Fermat-Toricelli'ye Kısa Bir Ziyaret

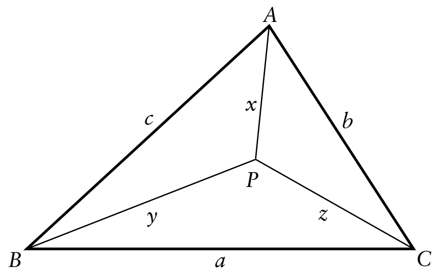
Mustafa Yağcı / *yagcimustafa@yahoo.com*

Bundan üç sayı önce [MD-2004-I, sayfa 58] Fermat-Toricelli Noktası başlıklı bir yazı yazmıştık. O yazıda şu teoremi kanıtlamıştık:

Teorem [Toricelli]. *Kenar uzunlukları a, b, c ve alanı Δ olan bir ABC üçgeninin içinde alınan bir P noktasının üçgenin köşelerine olan uzaklıkları x, y, z ise*

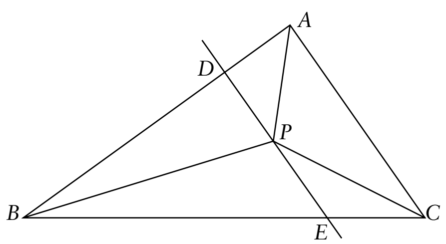
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\Delta}{2}} \le x+y+z < \max\{a+b,\ a+c,\ b+c\}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.



Eşitsizliğin sol yanını kanıtlamış ve sağ yanının aşikâr olduğunu söylemiştik. "Bize hiç de öyle gelmedi!" diye aldığımız onlarca postadan sonra sağ yanının kanıtını verelim dedik ve kanıtın hiç de sandığımız kadar aşikâr olmadığını gördük. Aşağıda bunun iki ayrı kanıtını bulacaksınız. Önce kanıtlamak istediğimizi yazalım:

Teorem. *Bir üçgenin iç bölgesinde rastgele alınan bir noktanın üçgenin köşelerine olan uzaklıklarının toplamı daima üçgenin en uzun iki kenarının toplamından küçüktür.*



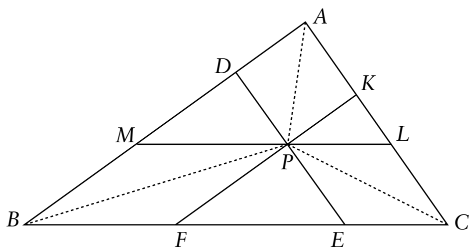
Kanıt: ABC üçgeninde genelliği bozmadan $BC \ge BA \ge AC$ kabul edelim. İç bölgesinde rastgele alınan nokta da P olsun. Kanıtlamamız gereken eşitsizlik $PA + PB + PC < BA + BC$.

Birinci Kanıt. P'den geçen AC doğrusuna koşut bir doğru AB'yi D'de, BC'yi E'de kessin. $BDE \sim BAC$ olduğundan, BDE üçgeninin en uzun kenarı BE'dir, dolayısıyla $BE \ge BD \ge DE$ eşitsizlikleri geçerlidir. Şimdi hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
PA + PB + PC &< (PD + DA) + PB + (PE + EC)\\
&= DE + DA + PB + EC\\
&\le DB + DA + PB + EC\\
&= BA + PB + EC\\
&\le BA + BE + EC = BA + BC.
\end{aligned}$$

(Beşinci satırda kullandığımız $PB \le BE$ eşitsizliğini okura alıştırma olarak bırakıyoruz.) Böylece teorem kanıtlanmıştır.

İkinci Kanıt. P'den geçen AC, BA ve BC doğrularına koşut doğrular bu doğruları şekildeki gibi kessin.



$MAL \sim BAC$ olduğundan,

$$PA \le \max(MA, AL) = MA;$$

$KFC \sim ABC$ olduğundan,

$$PC \le \max(KC, FC) = FC;$$

BMP'de üçgen eşitsizliğinden,

$$PB < BM + MP = BM + BF.$$

Bu üç eşitsizliği toplarsak sonuç çıkar:

$$\begin{aligned}
PA + PB + PC &< (BM + MA) + (BF + FC)\\
&= BA + BC.
\end{aligned}$$

Böylece teorem ikinci kez kanıtlanmıştır. □

Bu, aklımıza şu soruyu getirdi:

Problem. *Uzunlukları bilinen ortak P uçlu* $|PA|$, $|PB|$, $|PC|$ *için ABC üçgeninin çevresi en çok ve en az kaç olabilir?* ♣