Problemler ve Çözümleri

Refail Alizade*
rafailalizade@iyte.edu.tr

Bu, bir yıl sürecek bir yarışmadır. Grup halinde, okul olarak ya da bireysel olarak katılabilirsiniz.

Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Ayrıca lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

Her sorunun çözümünü ayrı bir kâğıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

Kâğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenciyseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

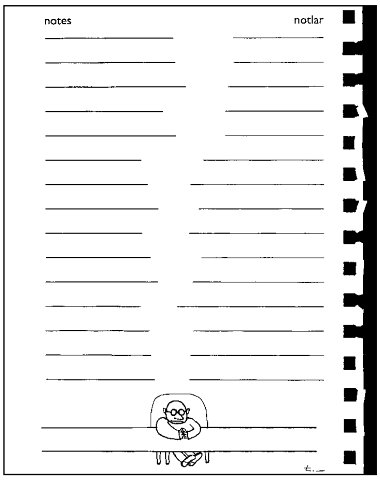
Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla İzmir adresine 30.06.2005 tarihine kadar adıma gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A311. $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$ denkleminin tüm tamsayı köklerini bulunuz.

A312. $ABCD$ karesinin içinde, $m(MBC) = m(MDB) = 23°$ olacak şekilde bir M noktası alınmıştır. $m(MAD)$ kaç derecedir?

A313. Birbirinden farklı a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 pozitif tamsayılarının tüm mümkün ikililerinin pozitif $a_i - a_j$ farkları alınmıştır. Bu on farkın birbirinden değişik olduğu biliniyorsa, a_i sayılarının en büyüğü en az kaç olabilir?



A314. $\mathbb{R}^{>0}$, pozitif gerçel sayılar kümesi olsun. Her $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$ için $y^2 f(x) = f(x/y)$ eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}^{>0}$ fonksiyonlarını bulunuz.

A315. 100×100 boyutlu bir tablonun her hücresine sıfırdan farklı bir rakam yazılmıştır. Satırlarda oluşan 100 basamaklı 100 sayının her biri ve herhangi 99 sütunda oluşan 100 basamaklı sayının her biri 11'e bölünürse, yüzüncü sütunda oluşan sayının da 11'e bölündüğünü kanıtlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y311. Soldan sağa ve sağdan sola okunduğunda aynı olan pozitif tam sayıya ***palindrom*** denir. Karesi de palindrom olan en büyük dört basamaklı palindrom sayıyı bulunuz.

Y312. ABC eşkenar üçgeninin içinde, $|AO|:|BO|:|CO| = 3:4:5$ olmak üzere bir O noktası alınmıştır. AOB açısı kaç derecedir?

Y313. Yüz demir paradan en az biri sahtedir. Tüm gerçek paralar aynı ağırlıkta, tüm sahte paralar da aynı ağırlıkta ama sahte paralar gerçek paralardan daha hafiftirler. Çift kefeli terazi kullanarak en fazla 51 tartıda sahte paraların sayısı nasıl bulunur?

Y314. $a, b, c > 0$ gerçel sayıları

$$a + b + c \geq 1/a + 1/b + 1/c$$

eşitsizliğini sağlar. $a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c$ eşitsizliğini kanıtlayınız.

Y315. Bir ülkenin milli kaynana, milli damat ve milli gelininin seçilmesi için düzenlenen bir televizyon programına n kaynana adayı (oğlanların anaları), n damat adayı, n de gelin adayı katıldı. Bir süre sonra her kaynana adayı beğenmedikleri a gelin adayından oluşan, her gelin adayı da beğendikleri b damat adayından oluşan birer liste açıklarlar. Bir damat adayı ancak annesinin listesinde bulunmayan bir gelin adayının listesinde bulunuyorsa bu gelin adayıyla evlenebilir. $b–a$ sayısının en az hangi değerinde gelin adaylarının tercihleri ve kaynanaların yasakları ne olursa olsun, en az bir damat adayı evlenebilir?

* İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü öğretim üyesi.

2004-II SORULARINA ÇÖZÜMLER

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A301. $p_1 < p_2 < \ldots < p_{50}$ *ilk 50 asal sayıyı göstermek üzere*

$$p_1^{p_1!} + p_2^{p_2!} + p_3^{p_3!} + \ldots + p_{50}^{p_{50}!}$$

sayısının 35'e bölümünden elde edilen kalan nedir?

Çözüm: Kolayca hesaplanacağı üzere,

$$2^{2!} \equiv 4 \pmod{35}$$
$$3^{3!} \equiv 27^2 \equiv 29 \pmod{35}$$
$$5^{5!} \equiv 15 \pmod{35}$$
$$7^{7!} \equiv 21 \pmod{35}.$$

Öte yandan, $n \geq 5$ için, $4|p_n!$ ve $6|p_n!$ olduğundan Fermat'nın Küçük Teoremi'nden dolayı,

$$p_n^{p_n!} \equiv 1 \pmod 5 \text{ ve } p_n^{p_n!} \equiv 1 \pmod 7.$$

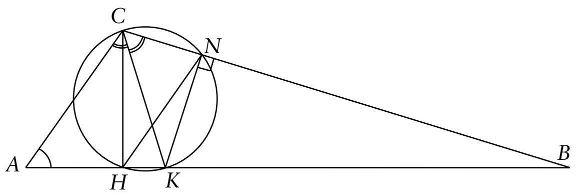
ve

$$p_n^{p_n!} \equiv 1 \pmod{35}.$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$p_1^{p_1!} + \ldots + p_{50}^{p_{50}!} \equiv 4 + 29 + 15 + 21 + 46 \cdot 1$$
$$\equiv 10 (\mathrm{mod} 35).$$

A302. *ABC üçgeninde CH yüksekliği ve CK açıortayı çizilmiştir; K noktasının BC üzerindeki izdüşümü N'dir ve NH ile AC birbirine paraleldir. m(ACB)/m(BAC) kaçtır?*



Çözüm: $m(CHK) = m(KNC) = 90°$ olduğundan $CHKN$ kirişler dörtgenidir. $AC \parallel HN$ olduğunu da kullanırsak $m(BAC) = m(KHN) = m(KCN) = m(ACB)/2$ elde ederiz. Sonuç: $m(ACB)/m(BAC) = 2$.

A303. *Düzgün n-genin her köşesinde birer dama bulunur. Her adımda herhangi iki dama alınıp ters yönlerde komşu köşelere kaydırılıyor. Hangi n'ler için bu işlemlerle tüm damalar aynı köşeye getirilebilir?*

Çözüm: İşlemlerle tüm damaların aynı köşeye getirelebileceğini varsayalım. Bu köşeden başlayarak köşelere sırayla $0, 1, 2, \ldots, n-1$ numaralarını verelim. i-inci köşedeki ($i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) dama sayısını a_i ile, $\sum_{i=0}^{n-1} i a_i$ toplamını da S ile gösterelim. Her adımda S toplamının modülo n değişmediği kolayca görülür. Başlangıçta $S = \sum_{i=0}^{n-1} i = n(n-1)/2$, en sonda $S = 0$'dır. Bunların modülo n denk olması için $n-1$ çift, yani n tek olmalıdır. Öte yandan n tek sayı, yani $n = 2k + 1$ şeklinde ise köşelere sırayala $-k, -k + 1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k$ numaraları vererek her adımda m ve $-m$ numaralı köşelerdeki ($m = 1, 2, \ldots, k$) damaları 0 numaralı köşeye doğru kaydırarak sonunda hepsini 0 numaralı köşeye toplayabiliriz.

A304. $x, y, z, u, v > 0$ *olmak üzere* $x - xy$, $y - yz$, $z - zu$, $u - uv$, $v - vx$ *sayılarının hepsinin aynı zamanda* 1/4*'ten büyük olamayacağını gösteriniz.*

Çözüm: $x(1-y) > 1/4$, $y(1-z) > 1/4$, $z(1-u) > 1/4$, $u(1-v) > 1/4$, $v(1-x) > 1/4$ eşitsizliklerini varsayalım. O halde $1 - y > 0$'dır. İki pozitif sayının geometrik ortalaması bu sayıların aritmetik ortalamasından küçükeşit olduğundan

$$\sqrt{y(1-y)} \leq (y + 1 - y)/2 = 1/2,$$

buradan da $y(1-y) \leq 1/4$ eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde $x(1-x) \leq 1/4$, $z(1-z) \leq 1/4$, $u(1-u) \leq 1/4$, $v(1-v) \leq 1/4$ eşitsizlikleri kanıtlanır. Buradan

$$(1/4)^5 < x(1-y)y(1-z)z(1-u)u(1-v)v(1-x)$$
$$= y(1-y)x(1-x)z(1-z)u(1-u)v(1-v)$$
$$\leq (1/4)^5$$

çelişkisi elde edilir.

A305. $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *olmak üzere her* $n \geq 1$ *için* $f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$ *toplamı, n'den büyük olmayan bir pozitif tamsayının karesine eşittir.* $f(2004)$ *kaçtır?*

Çözüm: $f(1) = 1^2 = 1$ olduğu açıktır.

$$1^2 < f(1) + f(2) \leq 2^2$$

olduğundan $f(1) + f(2) = 2^2$ olmak zorunda. Benzer şekilde

$$2^2 = f(1) + f(2) < f(1) + f(2) + f(3) \leq 3^2$$

olduğundan $f(1) + f(2) + f(3) = 3^2$ olmak zorunda. Bu şekilde devam ederek her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^2$$

eşitliğini elde ederiz (n üzerine tümevarımla kolayca kanıtlanabilir.) Bu eşitlikten

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) = (n-1)^2$$

çıkararak f fonksiyonu için,

$$f(n) = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$$

formülü bulunur. O halde

$$f(2004) = 2 \cdot 2004 - 1 = 4007$$

dir.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y301. *İlk 99 basamağı 9 olan kaç tane 200 basamaklı tamkare bulunur?*

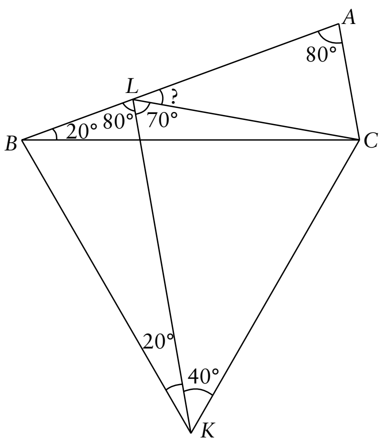
Çözüm: İlk 99 basamağı 9 olan 200 basamaklı m sayısı $10^{200} - 10^{101} \le m < 10^{200}$ eşitsizliklerini sağlar, dolayısıyla $m = n^2$ ise, $n < 10^{100}$ olacak ve

$$\begin{aligned} n^2 &\ge 10^{200} - 10^{101} \\ &= 10^{200} - 2{\cdot}5{\cdot}10^{100} + 25 - 25 \\ &= (10^{100}-5)^2 - 25 \end{aligned}$$

eşitsizliğinden m'nin alabileceği tüm değerlerin $(100^{100}-1)^2$, $(100^{100}-2)^2$, $(100^{100}-3)^2$, $(100^{100}-4)^2$ ve $(100^{100}-5)^2$ olacağı açıktır.

Çözenler: Ünsal Atasoy (Dokuz Eylül Üniv, Fen-Ed. Fak., Matem Böl.), Bilgin Canpolat (H.F.Z. Anadolu Lisesi, Çerkezköy, Tekirdağ), Ahmet Ceyhan (İstanbul Atatürk Fen Lisesi), Alper Çay (Kayseri Uzman Dersanesi), Engin Yardımcı (ODTÜ, Matematik Bölümü), Hasan Zerve (ODTÜ, Kimya Mühendisliği Böl.), Cengiz Zopluoğlu (Abant İzzet Baysal Üniv., İlköğretim Mat. Öğr.)

Y302. *$|AB| = |BC|$ eşitliğini sağlayan ABC ikizkenar üçgeninde $m(B) = 20°$'dir. AB kenarı üzerinde, $|BL| = |AC|$ olacak şekilde bir L noktası alınmıştır. ALC açısı kaç derecedir?*



Çözüm: Bir kenarı BC olan ve ABC üçgeninin dışında kalan BKC eşkenar üçgenini çizelim (şekle bkz.) $m(KBL) = 80° = m(BAC)$, $|KB| = |BC| = |BA|$ ve $|BL| = |AC|$ olduğundan, KBL ve BAC üçgenleri birbirine eştir. Dolayısıyla $|KL| = |BC| = |KB| = |KC|$'dir. $m(CKL) = 60° - 20° = 40°$ olduğundan $m(CLK) = 70°$, buradan da $m(ALC) = 180° - (m(KLB) + m(CLK)) = 180° - (80° + 70°) = 30°$ elde edilir.

Bu, en popüler sorumuzdu, okurlardan ona yakın değişik çözüm geldi.

Çözenler: Emre Albayrak (Hacettepe Üniv. İstatistik Böl.), Osman Arşın Gazi Üniversitesi, Türkçe Öğr. Bölümü), Ünsal Atasoy (Dokuz Eylül Üniv, Matem Böl.), Oktay Balkış (Aksaray Anadolu Öğretmen Lisesi), Bilgin Canpolat (H.F.Z. Anadolu Lisesi, Çerkezköy, Tekirdağ), Ahmet Ceyhan (İstanbul Atatürk Fen Lisesi), Alper Çay (Kayseri Uzman Dersanesi), Mustafa Çıray (Aksaray Anadolu Öğretmen Lisesi), Mustafa Dönmez (Turgutlu Halil Kale Fen Lisesi) ve Yaşar Dönmez (Turgutlu Lisesi), Levent Koçoğlu (Süleyman Demirel Fen Lisesi, Kahraman Maraş), Aytaç Kurultay (Turgutlu Halil Kale Fen Lisesi), Yavuz Marancı (Balikesir Üniv., Orta Öğr. Mat. Öğretmenliği Böl.), Diler Oltulu (Süleyman Demirel Fen Lisesi, Kahraman Maraş), Mustafa Özdemir (Ankara), Engin Yardımcı (ODTÜ, Matematik Bölümü), Sabri Yolal (İstanbul), Hasan Zerve (ODTÜ, Kimya Mühendisliği Böl.), Cengiz Zopluoğlu (Abant İzzet Baysal Üniv., İlköğretim Mat. Öğr.)

Y303. *Her n kişi arasında ya en az 6 kişiyle tanışan ya da en az 6 kişiyle tanışmayan bir kişi bulunur. Bu özelliğe sahip olan en küçük n nedir?*

Çözüm. Eğer $n = 11$ ise ve ne en az 6 kişiyle tanışan ne de en az 6 kişiyle tanışmayan kişi yoksa, her kişi tam 5 kişiyle tanışıyordur. O halde tüm tanışmaların sayısı $11{\cdot}5/2$ olmalıdır. Tanışmaların sayısı tamsayı olması gerektiğinden çelişki elde edilir. Dolayısıyla ya en az 6 kişiyle tanışan ya da en az 6 kişiyle tanışmayan biri bulunur.

Öte yandan $n < 11$ ise, kişileri her biri en fazla 5 kişi içeren iki kümeye ayıralım. Her kümedeki kişilerin birbiriyle tanıştıklarını, farklı kümelerde bulunan kişilerin birbiriyle tanışmadıklarını varsayalım. Bu durumda ne en az 6 kişiyle tanışan, ne de en az 6 kişiyle tanışmayan bir kişinin bulunamayacağı açıktır.

Bu soruya doğru yanıt gelmedi.

Y304. *$a < b$ olmak üzere a, b pozitif tamsayıları şu koşulu sağlar: Eğer $x, y \in [a, b]$ ise, o zaman $1/x + 1/y \in [a, b]$. Buna göre a ve b sayılarını bulunuz.*

Çözüm. $x = y = a$ alındığında $1/a + 1/a \le b$ eşitsizliğinden $ab \ge 2$; $x = y = b$ alındığında $1/b + 1/b \ge a$ eşitsizliğinden $ab \le 2$ elde edilir. Dolayısıyla $ab = 2$'dir. a ve b tamsayı olduklarından $a = 1$ ve $b = 2$ olmak zorunda. Öte yandan $x, y \in [1, 2]$ alındığında

$$1/x + 1/y \ge 1/2 + 1/2 = 1$$

ve

$$1/x + 1/y \le 1 + 1 = 2$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Okurlardan gelen çözümlerin çoğunda $a = 1$, $b = 2$ yanıtı bulunmuş fakat bunun gerçekten koşulları sağladığı açık şekilde gösterilmemiş.

Çözenler: Ünsal Atasoy (Dokuz Eylül Üniv, Matem Böl.), Bilgin Canpolat (H.F.Z. Anadolu Lisesi, Çerkezköy, Tekirdağ), Alper Çay (Kayseri Uzman Dersanesi), Nurdan Aksu Güner (İstanbul Ferit İnal Lisesi, Beykoz), Ahmet Ceyhan (İstanbul Atatürk Fen Lisesi), Mustafa Dönmez (Turgutlu Halil Kale Fen Lisesi) ve Yaşar Dönmez (Turgutlu Lisesi), Aytaç Kurultay (Turgutlu Halil Kale Fen Lisesi), Engin Yardımcı (ODTÜ, Matematik Bölümü), Hasan Zerve (ODTÜ, Kimya Mühendisliği Böl.), Cengiz Zopluoğlu (Abant İzzet Baysal Üniv., İlköğretim Mat. Öğr.)

Y305. *Her hamlede* (a, b, c) *üçlüsünün yerine*

$$(c + 5b,\ 3c - 5a,\ 2b - 3a)$$

veya

$$(2a + 3b,\ b + 3c,\ 4c + 2a)$$

üçlüsü alınabilir. Başlangıçta $(a, b, c) = (1, 2, 4)$ *ise, böyle hamleler sonucu* $(2003, 2004, 2005)$ *üçlüsü elde edilebilir mi?*

Çözüm: Modülo 3 hesaplayalım:

$$\begin{aligned}(c + 5b) + (3c - 5a) + (2b - 3a) &= (a + b + c) + 3(c + 2b - 3a)\\ &\equiv a + b + c \pmod 3\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(2a + 3b) + (b + 3c) + (4c + 2a) &\equiv (a + b + c) + 3(a + b + 2c) \equiv a + b + c \pmod 3\end{aligned}$$

olduğundan her hamle sonucu elimizdeki üç sayının modülo 3 toplamı değişmiyor. Başlangıçta $1 + 2 + 4 \equiv 1 \pmod 3$'tür.

$$2003 + 2004 + 2005 \equiv 0 \pmod 3$$

olduğundan (1, 2, 4) üçlüsünden (2003, 2004, 2005) üçlüsü elde edilemez.

Çözüm yollayan okurlarımızın hemen hemen hepsi üçlüyü modülo 2 (yani teklik çiftlik açısından) incelemiş ve başarılı olmuşlardır.

Çözenler: Ünsal Atasoy (Dokuz Eylül Üniv, Matem Böl.), Ahmet Ceyhan (İstanbul Atatürk Fen Lisesi), Alper Çay (Kayseri Uzman Dersanesi), Engin Yardımcı (ODTÜ, Matematik Bölümü), Hasan Zerve (ODTÜ, Kimya Mühendisliği Böl.) ♣