(i) $bk = vr$,

(ii) $\lambda(v-1) = r(k-1)$.

Kanıt. Eğer P bir noktaysa, r_P, P'yi içeren blok sayısı olsun. Sabit bir P noktası için,

$$\{(Q, \mathsf{l}) : P \neq Q \in \mathsf{l} \in B \text{ ve } P \in \mathsf{l}\}$$

kümesinin eleman sayısını iki değişik biçimde sayıp bulduğumuz sayıları eşitleyelim.

Birinci sayım. Birinci koordinat P'den değişik herhangi bir nokta olabileceğinden, birinci koordinat için $v - 1$ tane seçeneğimiz var. Birinci koordinat Q seçildikten sonra ikinci koordinat, P ve Q noktalarını içeren bloklardan seçilmelidir; demek ki birinci koordinat seçildiğinde ikinci koordinat için λ seçenek var. Dolayısıyla kümenin eleman sayısı

$$(v - 1)\lambda$$

dır.

İkinci sayım. İkinci koordinat P'yi içeren herhangi bir blok olabileceğinden, ikinci koordinat için r_P seçeneğimiz var. Bu bloklardan biri, diyelim l, ikinci koordinat olarak seçildiğinde, birinci koordinat l'nin P'den değişik herhangi bir noktası olabilir, Dolayısıyla birinci koordinat seçildiğinde ikinci koordinat için $k - 1$ seçeneğimiz var. Demek ki kümenin eleman sayısı,

$$r_P(k - 1)$$

dir.

Yukardaki iki hesaptan, $(v-1)\lambda = r_P(k - 1)$ çıkar. Demek ki P ne olursa olsun r_P değişmez, hep aynı sayıdır. Bundan böyle bu sayıya r diyelim. Böylece (ii) kanıtlanmış oldu.

Birinci eşitliği kanıtlamak için,

$$\{(P, \mathsf{l}) : P \in \mathsf{l} \in B\}$$

kümesini iki değişik biçimde sayacağız.

Birinci sayım. Birinci koordinat için v seçeneğimiz var. Birinci koordinat için v seçenek arasından P seçildiğinde, ikinci koordinat, P'yi içeren herhangi bir blok olabilir ve bunlardan r tane vardır. Demek ki kümenin eleman sayısı vr'dir.

İkinci sayım. İkinci koordinat için b seçeneğimiz var. İkinci koordinat için b seçenek arasından l seçildiğinde, birinci koordinat l'deki herhangi bir nokta olabilir ve bunlardan k tane var. Demek ki kümenin eleman sayısı bk'dir.

Yukardaki iki hesaptan $vr = bk$ çıkar. □

Bir Tasarımın Tümleyeni

(S, B) bir 2-(v, k, λ) tasarımı olsun. Noktalara dokunmadan, sadece blokları değiştirerek yeni bir tasarım elde edebiliriz. Eğer $\mathsf{l} \in B$ eski tasarımda bir bloksa, l'nin S'deki tümleyeni l^c, yani $S \setminus \mathsf{l}$ kümesi yeni tasarımın bir bloku olacak. Böylece bir 2-$(v, v - k, b - 2r + \lambda)$ tasarımı elde ederiz. (Buradaki b ve r sayıları Teorem 1'deki sayılar.) Bunun kolay kanıtını okura bırakıyoruz. Elde edilen bu tasarıma (S, B)'nin ***tümleyeni*** denir.

Bu eşitlikler, (v, k, λ) parametrelerinin b ve r sayılarını belirlediğini gösterir.

Alıştırma. Teoremdeki eşitlikleri kullanarak 2-(11, 6, 2) tasarımının olmadığını kanıtlayın.

Aşağıdaki teorem, tasarımların en az eleman sayısı kadar bloka sahip olmaları gerektiğini söyler. Ancak teoremin kanıtı çok basit de olsa lineer cebir gerektirir. Lineer cebir görmemiş okurlar kanıtı atlamalı. Öte yandan bir dönem lineer cebir görmüş her okur kanıtı anlayabilmeli.

Teorem 2 (Fisher Eşitsizliği, 1940). *Herhangi bir 2-(v, k, λ) tasarımı için, $b \geq v$ ve $k \leq r$ olmalıdır.*

Kanıt: Tasarımın bloklarını $\mathsf{l}_1, \ldots, \mathsf{l}_b$ olarak, noktalarını da $P_1, \ldots, P_v$ olarak sıralayalıp $v \times b$ boyutlu A matrisini (ki bu matrise tasarımın ***oluşum matrisi*** adı verilir) şöyle tanımlayalım: A'nın i-inci sıra, j-inci sütundaki girdisi, eğer P_i noktası l_j blokundaysa 1, değilse 0 olsun.

Şimdi $v \times v$ boyutlu AA^t matrisine bakalım. (Burada A^t matrisi A matrisinin devriğidir, yani köşegene göre simetriğidir.) Az biraz düşününce kolayca görüleceği üzere, AA^t matrisinin i-inci sıra, j-inci sütundaki girdisi P_i ve P_j noktalarını içeren doğru sayısıdır, yani $i \neq j$ ise λ, $i = j$ ise r'dir:

$$AA^t = \begin{pmatrix} r & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & r \end{pmatrix} = (r - \lambda)\mathrm{Id}_v + \lambda J_{v \times v}.$$

Buradaki $J_{v \times v}$ her girdisi 1 olan $v \times v$ boyutlu matristir.

Şimdi bu matrisin determinantını hesaplayalım. Önce bütün sıraları ilk sütunda toplayalım, determinantın değişmeyeceğini biliyoruz:

$$\begin{pmatrix} r + (v-1)\lambda & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda \\ r + (v-1)\lambda & r & \lambda & \cdots & \lambda \\ r + (v-1)\lambda & \lambda & r & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r + (v-1)\lambda & \lambda & \lambda & \ldots & r \end{pmatrix}$$

Sonra birinci sırayı diğer sıralardan çıkaralım, determinant gene değişmez:

$$\begin{pmatrix} r + (v-1)\lambda & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda \\ 0 & r - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & r - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & r - \lambda \end{pmatrix}.$$

Bu son matrisin determinantını hesaplamak kolaydır: $(r + (v - 1)\lambda)(r - \lambda)^{v-1}$.

Eğer $r = \lambda$ ise o zaman Teorem 1 (ii) bize $v = k$ verir. Ama bu eşitlik tasarım tanımına aykırı. Demek ki $r \neq \lambda$. O zaman, yukarda yaptığımız hesaplara göre, $\det(AA^t) \neq 0$. (Bunu Teorem 3'ün kanıtında da kullanacağız.) Demek ki AA^t matrisi birebir bir lineer fonksiyonun matrisidir. Dolayısıyla A^t de birebir bir lineer fonksiyonun matrisidir. Ama A^t, $b \times v$ boyutlu bir matris, yani R^v vektör uzayından R^b vektör uzayına giden bir lineer fonksiyonun matrisi. Böyle bir lineer fonksiyonun birebir olması için $v \leq b$ eşitsizliği sağlanmalıdır. $k \leq r$ eşitsizliği de bundan ve Teorem 1 (i)'den çıkar. □

2-(16, 6, 2) Tasarımı

4×4 boyutlu bir izgara alalım. Noktalarımız bu ızgaranın 16 hücresi olsun. Noktaları soldaki şekildeki gibi, $i = 1, 2, 3, 4$ ve $j = 1, 2, 3, 4$ için, $P_{i,j}$ simgesiyle gösterelim. Bloklarımız bir hücrenin dört yanında olan 6 kareden oluşsun. Böylece 16 blokumuz olur. Aşağıdaki şekilde (2, 3) hücresinin dört bir yanındaki noktalardan oluşan bloku görüyorsunuz. Blokları da $i = 1, 2, 3, 4$ ve $j = 1, 2, 3, 4$ için, $\mathsf{l}_{i,j}$ olarak gösterelim. Örneğin, şekildeki blok $\mathsf{l}_{2,3}$ blokudur.

$P_{1,1}$	$P_{1,2}$	$P_{1,3}$	$P_{1,4}$
$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	$P_{2,3}$	$P_{2,4}$
$P_{3,1}$	$P_{3,2}$	$P_{3,3}$	$P_{3,4}$
$P_{4,1}$	$P_{4,2}$	$P_{4,3}$	$P_{4,4}$

Herhangi iki değişik noktanın ortak iki blokta bulunduğunu görmek zor değil. Bu bir 2-(16, 6, 2) tasarımıdır.

$P_{1,1}$	$P_{1,2}$	$P_{1,3}$	$P_{1,4}$
$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	$P_{2,3}$	$P_{2,4}$
$P_{3,1}$	$P_{3,2}$	$P_{3,3}$	$P_{3,4}$
$P_{4,1}$	$P_{4,2}$	$P_{4,3}$	$P_{4,4}$

Alıştırma. Teorem 1 ve 2'yi kullanarak 2-(16, 6, 1) tasarımının olamayacağını kanıtlayın.

Simetrik Tasarımlar. $b = v$ olduğunda, $bk = vr$ eşitliğinden (Teorem 1) $k = r$'yi elde ederiz. Bu özelliği sağlayan tasarımlara ***simetrik tasarım*** denir. Yani, bir simetrik tasarımda nokta sayısıyla blok sayısı, ayrıca blokların nokta sayısıyla her noktanın ait olduğu blok sayısı birbirine eşittir. Bu tasarıma ***izdüşümsel*** de denir. Teorem 1'den dolayı, bir 2-(v, k, λ) tasarımının simetrik olması için yeter ve gerek koşul, $\lambda(v-1) = k(k-1)$ eşitliğidir.

Tasarıma simetrik denmesinin nedeni bloklar ve noktalar arasındaki ilişkinin simetrik özelikler taşımasındandır. Bloklar ve noktalar arasındaki simetrik ilişki şöyledir:

her blok k noktaya sahiptir,
her nokta k blokta yer alır,
herhangi iki değişik nokta λ bloktadır,
herhangi iki değişik blok λ noktada kesişir.

Her blokun k elemana sahip olması tanımdan, her noktanın k blokta yer alması $k = r$ eşitliğinden, her nokta çiftinin λ blokta birlikte yer alması da gene tanımdan kaynaklanıyor. Herhangi iki değişik blokun λ noktada kesiştiğini birazdan (malesef lineer cebir kullanarak) kanıtlayacağız.

Dolayısıyla, simetrik bir 2-(v, k, λ) tasarımında noktaları blok, blokları nokta yaparsak gene simetrik bir 2-(v, λ, k) tasarımı elde ederiz.

Teorem 3. *Simetrik bir* 2-(v, k, λ) *tasarımında herhangi iki değişik blok* λ *noktada kesişir.*

Kanıt: Kanıtımız Teorem 2'nin kanıtını (dolayısıyla lineer cebir) kullanacak. A, tasarımın oluşum matrisi olsun. Tasarım simetrik olduğundan, A, $v \times v$ boyutlu kare bir matristir. Teorem 2'nin

2-(11, 5, 2) ve 2-(11, 6, 3) Tasarımları

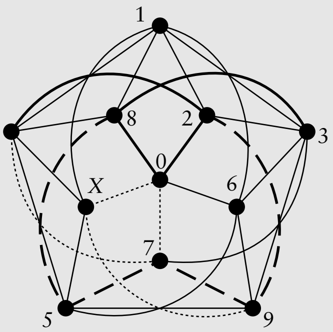
$\lambda(v-1) = k(k-1)$ eşitliği sağlandığından, bir 2-(11, 5, 2) tasarımı simetrik olmalıdır. Noktalarımız Z/11Z'nin 11 elemanı olacak. Blokları inşa edelim.

İlk bakışta hiçbir ilginçliği olmayan şu kümeyi ele alalım: {1, 3, 4, 5, 9}.

Bu kümenin tüm farklı ikililerini birbirinden modülo 11 çıkarıp elde ettiğimiz sonuçlara bakalım:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4-3	3-1	4-1	5-1	9-4	9-3	5-9	9-1	3-5	4-5
5-4	5-3	1-9	9-5	3-9	4-9	1-5	1-4	1-3	3-4

Toplam $5 \times 4 = 20$ farklı (x, y) ikilisi var, ama fark olarak 1'den 10'a kadar sadece on sayı beliriyor ve her sayı tam iki kez beliriyor.



Şimdi {1, 3, 4, 5, 9} kümesinin elemanlarına 1 ekleyelim ve eklemeyi modülo 11 sürdürelim:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \{1, 3, 4, 5, 9\}\\
I_2 &= \{2, 4, 5, 6, X\}\\
I_3 &= \{3, 5, 6, 7, 0\}\\
I_4 &= \{4, 6, 7, 8, 1\}\\
I_5 &= \{5, 7, 8, 9, 2\}\\
I_6 &= \{6, 8, 9, X, 3\}\\
I_7 &= \{7, 9, X, 0, 4\}\\
I_8 &= \{8, X, 0, 1, 5\}\\
I_9 &= \{9, 0, 1, 2, 6\}\\
I_X &= \{X, 1, 2, 3, 7\}\\
I_0 &= \{0, 2, 3, 4, 8\}.
\end{aligned}$$

(10 yerine X yazdık.)

Bunlar da tasarımımızın blokları. Her sayı tam 5 blokta ve her sayı çifti tam 2 ortak blokta belirir. Bu söylediklerimiz, {1, 3, 4, 5, 9} kümesinin yukarda belirttiğimiz özelliklerden çıkar.

Şimdi bu tasarımın oluşum matrisini bulalım:

$$\begin{matrix}
0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1\\
1&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0\\
0&1&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\
1&0&1&0&0&1&0&0&0&1&1\\
1&1&0&1&0&0&1&0&0&0&1\\
1&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0\\
0&1&1&1&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&1&1&1&0&1&0&0&1&0\\
0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&1\\
1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0\\
0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0
\end{matrix}$$

Bulduğumuz bu 2-(11, 5, 2) tasarımının tümleyeni bir 2-(11, 6, 3) tasarımıdır ve oluşum matrisini bir önceki oluşum matrisinin 0'larını 1, 1'lerini 0 yaparak bulabiliriz (Neden?) İşte o matris:

$$\begin{matrix}
1&1&0&1&1&1&0&0&0&1&0\\
0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&1\\
1&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0\\
0&1&0&1&1&0&1&1&1&0&0\\
0&0&1&0&1&1&0&1&1&1&0\\
0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&1\\
1&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1\\
1&1&0&0&0&1&0&1&1&0&1\\
1&1&1&0&0&0&1&0&1&1&0\\
0&1&1&1&0&0&0&1&0&1&1\\
1&0&1&1&1&0&0&0&1&0&1
\end{matrix}$$

Ortada 2-(11, 5, 2) tasarımının çizge biçiminde bir "resmi"ni görüyorsunuz. Üç blok özellikle belirtilmiş. Bu resim üzerine daha fazla bilgiyi internetten de indirilebilen [Bro1]'de bulabilirsiniz. Çizgenin (ya da tasarımın) özyapı dönüşümleri grubunun $PSL_2(11)$ olması ayrıca ilginç.

kanıtında AA^t için bir ifade bulmuştuk: Eğer $J_{v\times v}$ her girdisi 1 olan $v \times v$ boyutlu matrisse,

$$AA^t = (r - \lambda)\mathrm{Id}_v + \lambda J_{v\times v}$$

dir. Bunu $AA^t = A^tA$ eşitliğini kanıtlamakta kullanacağız. Bundan böyle $J_{v\times v}$ yerine J yazalım.

Önce $AJ = JA$ eşitliğini kanıtlayalım. Matris çarpımından ve A ve J'nin tanımından kolayca çıkacağı üzere AJ her girdisi r olan bir matristir, yani rJ'ye eşittir. Gene matris çarpımından ve tanımlardan, JA matrisi her girdisi k olan bir matris olduğu, yani kJ'ye eşit olduğu çıkar. Her ikisi de $v \times v$ boyutlu olduğundan ve Teorem 3'e göre $r = k$ olduğundan, $AJ = JA$ bulunur.

Şimdi, $AA^t = (r - \lambda)\mathrm{Id}_v + \lambda J$ ve $AJ = JA$ eşitliklerinden, $A(AA^t) = (AA^t)A$, yani,

$$AAA^t = AA^tA$$

eşitliğini buluruz. Soldaki A'ları sadeleştirebilirsek, $AA^t = A^tA$ eşitliğini elde ederiz. Bu sadeleştirmeyi yapabilmek için A'nin tersinir olduğunu kanıtlamak yeterlidir.

Şimdi A'nın tersinir olduğunu kanıtlayalım. Teorem 2'nin kanıtında AA^t matrisinin determinantının 0 olmadığını bulmuştuk. Ayrıca A bir kare matris. Demek ki $\det(A)\det(A^t) = \det(AA^t) \neq 0$ ve dolayısıyla $\det(A) \neq 0$, yani A tersinir bir matris. Dolayısıyla $AA^t = A^tA$.

Şimdi A^tA matrisinin ne olduğunu A^t ile A'yi (bu sırayla) çarparak bulalım. Matris çarpımından ve A'nın tanımından, A^tA matrisinin (i, j) girdisinin hem I_i hem de I_j bloklarında bulunan nokta sayısı, yani $|\mathrm{I}_i \cap \mathrm{I}_j|$ olduğu görülür. (Eğer $i = j$ ise bu sayı k'dir, ama bizi $i \neq j$ durumu ilgilendiriyor.) Ama yukarda kanıtladığımız üzere, $AA^t = A^tA$ ve A^tA matrisinin ne olduğu Teorem 2'nin kanıtında yazılı: $i \neq j$ için bu matrisin (i, j) girdisi λ. Demek ki $i \neq j$ için hem I_i hem de I_j bloklarında bulunan nokta sayısı λ'dır. □

Açık Soru: 2-$(v, k, 2)$ simetrik tasarımına ***ikili düzlem*** (İngilizcesi biplane) denir. Çünkü herhangi iki farklı nokta tam iki blokun/doğrunun üstündedir ve herhangi iki farklı blok/doğru tam iki noktada kesişir. Bu durumda $v = k(k - 1)/2 + 1$'dir. Bir önceki sayfada gri alanda bir örnek verdik, bir sonraki sayfada da vereceğiz. Sadece $k = 3, 4, 5, 6, 9, 11$ ve 13 olduğu durumlarda ikili düzlemlerin varlığı biliniyor. Başka k değerleri için de ikili düzlem var mı?

İzdüşümsel Düzlemler

2-$(v, k, 1)$ simetrik tasarımlarının şu özelliği vardır:

a) Herhangi iki farklı nokta tek bir bloktadır.

b) Herhangi iki farklı blok tek bir noktada kesişir.

c) Herhangi üçü aynı blokta olmayan dört nokta vardır.

Bu özellikleri sağlayan nokta ve bloklar kümesine $k - 1$ ***dereceli izdüşümsel*** (ya da ***projektif***) ***düzlem*** denir. İzdüşümsel düzlemler geometrinin en önemli ve en ilginç konularındandır. Sonlu izdüşümsel düzlemler bugüne dek sınıflandırılamadığı gibi, bugün böyle bir sınıflandırma yapacak kadar güçlü yöntemlerin bilinmediği düşünülmektedir. Bugüne dek derecesi bir asal sayının gücü olmayan izdüşümsel düzlem bulunamamıştır.

Teorem [Bruck-Ryser]. *n dereceli bir izdüşümsel düzlem varsa ve $n \equiv 1, 2 \pmod 4$ ise n iki karenin toplamı olarak yazılabilir.*

Bu teoreme göre derecesi 6 olan izdüşümsel bir düzlem yoktur. Derecesi 10 olan için bir izdüşümsel düzlemin olmadığı bilgisayarların yardımıyla ancak 1989'da kanıtlanmıştır [LTS, Lam]. Bugün, izdüşümsel bir düzlemin olup olmadığı bilinmeyen küçük derece 12'dir.

Alıştırmalar

1. V sonlu bir küme ve B, V'nin altkümelerinden oluşan bir küme olsun. B'nin herhangi iki değişik elmanının ortak tam iki elemanının olduğunu varsayalım. Ayrıca V'nin herhangi iki değişik elemanı B'nin tam iki elemanında olsun. B'nin her elemanınında aynı sayıda (diyelim k) eleman olduğunu ve (B, V)'nin bir 2-$(v, k, 2)$ bir ikili düzlem olduğunu kanıtlayın.

2. K_v, v noktalı tamçizge olsun (Yani K_v'de v nokta var ve herhangi iki nokta arasında bir kenar var.) $2 \leq k < v$ bir doğal sayı olsun. K_v'nin K_k'ye eşyapısal v tane $\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_v$, altçizgesi şu iki koşulu sağlasın: a) K_v'nin herhangi bir kenarı bu altçizgelerin tam ikisindedir. b) Herhangi iki farklı I_i ve I_j altçizgesinin kesişimi bir kenardır. Böyle bir $(K_k, \mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_v)$ yapısının bir 2-$(v, k, 2)$ simetrik tasarımını verdiğini ve her 2-$(v, k, 2)$ simetrik tasarımının böyle bir $(K_k, \mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_v)$ yapısını verdiğini kanıtlayın.

Bir 2-Tasarımın Türevi

(S, B) simetrik bir 2-(v, k, λ) tasarım olsun. B'deki bloklara $I_1, \ldots, I_v$ diyelim. (S, B)'den parametreleri 2-$(k, \lambda, \lambda-1)$ olan yeni bir tasarım elde edeceğiz. Yeni tasarımın noktaları I_v'nin noktaları olsun. Bloklar da $I_1 \cap I_v, \ldots, I_{v-1} \cap I_v$ olsun. Bu bir 2-$(k, \lambda, \lambda-1)$ tasarımıdır.

Bir t-Tasarımın Türevi

t-tasarımlar için değişik bir ***türev*** kavramı daha vardır. (S, B) bir t-(v, k, λ) tasarımı ve $p \in S$ olsun. (S, B)'nin p noktasında türevini tanımlayacağız. Noktalar kümesi $S' = S \setminus \{p\}$, bloklar kümesi $B' = \{I \setminus \{p\} : p \in I \in B\}$ olsun. O zaman (S, B) bir $(t-1)$-$(v-1, k-1, \lambda)$ tasarımıdır.

3. Eğer bir t-(v, k, l) tasarımı varsa, her $0 \le i \le t$ için, $\binom{k-i}{t-i}$ sayısının, $\lambda\binom{v-i}{t-i}$ sayısını böldüğünü kanıtlayın.

Fark Kümesi. Sayfa 31'deki 2-(11, 5, 2) tasarımının nasıl elde edildiğine bir defa daha bakalım. {1, 3, 4, 5, 9} kümesinin elemanlarına hep 1 ekledik. (Ama bunu modülo 11 yaptık, yani Z/11Z kümesinde çalıştık.) Bu yöntemi genelleştirebiliriz.

Bir (v, k, λ) ***fark kümesi***, $V = \{0, 1, \ldots, v-1\}$ kümesinin aşağıdaki özelliği sağlayan k elemanlı bir S altkümesidir: 0 dışında V'nin her sayısı S'den tam λ tane çiftin farkı olarak yazılabilir (hesaplar gene modülo v yapılacak elbet.)

Örneğin, $S = \{1, 3, 4, 5, 9\}$ bir (11, 5, 2) fark kümesidir. Bunların 0'a eşit olmayan modülo 11 kareler olduğuna ayrıca dikkatinizi çekeriz.

Bu da genel bir olgudur: $p \equiv 3 \bmod 4$ bir asal olsun. O zaman,

$$Q_p = \{x^2 \in Z/pZ : x \text{ in } \in Z/pZ \setminus \{0\}\}$$

kümesi bir $(p, (p-1)/2, (p-3)/4)$ fark kümesidir. Bunun kanıtı [Bro2]'de bulunabilir.

Örneğin, $p = 23$ alırsak,

$$Q_{23} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18\}$$

bir (23, 11, 5) fark kümesidir.

Teorem 4. *Her (v, k, λ) fark kümesi bir (v, k, λ) simetrik tasarımı verir. Nitekim, eğer*

$$I = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

Bilinen İkili Düzlemler

Aşağıdakiler için referansımız [Roy].

Parametreler	Adı	Derecesi $k-\lambda$	$\lvert$Aut$\rvert$
2-(4, 3, 2)	B3A	1	48
2-(7, 4, 2)	B4A	2	336
2-(11, 5, 2)	B5A	3	1320
2-(16, 6, 2)	B6A	4	23040
	B6B	4	1536
	B6C	4	768
2-(37, 9, 2)	B9A	7	1512
	B9B	7	108
	B9C	7	666
2-(56, 11, 2)	B11A	9	161280
	B11B	9	576
	B11C	9	128
	B11D	9	288
	B11E	9	48
2-(79, 13, 2)	B13A	11	110

$k \le 9$ için yukardaki liste eşyapısalları saymazsak tamdır. Ancak $v = 56$ ve 79 için yukarda verilenlerle eşyapısal olmayan başka ikili düzlemler de olabilir.

Aranıyor! v'lik bir ikili düzlemin olup olmadığı bilinmeyen ilk sayı olan $v = 121$ ve 154 için 2-(121, 6, 2) ve 2-(154, 18, 2) ikili düzlemleri aranmaktadır.

2-(4, 3, 2) tasarımı (bloklar dikey):

0 0 0 1
1 1 2 2
2 3 3 3

2-(7, 4, 2) tasarımı (bloklar dikey):

2 3 4 5 6 0 1
4 5 6 0 1 2 3
5 6 0 1 2 3 4
6 0 1 2 3 4 5

2-(11, 5, 2) tasarımı için bkz. sayfa 31.

2-(16, 6, 2) tasarımları (bloklar yatay):

A	B	C
1 2 3 4 8 12	1 3 5 8 10 13	1 3 4 6 10 15
0 2 3 5 9 13	0 2 4 8 11 13	0 2 3 6 11 12
0 1 3 6 10 14	1 3 4 7 11 14	1 3 7 9 12 14
0 1 2 7 11 15	0 2 5 7 10 14	0 2 4 7 10 14
0 8 12 5 6 7	0 3 4 6 10 15	0 3 5 9 10 13
1 9 13 4 6 7	1 2 5 6 11 15	1 2 4 9 11 13
4 5 7 2 10 14	1 2 4 9 10 12	1 2 5 8 10 12
4 5 6 3 11 15	0 3 5 9 11 12	0 4 8 9 12 15
0 4 12 9 10 11	0 1 6 9 13 14	0 1 6 8 13 14
1 5 13 8 10 11	0 1 7 8 12 15	0 1 5 7 11 15
2 6 14 8 9 11	2 3 6 8 12 14	2 5 6 9 14 15
8 9 10 3 7 15	2 3 7 9 13 15	2 3 7 8 13 15
0 4 8 13 14 15	4 5 8 9 14 15	3 4 5 8 11 14
1 5 9 12 14 15	4 5 6 7 12 13	4 5 6 7 12 13
2 6 10 12 13 15	6 7 8 9 10 11	6 7 8 9 10 11
3 7 11 12 13 14	10 11 12 13 14 15	10 11 12 13 14 15

bir (v, k, λ) *fark kümesiyse*, $i = 0, 1, ..., v - 1$ *için*,

$$\mathsf{I}_i = \{x_1 + i, ..., x_n + i\}$$

olsun (*toplamalar* $\mathbb{Z}/v\mathbb{Z}$*'de yapılacak*.) *O zaman* I_0, ..., I_{v-1} *bir* (v, k, λ) *simetrik tasarımının bloklarıdır*.

Teoremin kolay kanıtını okura bırakıyoruz.

Aşağıdaki sanıyı kanıtlarsanız meşhur olduğunuzun resmidir (demek ki sanı çok zor!)

Sanı. $(v, k, 1)$ *parametreli bir fark kümesi varsa* $k - 1$ *bir asalın gücüdür*.

D.M. Gordon sanının doğruluğunu $k < 2.000.000$ için bilgisayarda kontrol etti [Gor]. ♣

Mathieu Grupları

3-(22, 6, 1), 2-(23, 7, 1) ve 5-(24, 8, 1) tasarımlarından, eşyapısalları saymazsak, birer tane vardır. Ayrıca 5-(12, 6, 1) ve türevi olan 4-(11, 5, 1) tasarımları da vardır. $v = 11, 12, 22, 23, 24$ için, bu tasarımların özyapı dönüşümleri gruplarına M_v diyelim. Her M_v basit bir gruptur. Bunlar, sonsuz sınıflara girmeyen 26 kaza (sporadic) grubundan beşidir. Bu konuda basit düzeyde yazılmış bir makale için bkz. [Cuy]. ♣

Bruck-Ryser-Chowla Teoremi

Teorem. $n \equiv 1, 2 \pmod 4$ *olsun. Eğer* $p \equiv 3 \pmod 4$ *denkliğini sağlayan ve* n*'yi bölen en büyük gücünün tek olduğu bir asal varsa, o zaman*, $k - \lambda = n$ *eşitliğini sağlayan bir fark kümesi yoktur*.

Aynı teorem değişik bir dilde şöyle de ifade edilebilir [DS]:

Teorem. *Eğer* (v, k, λ) *parametreli bir simetrik tasarım varsa, o zaman*,

i. *Eğer* v *çiftse* $k - \lambda$ *bir tamkaredir*.

ii. *Eğer* v *tekse*

$$x^2 = (k - \lambda)y^2 + (-1)^{(v-1)/2}\lambda z^2$$

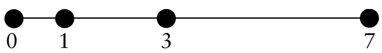
denkleminin tamsayılarda (0, 0, 0)*'dan değişik bir çözümü vardır*.

$k - \lambda$ sayısına tasarımın ***derece***si adı verilir.

Sayfa 32'deki Bruck-Ryser Teoremi bu teoremlerin bir sonucudur. Bu arada, Bruck-Ryser Teoremi'nin izdüşümsel geometrilerin yokluğunu dereceye bağlayan bilinen tek genel teorem olduğunu da belirtelim. ♣

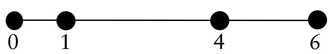
Golomb Cetvelleri

0, 1, 3 ve 7 sayıları arasındaki tüm farklara bakalım: 1, 2, 3, 4, 6 ve 7. Herhangi ikisinin arasındaki fark ayrı bir sayı, yani aşağıdaki noktaların birbirlerine olan mesafeleri hep değişik.

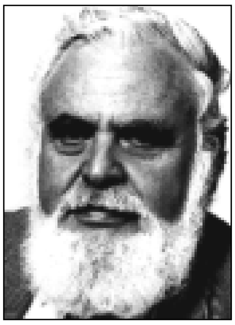


Yukardaki gibi bir doğal sayılar kümesine ***Golomb cetveli*** denir. Yukarda verdiğimiz dört sayılı (çentikli) bir Golomb cetveli.

Bu dört nokta arasındaki en uzun mesafe 7, yani 0-1-3-7 Golomb cetvelinin uzunluğu 7. Dört çentikli ama daha kısa bir Golomb cetveli bulabilir miyiz? Evet! 0, 1, 4, 6 noktaları arasındaki mesafeler de hep değişik ve bu Golomb cetvelinin uzunluğu 6.



Herhangi bir n doğal sayısı için n çentikli bir Golomb cetveli yaratmaktan kolayı yoktur: $a_0 = 0$ olsun ve a_{n+1}'i $2a_n + 1$ olarak tanımlayalım. $(a_n)_n$ dizisi şöyle başlar: 0, 1, 3, 7, 15, 31 63, 127, ... Dizinin ardışık terimleri arasındaki mesafe yeterince arttığından, ilk n sayının n çentikli bir Golomb cetveli oluşturduğunu kanıtlamak kolay. Herhalde $a_n = 2^n - 1$ kuralını tahmin etmişsinizdir. Tümevarımla kolaylıkla kanıtlanır bu eşitlik. Demek ki n çentikli bu Golomb cetvelinin uzunluğu $2^n - 1$, bayağı büyük. Amaç, n çentikli **en kısa** Golomb cetvelini bulmak.



Solomon Golomb

İşte beş çentikli oldukça kısa bir Golomb cetveli: 0, 1, 4, 9, 11. Daha kısası var mı?

Golomb cetvellerinin röntgenden iletişime kadar pek çok uygulaması vardır. Ayrıca sonlu geometriyle yakından ilgilidir.

En kısa Golomb cetveli bulmanın kolay bir algoritması bilinmiyor. Bilgisayarlar 30 civarı çentikle bile başa çıkamıyorlar. ♣