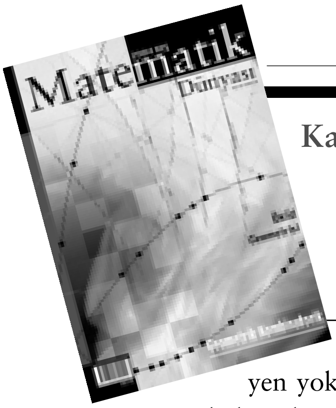
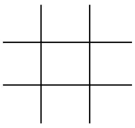


Kapak Konusu: Geometrik Kombinatorik

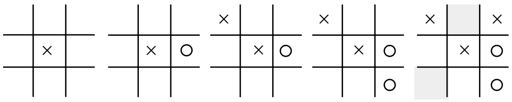
Sonlu Düzlemlerde Üç Taş Oyunu

Oya Farfara

Üç taş oyununu bilmeyen yoktur herhalde. Hani yere, tahtaya ya da kâğıda aşağıdaki şeklin çizildiği, sonra



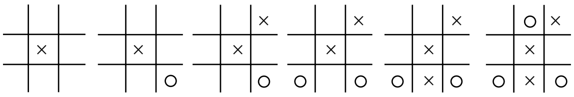
iki oyuncunun sırayla boş hazneleri x ya da o işaretleriyle sahiplendiği, aynı sıraya, sütuna ya da iki köşegenden birine sahiplenenin oyunu kazandığı oyun. Hamlesi x olan oyuncuya İksan (Nam-ı diğer Xan!), diğerine de Oya diyelim. İksan hep birinci oyuncu olsun, adaşım Oya da ikinci oyuncu. İşte bir üç taş oyunu:



İki ayrı yere (gri haznelere) oynayarak kazanacağından, bu oyunu İksan kazanır.

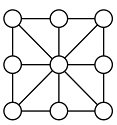
Eğer üç taş oyununu yeterince oynamışsanız, iyi oynandığında bu oyunun berabere bitmesi gerektiğini de biliyorsunuz demektir. Nitekim yukardaki oyunu Oya kötü oynadığından kaybetti, daha iyi oynasaydı kaybetmeyebilirdi. Oya'nın ilk hamlesi kötü, o ilk hamleden sonra kaybetmek zorunda.

Oya'nın İksan'ın yukardaki "orta nokta" hamlesine karşı yapabileceği özünde değişik iki hamle var. Ya yukardaki gibi İksan'ın yanına oynayacak ya da aşağıdaki gibi çaprazına. Eğer Oya ilk hamlesinde İksan'ın çaprazına oynarsa oyunun berabere bitmesini sağlayabilir.



Bu oyun berabere biter

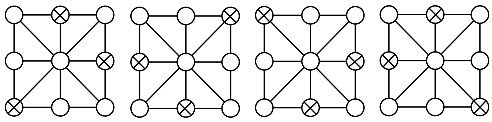
Aynı oyunu aşağıdaki gibi dokuz nokta üzerinde oynayalım. Her oyuncu sırası geldiğinde noktaları siyaha ya da griye boyasın. Gene bir doğruya sahiplenen oyuncu oyunu kazansın.



Bu dokuz noktalı geometride 8 tane doğru var: Üçü yatay, üçü dikey, ikisi de çapraz.

Üç taş oyunuyla hiçbir farkı olmadığından bu oyun berabere biter. Oyuncular iyi oynarlarsa elbet... Biri şaşırırsa diğeri oyunu kazanabilir.

Şimdi doğru sayısını artıralım. Dört yeni doğru daha ekleyelim (doğrunun noktaları çarpı işaretiyle belirlenmiş):



Böylece 8 + 4 = 12 doğrumuz oldu. Yeni oyunumuzu 12 doğrudan birine ilk sahiplenen oyuncu kazansın.

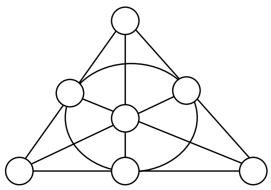
Soru: Bu oyunu iki oyuncudan biri mutlaka kazanır mı? Yoksa oyun (her iki taraf da iyi oynarsa) berabere mi biter?

Klasik üç taş oyununda ortadaki noktanın diğer noktalara göre bir üstünlüğü vardır, çünkü o noktadan en fazla sayıda doğru geçer (tam dört tane), dolayısıyla ilk hamlenin ortadaki nokta olmasında yarar vardır. Oysa 12 doğrulu yeni oyunumuzda tüm noktalar eşdeğerdir, hiçbir noktanın bir başka noktaya göre üstünlüğü yoktur.

Soru: Bunu kanıtlayabilir misiniz? Her noktadan aynı sayıda doğrunun geçmesi yetmez. Noktaları noktalara götüren ama doğrusal noktaları doğrusal noktalara götüren bir eşleşme bulmalısınız.

Yukarıda verilen geometride 9 nokta ve 12 doğru var. Ayrıca her doğrunun üstünde 3 nokta var ve her noktadan 4 doğru geçiyor. Bu, bir önceki yazıda (sayfa 43'te) verilen 3 dereceli afin düzlemdir.

Buna benzer bir oyunu nokta ve doğrulardan oluşan herhangi bir düzlemde oynayabiliriz, örneğin aşağıdaki düzlemde. Bu düzlemde 7 doğru ve 7 nokta var. Doğrulardan altısı açık açık gözüküyor, bunlar bizim bildiğimiz "normal" doğrulara benziyorlar. Bir de ortadaki (söylemesi kulağa hoş gelen) yuvarlak doğru var. Bu düz-

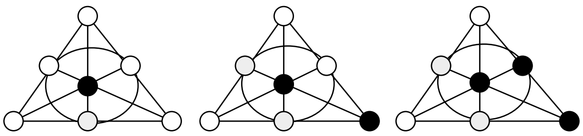


lemde her doğruda 3 nokta var ve her noktadan üç doğru geçiyor. Burada da her nokta her noktaya eşdeğerdir, hiçbir noktanın bir diğer noktaya göre üstünlüğü yoktur.

Bu son oyunu birinci oyuncu kazanır. Birinci oyuncunun ilk hamlesini herhangi bir nokta olabilir, tüm noktalar eşdeğer olduğundan ilk hamlenin ne olduğunun hiçbir önemi yok. İnanması belki biraz daha zor ama ikinci oyuncunun da her hamlesi eşdeğerdir. Nereye oynarsa oynasın oyunun akibeti bir hamleden bir başka hamleye değişmez.

Soru: Okur bunu kanıtlayabilir mi? Herhangi iki noktayı herhangi iki noktaya götüren ve doğruları doğrulara götüren bir dönüşüm bulmak gerekiyor.

Bu oyun aşağıdaki gibi seyretmelidir. Siyahların üçüncü hamlesi iki değişik noktadan kazandırdığından, grilerin bu hamleye karşı savunması yok.

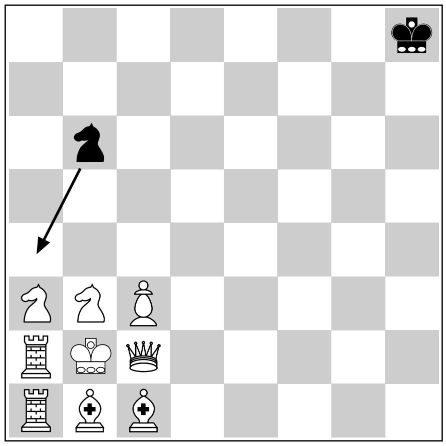


Bu oyunlar ***tüm bilgilerin ortada olduğu oyun***lardır. Çünkü oyunda **tüm** bilgiler **tüm** oyunculara açıktır. Birinin bildiğini diğeri de bilir. Ayrıca zar gibi, yazı-tura gibi, çekilecek kâğıt gibi şansa yer yoktur. Dahası bu oyunlar ***sonlu oyun***lardır. Yani her hamlede her oyuncunun yapabileceği sonlu sayıda hamle vardır ve oyun en fazla belli bir hamle sonra (en fazla geometrinin nokta sayısı kadar hamle sonra) biter.

Yukardaki özellikleri sağlayan oyunlarda ya birinci oyuncunun ***kazanan bir stratejisi*** vardır (yani ikinci oyuncu ne oynarsa oynasın, birinci oyuncu oyunu kazanacağı hamleleri bulabilir) ya da ikinci oyuncunun en azından beraberliği garantileyen, hatta oyununa göre belki de kazandırtan bir stratejisi vardır (yani birinci oyuncu ne oynarsa oynasın, ikinci oyuncu yenilmeyeceği hamleleri bulabilir.) Bu teoremi MD-2003-III, sayfa 71'de kanıtlamıştık.

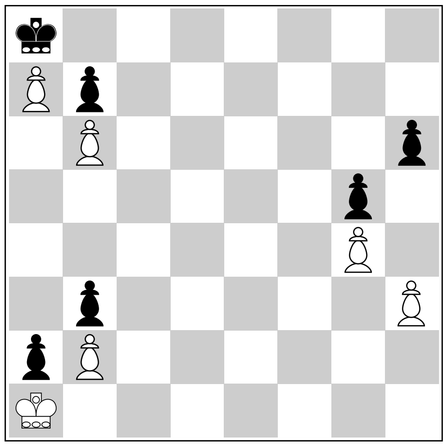
Örneğin satranç yukardaki özellikleri sağlayan bir oyundur. Ama satranç çok uzun ve hamle sayısı çok olan bir oyun olduğundan, beyazları kazandırtan ya da siyahlara en azından beraberliği garantileyen strateji bugüne dek bulunamamıştır ve bu sayede bugün hâlâ satranç turnuvaları düzenlenir.

Yalnız satrançla bu yazının konusu olan oyunlar arasında önemli bir ayrım var. Satrançta bir oyuncunun taşları oyuncuya ayakbağı olabilirler. Örneğin, aşağıdaki pozisyonda siyahlar bir hamlede beyazları mat edebilirler, çünkü beyazların çok taşı var! (Sıra beyazlarda olsa, onların da bir hamlede matı var.)



Siyah at a4 hamlesiyle mat eder.

Ayrıca satrançta hamle yapmak her zaman iyi değildir. Örneğin aşağıdaki pozisyonda hamle sırası beyazlarda olması beyazlar için dezavantaj; beyazlar pas geçebilse oyunu kazanacaklar ama pas geçemiyorlar ve bu yüzden oyunu kaybediyorlar. Aynı şey siyahlar için de geçerli; yani bu pozisyonda oynayan kaybediyor.



Oynayan kaybeder

Bizim oyunumuzdaysa hamle yapmak hiçbir zaman dezavantaj olamaz. Nokta fazlalığı da dezavantaj olamaz. Ne kadar çok nokta bizim olursa olursa o kadar iyi. İşte bu yüzden bu oyunda ancak birinci oyuncunun kazanan bir stratejisi olabilir, ikinci oyuncu olsa olsa berabere kalabilir. Bunu kanıtlayalım.

Ancak Birinci Oyuncunun Kazanan Bir Stratejisi Olabilir. Diyelim ikinci oyuncunun kazanan bir stratejisi var. Birinci oyuncuyu kazandıran bir strateji bularak çelişki elde edeceğiz. Birinci oyuncu ilk hamlesinde herhangi bir noktaya sahiplensin. Sıra ikinci oyuncuda. İkinci oyuncu kazanacağını sandığı stratejisini uygulasın, birazdan avcunu yalayacağını anlayacak. Şimdi sıra gene birinci oyuncuda. Birinci oyuncu, ilk hamlesini yapılmamış varsayarak sanki ikinci oyuncuymuş gibi oyunu oynasın ve ikinci oyuncunun kazanan stratejisini uygulasın. Buna "ilk hamleyi görmemiş olayım" stratejisi diyebiliriz. Birinci oyuncu ikinci oyuncunun stratejisini uygulamada tek bir sorun yaşayabilir: O anda stratejisini uygulayabilmek için yapması gereken hamleyi daha önce yapmıştır... Ama birinci oyuncu o anda yapması gereken o hamleyi daha önce yapmışsa daha iyi, bunun bir mahsuru olamaz ki... Madem ki o hamleyi daha önce yapmış, artık o hamleyi yapmasına gerek yoktur, başka bir noktaya sahiplensin, canı hangi noktayı çekiyorsa o noktayı boyasın, fazla nokta göz çıkarmaz. Böylece birinci oyuncu ikinci oyuncunun stratejisini uygulayabildiği gibi, ikinci oyuncunun aynı stratejiyi uygulayarak sahip olabileceği nokta sayısından bir fazlasına sahip olur. Böylece oyunu birinci oyuncu kazanır. Çelişki... Demek ki ikinci oyuncunun kazanan stratejisi olamaz. En fazla berabere kalabilir.

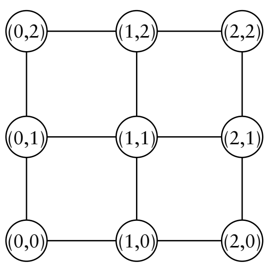
Oyun Sahalarımız. Yazımızda ele alacağımız oyun sahalarını açıklayalım. İki tür oyun sahamız olacak: afin ve izdüşümsel düzlemler.

Afin Düzlemler. p, bir asal sayı ve

$$\mathsf{F}_p = \mathsf{Z}/p\mathsf{Z} = \{0, 1, ..., p - 1\}$$

olsun. Toplama, çarpma, çıkarma gibi bilumum işlemleri modülo p yapalım. Noktalarımız $x, y \in \mathsf{F}_p$ için (x, y) elemanları olsun. Yani noktalar kümesi,

$$\mathsf{F}_p{}^2 = \mathsf{F}_p \times \mathsf{F}_p = \{(x, y) : x, y \in \mathsf{F}_p\}$$



olsun. Örneğin, $p = 3$ ise, noktalarımız yandaki şekildeki gibidir.

Böylece toplam p^2 tane nokta elde ederiz. Şimdi de doğruları betimleyelim. Doğrularımız, hem u'nun hem de v'nin aynı anda 0 olmadığı $u, v, w \in \mathsf{F}_p$ için,

$$ux + vy + w = 0$$

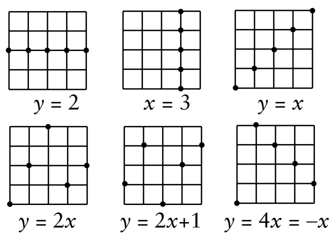
denklemini sağlayan (x, y) noktaları olsun. Denklemi u'ya ya da v'ye bölerek (çünkü p asal olduğunda, F_p halkasında 0 olmayan elemanları tersinirdirler, bkz. MD-2004-I, sayfa 16, Sonuç 5) doğruları iki değişik biçimde gösterebiliriz:

$$y = mx + b$$

ve

$$x = a$$

biçiminde yazılan doğrular. İkinci tip doğrular dikey doğrulardır. Eğer birinci tip doğruda $m = 0$ alırsak, $y = b$ yatay doğrularını buluruz. Aşağıda $p = 5$ için birkaç doğru örneği görüyorsunuz.



Bu düzleme $A(p)$ adını verelim. $A(p)$ bir afin düzlemdir (bkz. sayfa 42.)

Yukarda yapılanlar, F_p halkası yerine sonlu herhangi bir F cismi için yapılsaydı da bir afin düzlem elde edilirdi.

İzdüşümsel Düzlemler. Sayfa 44'te bir afin düzlemden bir izdüşümsel düzlemin nasıl elde edileceğini gördük, her paralel sınıfı için "sonsuza" bir nokta ekledik, bunun dışında bir de "sonsuza" bu "sonsuzdaki" noktaları içeren bir doğru ekledik. Dolayısıyla yukarda tanımlanan her afin düzlem sayfa 44'te açıklanan yöntemle izdüşümsel bir geometri verir. Bu bölümde "aynı" izdüşümsel düzlemleri daha geometrik yöntemle inşa edeceğiz.

p, gene bir asal sayı ve

$$\mathsf{F}_p = \{0, 1, ..., p - 1\}$$

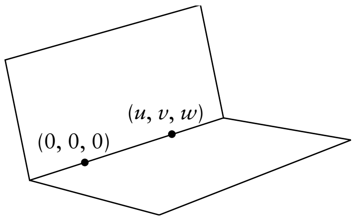
olsun. Üç boyutlu $\mathsf{F}_p{}^3$ uzayını ele alalım. a, b ve c'nin üçünün de 0 olmadığı $a, b, c, d \in \mathsf{F}_p$ için,

$$ax + by + cz + d = 0$$

denklemini sağlayan (x, y, z) noktalar kümesine $\mathsf{F}_p{}^3$ uzayının bir ***düzlem***i denir. Biz $(0, 0, 0)$ noktasını içeren düzlemlerle, yani her üçünün de 0 olmadığı $a, b, c \in \mathsf{F}_p$ için,

$$ax + by + cz = 0$$

denklemini sağlayan düzlemlerle ilgileneceğiz. Bu türden iki farklı düzlem mutlaka tam p noktada kesişir. Bu kesişim kümelerine $\mathsf{F}_p{}^3$ uzayının $(0, 0, 0)$ noktasından geçen ***doğru***ları adı verilir. Doğrular, bir $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$ için,



$\{(tu, tv, tw) : t \in \mathsf{F}_p\}$ biçiminde olan kümelerdir (okura alıştırma).

Şimdi adına $\pi(p)$ diyeceğimiz bir geometri tanımlayacağız:

$\pi(p)$'nin doğruları, $\mathsf{F}_p{}^3$ uzayının (0, 0, 0) noktasından geçen düzlemleri olacak.

$\pi(p)$'nin noktaları, $\mathsf{F}_p{}^3$ uzayının (0, 0, 0) noktasından geçen doğruları olacak.

Yani $\mathsf{F}_p{}^3$ uzayının (0, 0, 0) noktasından geçen bazı düzlem ve doğruları, $\pi(p)$ düzleminin doğru ve noktaları oldu.

$\pi(p)$'nin bir noktasının ne zaman $\pi(p)$'nin bir doğrusu üzerinde olduğunu söylememiz lazım. Söyleyelim: Eğer noktayı temsil eden doğru, doğruyu temsil eden düzlemin içindeyse o zaman o noktanın o doğruda olduğunu söyleyeceğiz. Örneğin,

$$\{(t, 2t, 3t) : t \in \mathsf{F}_p\}$$

doğrusuyla temsil edilen P noktası,

$$x + y - z = 0$$

düzlemiyle temsil edilen doğrudadır. Bu P noktası ayrıca,

$$2x - y = 0$$
$$3x - z = 0$$
$$3y - 2z = 0$$
$$5x - y - z = 0$$

düzlemleriyle temsil edilen doğruların da üstündedir.

$\pi(p)$ izdüşümsel bir düzlemdir ve $A(p)$ ile $\pi(p)$ sayfa 45'teki teoremde ve o teoremin kanıtında açıklanan ilişki içindedirler.

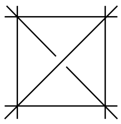
Bu oyunlarla ilgili iki sorumuz var:

1. $A(p)$ ve $\pi(p)$ düzlemleri üzerinde oynanan oyunlarının hangilerinde birinci oyuncunun (İksan'ın yani) kazandığı bir strateji vardır, hangilerinde Oya oyunu beraberliğe zorlayabilir?

2. Bu oyunlarının hangilerinde oyun berabere bitebilir?

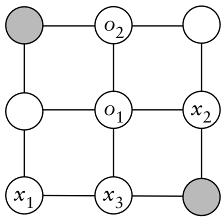
İkinci soruda oyuncuların kazanmak için değil, berabere kalmak için oynadıklarını varsayacağız. Oyuncular berabere kalmayı başarabilirler mi?

$\pi(2)$ düzlemi yukarda verdiğimiz 7 noktalı ve 7 doğrulu düzlem. Bu oyunu birinci oyuncunun (İksan'ın) kazandığını yukarda gördük.



Şimdi $A(2)$ oyununu ele alalım. Bu oyun çok basit. Bu oyunu da İksan kazanır. Hem de nasıl oynarsa oynasın ikinci hamlesinde kazanır, çünkü bu düzlemde herhangi iki nokta bir doğru belirler. Bu, $A(2)$ için hem birinci hem de ikinci soruyu yanıtlıyor. $A(2)$ oyununda istense de berabere kalınamaz.

Ya $A(3)$ oyununu kim kazanır? Bu oyunu da birinci oyuncunun kazanacağını kanıtlamak zor değil. Önce İksan'la Oya'nın ilk hamlelerinin önemsiz olduğunda anlaşalım, çünkü yapılabilecek tüm ilk iki hamleler birbirine eşdeğerdir. Nitekim bu geometride iki değişik noktayı herhangi iki değişik noktaya götüren ve doğruları doğrulara yollayan bir dönüşüm vardır. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz. (Bu dediğimiz tüm $A(p)$ ve $\pi(p)$ düzlemleri için geçerli.) Yandaki şekilde İksan'ın ve Oya'nın hamlelerini $x_1, x_2, \ldots$ ve $o_1, o_2, \ldots$ olarak gösterdik. x_1'le o_1 hamlelerinin nereye yapıldıkları önemli değil. Bu iki hamle yapıldıktan sonra İksan ikinci hamlesinde Oya'yı tehdit ederek, Oya'yı tek bir yere oynamaya mahkûm eder. Ve ardından iki değişik yerden kazanabileceği (gri noktalar) bir hamle yaparak (x_3 hamlesi) Oya'yı çaresiz bırakır.



Alıştırma. $A(3)$ ve $\pi(2)$ oyunları istense de berabere bitemez.

Konuyla ilgili sonuç şunlar:

Teorem [CD]. *Eğer $p \geq 3$ ise $\pi(p)$ oyunlarında Oya'nın berabere kalabileceği bir stratejisi vardır. Eğer $p \geq 5$ ise $A(p)$ oyunlarında Oya'nın berabere kalabileceği bir stratejisi vardır.*

Kanıtı burada veremeyeceğiz. Dileyen [CD] referansına bakabilir. ♣