# Doğuş Üniversitesi Matematik Kulübü Matematik Bireysel Yarışması 2004

## Soru ve Yanıtlar

**Soru 1.** *Sıfırdan farklı bir a sayısı için sonsuz ondalıklarla oluşan*

$$\frac{aa,\bar{a}+a,\bar{a}}{0,\bar{a}}$$

*ifadesinin değeri nedir?*

**Yanıt:** $\dfrac{aa,\bar{a}+a,\bar{a}}{0,\bar{a}}=\dfrac{100a/9+10a/9}{a/9}=110.$

**Soru 2.** $-10 < x < 10$ *olmak üzere*

$$5x + 3 \equiv 4 \pmod 6$$

*denkliğinin çözüm kümesi nedir?*

**Yanıt:** $5x \equiv 5x + 3 + 3 \equiv 4 + 3 \equiv 1 \pmod 6$ olduğundan, $x \equiv 5 \pmod 6$ ve $x = -7, -1, 5$.

**Soru 3.** $\dfrac{\sqrt[5]{32^{2x+1}}}{\sqrt{2^{x-3}}}=8^{2x-1}$ *denklemini çözünüz.*

**Yanıt:** $2^{3(2x-1)}=8^{2x-1}=\dfrac{\sqrt[5]{32^{2x+1}}}{\sqrt{2^{x-3}}}$

$$=\frac{\left(2^{5(2x+1)}\right)^{1/5}}{2^{(x-3)/2}}=\frac{2^{2x+1}}{2^{(x-3)/2}}=2^{2x+1-(x-3)/2}.$$

Buradan da $2x + 1 - (x - 3)/2 = 3(2x - 1)$ ve $x = 11/9$ bulunur.

**Soru 4.** *Beş basamaklı abc19 sayısı üç basamaklı abc'ye bölündüğünde bölüm ve kalanın toplamı kaçtır?*

**Yanıt:** $abc19 = 100(abc) + 19$ şeklinde yazılabilir. Böylece bölüm 100 ve kalan 19 olur. Toplam $100 + 19 = 119$ bulunur.

**Soru 5.** $x$, $y = x^x$, $z = x^{(x^x)}$, $t = (x^x)^x$ *sayıları veriliyor.* $1/2 < x < 1$ *iken x, y, z ve t'nin büyüklük sıralanışı nedir?*

**Yanıt:** $x < z = x^{(x^x)} < y = x^x < t = (x^x)^x$ olmalıdır.

**Soru 6.** *A, B, C, D pozitif tamsayıları için* $A^5 = B^4$, $C^3 = D^2$ *ve* $C = A + 19$ *ise* $D - B$ *kaçtır?*

**Yanıt:** $n$ ve $m$ pozitif tamsayıları için, $A = m^4$, $B = m^5$ ve $C = n^2$, $D = n^3$ olmalı. Böylece $19 = C - A = n^2 - m^4 = (n - m^2)(n + m^2)$; buradan da $n - m^2 = 1$ ve $n + m^2 = 19$, dolayısıyla $n = 10$, $m = 3$ bulunur.

**Soru 7.** $\dfrac{1}{4}<\dfrac{ab}{a+b}<\dfrac{1}{3}$,

$\dfrac{2}{7}<\dfrac{ac}{a+c}<\dfrac{2}{3}$,

$\dfrac{2}{9}<\dfrac{bc}{b+c}<\dfrac{2}{5}$

*ise,*

$$\left(\frac{ab+ac+bc}{abc}\right)^2-\left(\frac{ab+ac+bc}{abc}\right)$$

*ifadesinin en büyük tamsayı değeri nedir?*

**Yanıt:** $3<\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<4,$

$\dfrac{3}{2}<\dfrac{a+c}{ac}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}<\dfrac{7}{2},$

$\dfrac{5}{2}<\dfrac{b+c}{bc}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<\dfrac{9}{2}$

ifadeleri toplandığında

$$7=3+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}<2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)<4+\frac{7}{2}+\frac{9}{2}=12$$

elde edilir. Eğer $x = 1/a + 1/b + 1/c$ ise, bundan $7/2 < x < 6$ bulunur. $[7/2, 6]$ aralığında $x^2 - x$ fonksiyonu en büyük değeri $x = 6$'da alır ve bu değer de $6^2 - 6 = 30$'dur. Dolayısıyla $(7/2, 6)$ açık aralığında

$$\left(\frac{ab+ac+bc}{abc}\right)^2-\left(\frac{ab+ac+bc}{abc}\right)=x^2-x$$

sayısının en büyük tamsayı değeri 29'dur.

**Soru 8.** $5+\dfrac{9x-55}{7-x}=\dfrac{4x-20}{15-x}$ *denkleminin çözüm kümesi nedir?*

**Yanıt:** $x \neq 7$ ve $x \neq 15$ olmalı. Buradan

$$\frac{5(7-x)+9x-55}{7-x}=\frac{4x-20}{15-x}$$

ve

$$\frac{4x-20}{7-x}=\frac{4x-20}{15-x}$$

bulunur. Demek ki $4x - 20 = 0$ ve $x = 5$ olmalı.

**Soru 9.** $2^x + 2^{-x} = 5$ *ise* $8^x + 8^{-x}$ *kaçtır?*

**Yanıt:** $5^3 = (2^x + 2^{-x})^3 = 2^{3x} + 2^{-3x} + 3\cdot 2^x 2^{-x}(2^x + 2^{-x}) = 8^x + 8^{-x} + 3\cdot 5$ eşitliğinden, $8^x + 8^{-x} = 125 - 15 = 110$ bulunur.

**Soru 10.** $375 \times 25^{11} \times 16^6$ *sayısı kaç basamaklıdır?*

**Yanıt:** $375 \cdot 25^{11} \cdot 16^6 = (3 \cdot 5^3)(5^2)^{11}(2^4)^6 = 3 \cdot 5^{25} \cdot 2^{24} = 15 \cdot 10^{24}$ olduğundan, verilen sayı 26 basamaklıdır.

**Soru 11.** $x \otimes y = 2x + 2y + xy + 2$ *işleminde*, 2 *sayısının tersi var mıdır, varsa nedir?*

**Yanıt:** İşlemin değişmeli olduğuna dikkatinizi çekeriz. Önce etkisiz eleman var mı yok mu bakalım. Etkisiz elemanın olduğunu varsayıp bu elemana $e$ diyelim. Her $x$ için, $x = x \otimes e = 2x + 2e + xe + 2$ eşitliğinden dolayı, $x = 0$ alarak, $e = -1$ buluruz. Şimdi $-1$'in gerçekten etkisiz eleman olduğunu kontrol edelim: $x \otimes (-1) = 2x + 2(-1) + x(-1) + 2 = x$. Demek ki $-1$ gerçekten etkisiz elemanmış. Şimdi $2 \otimes y = -1$ denklemini çözmeye çalışalım:

$$-1 = 2 \otimes y = 2 \cdot 2 + 2y + 2y + 2$$

ve $y = -7/4$. Demek ki $-7/4$, 2'nin tersiymiş.

**Soru 12.** $|x - 2| - |x + 3| \geq 1$ *eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?*

**Yanıt:** Eğer $x \geq 2$ ise, $(x - 2) - (x + 3) \geq 1$ ve bu durumda çözüm yok.

Eğer $-3 \leq x \leq 2$ ise, $(2 - x) - (x + 3) \geq 1$, yani $-2x - 1 \geq 1$, yani $-2x \geq 2$, yani $x \leq -1$. Demek ki bu durumda çözüm kümesi $[-3, -1]$.

Eğer $x \leq -3$ ise, $(2 - x) + (x + 3) \geq 1$, yani her $x$ bir çözüm.

Demek ki çözüm kümesi $(-\infty, -1]$.

**Soru 13.** $0 < p < 25$ *olmak üzere* $p \leq x \leq 25$ *aralığında bulunan* $x$ *değerleri için*

$$|x - p| + |x - 25| + |x - p - 25|$$

*ifadesinin minimum değerini bulunuz.*

**Yanıt:** $|x - p| = x - p$, $|x - 25| = 25 - x$ ve $|x - p - 25| = 25 - (x - p)$ olur. Dolayısıyla ifade,

$$(x - p) + (25 - x) + (25 - (x - p))$$

ifadesine eşittir, yani $50 - x$'e. Minimum değere $x = 25$ ile ulaşılır, yanıt da $50 - 25 = 25$ olur.

**Soru 14.** $(\sqrt[7]{2} + \sqrt[3]{x})^{10}$ *ifadesinin açılımında* $x$*'in katsayısını bulunuz.*

**Yanıt:** $(\sqrt[7]{2} + \sqrt[3]{x})^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 2^{(10-k)/7} x^{k/3}$

ifadesinden $x$'in katsayısı $k = 3$ için bulunur. Sonuç:

$$\binom{10}{3} 2^{(10-3)/7} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} \times 2 = 240.$$

**Soru 15.** $8^{13} - 6^{13}$ *sayısının* 49*'a bölümünden kalan kaçtır?*

**Yanıt:** $8 = (7 + 1)$ ve $6 = 7 - 1$ eşitliklerini ve binom açılımını kullanacağız:

$$8^{13} = (7+1)^{13} = \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} 7^k \equiv \binom{13}{0} + \binom{13}{1} = 14 \pmod{49}$$

ve

$$6^{13} = (7-1)^{13} = \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} 7^k (-1)^{13-k} \equiv -\binom{13}{0} + \binom{13}{1} = 12 \pmod{49}$$

olduğundan, sonuç $14 - 12 = 2$'dir.

**Soru 16.** $p$, *3'ten büyük bir asal sayı ise,* $p^2$ *sayısının 12'ye bölümünden kalanlar kümesi nedir?*

**Yanıt:** $p > 3$ ve asal olduğundan, modülo 12, $p$, 1'e, 5'e, 7'ye ya da 11'e eşit olabilir. Öte yandan,

$$1^2 \equiv 5^2 \equiv 7^2 \equiv 11^2 \equiv 1 \bmod 12,$$

Dolayısıyla $p^2$, 12'ye bölündüğünde 1 kalır.

**Soru 17.** $n$ *pozitif bir tamsayıysa,* $n^3 - n$ *sayısının* 3'e *bölümünden kalanlar kümesi nedir?*

**Yanıt:** $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$ eşitliğinden, $n^3 - n$ sayısının üç ardışık sayının çarpımı olduğu çıkar. Demek ki kalan 0'dır.

**Soru 18.** $x, y, z, t$ *doğal sayılar olduğuna göre,*

$$xz - yt = 1$$
$$xt + 4yz = 3$$

*denklem çiftinin tüm* $(x, y, z, t)$ çözümlerini bulunuz.

**Yanıt:** Eğer hem $y$ hem $z \neq 0$ ise, ikinci denklem çözümün olmadığını söyler. Demek ki ya $y = 0$ ya da $z = 0$. İkinci şıkta $-yt = 1$ yüzünden çözüm yoktur. Birinci şıkta $xz = 1$ ve $xt = 3$ denklemlerini çözmeliyiz: $x = z = 1$ ve $t = 3$. Tek çözüm var: $(1, 0, 1, 3)$.

**Soru 19.** $k > 1$ *bir tamsayı ve* $k$ è 9 (mod 17) *ise*, $2k - 1$ ve $9k + 4$ *tamsayılarının en büyük ortak böleni olabilecek bütün pozitif tamsayıların toplamı kaçtır?*

**Yanıt:** $2k - 1$ ve $9k + 4$ sayılarının obeb'ine $d$ diyelim. Demek ki belli $n$ ve $m$ doğal sayıları için,

$$9k + 4 = nd \text{ ve } 2k - 1 = md.$$

Bundan $2nd - 9md = 17$ ve $d$'nin ancak 1 ya da 17 olabileceği çıkar. Eğer $d = 17$ ise, $2k = 17m + 1$, $2k \equiv 1 \bmod 17$ ve $k \equiv 9 \bmod 17$, yasaklanan durum. Demek ki $d$ sadece 1 olabilir. $k = 2$ è 9 mod 17 olduğunda, $2k - 1 = 3$ ve $9k + 4 = 22$ olduğundan, $d$ gerçekten de 1 olabilir. Yanıt 1'dir.

**Soru 20.** 245 *ile* 601 *arasında* 13 *ya da* 15'*e bölünen kaç sayı vardır?*

**Yanıt:** $18 < 245/13$ ve $601/13 < 47$ olduğundan, $13k$'nin 245 ile 601 arasında olması için $k = 19, 20, ..., 46$ olmalıdır. Demek ki 245 ile 601 arasında $46 - 19 + 1 = 28$ tane 13'e bölünen sayı vardır. Aynı akıl yürütmeyle 245 ile 601 arasında 24 tane 15'e ve 2 tane $13 \times 15$'e bölünen sayı olduğu çıkar. Sonuç $28 + 24 - 2 = 50$'dir.

**Soru 21.** *Gerçel sayılardan tamsayılara giden f fonksiyonu,* $n \in \mathbb{Z}$ *olmak üzere,* $n \leq x < n + 1$ *iken,* $f(x) = n$ *olarak tanımlanıyor. Örneğin* $f(5/2) = 2$, $f(\pi) = 3$, $f(4) = 4$. *Buna göre,*

$$\sum_{k=1}^{n} f(\sqrt[k]{16}) = 3n$$

*ise, n kaçtır?*

**Yanıt.** 
$$\begin{aligned} 3n &= \sum_{k=1}^{n} f(\sqrt[k]{16}) \\ &= 16 + 4 + f(2^{4/3}) + 2 + \sum_{k=5}^{n} f(\sqrt[k]{16}) \\ &= 16 + 4 + 2 + 2 + (n - 4) = n + 20 \end{aligned}$$
olduğundan, $n = 10$ bulunur.

**Soru 22.** $a = f(x), b = f\left(\dfrac{1}{1-x}\right), c = f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

*olduğuna göre,* $a + 2b + 3c = g(x)$ *ise,*

$$g(x) + g\left(\frac{1}{1-x}\right) + g\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

*toplamının a, b, c türünden değeri kaçtır?*

**Yanıt:** $x$ yerine $1/(1-x)$ ve $(x-1)/x$ koyduğumuzda sırasıyla

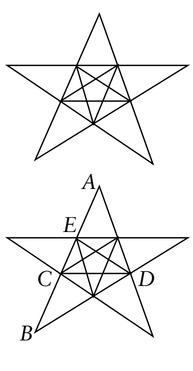
$$g\left(\frac{1}{1-x}\right) = 3a + b + 2c,$$

$$g\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2a + 3b + c$$

elde edilir ve

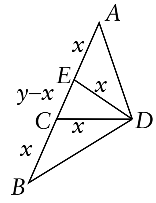
$$g(x) + g\left(\frac{1}{1-x}\right) + g\left(\frac{x-1}{x}\right) = 6(a + b + c)$$

bulunur.




**Soru 23.** *Yandaki şekildeki düzgün yıldızlardan büyük olanın çevresi küçük olanın kaç katıdır?*

**Yanıt:** Şekildeki harflendirmeyi kabul edelim. Kolaylıkla $EAD$ ve $EDA$ açılarının 72° olduğu bulunur. Demek ki $AED$ ikizkenar bir üçgen. Dolayısıyla $|DE| = |AE|$. Bu uzunluğa $x$ diyelim. $|EC|$ de $y$ olsun. Aranan oran $|AB|/|DE| = (y + x)/x$ olacaktır. $CAD$ açısı 36° olduğundan, $ACD$ ve $DEC$ benzer ikizkenar üçgenlerdir. Bundan,




$$(y - x)/x = x/y,$$

yani $u = y/x$ için $u^2 - u - 1 = 0$ bulunur. Buradan da $u = y/x = (1 + \sqrt{5})/2$ çıkar. Demek ki $(y + x)/x = (3 + \sqrt{5})/2$.

**Soru 24.**
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 24 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 48 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 96 \end{aligned}$$

*olduğuna göre,* $3x_4 + 2x_5$ *kaçtır?*

**Yanıt:** Bütün eşitlikler altalta toplandığında,

$$6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 186,$$

buradan da,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 31$$

bulunur. Dördüncü ve beşinci eşitlikler kullanılarak $x_4 = 17$, $x_5 = 65$ bulunur. Dolayısıyla

$$3x_4 + 2x_5 = 3 \times 17 + 2 \times 65 = 181.$$

**Soru 25.** *a, b, c pozitif tamsayıları verilmiş. b sayısı, a ile c'nin geometrik ortalamasıdır. b − a bir tamkare ve* $\log_6 a + \log_6 b + \log_6 c = 6$ *ise,* $a + b + c$ *ifadesinin değeri nedir?*

**Yanıt:** $\log_6 a + \log_6 b + \log_6 c = 6$ eşitliğinden $abc = 6^6$ elde edilir. Verilen $b^2 = ac$ eşitliğiyle birlikte, $b^3 = 6^6$ ve $b = 36$ bulunur. $b - a$ bir tamkaredir, öyleyse $a = 11, 20, 27, 32, 35$ sayılarından biri olmalıdır. $a$ sayısı $6^4$'ü böleceğinden $a = 27$, buradan da $c = 48$ bulunur. Demek ki,

$$a + b + c = 27 + 36 + 48 = 111.$$

**Soru 26.** $x^2 - 2x^2 + 4x + 5 = 0$ *denkleminin kökleri a, b, c olduğuna göre,* $a^3 + b^3 + c^3$ *ifadesinin değeri nedir?*

**Yanıt:** $a$, $b$, $c$ denklemin kökleri olduğundan,

$$abc = -5,$$
$$ab + ac + bc = 4,$$
$$a + b + c = 2$$

sağlanır. Bunlar,

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + ac + bc) - 3abc$$

eşitliğinde yerlerine konduğunda,

$$2^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3{\times}2{\times}4 - 3{\times}(-5),$$

ve $a^3 + b^3 + c^3 = -31$ bulunur.

**Soru 27.** *$a/b - b/a = 0$ ise,*

$$a/b + a^2/b^2 + \dots + a^{15}/b^{15}$$

*toplamının alabileceği değerlerin toplamı nedir?*

**Yanıt:** $a^2 = b^2$ olacağından, $a = \pm b$'dir. Eğer $a = b$ ise, toplam 15'tir elbet. Eğer $a = -b$ ise sadeleşmeler olur ve toplamın $-1$ olduğu görülür. Yanıt $15 - 1 = 14$.

**Soru 28.** *$(abc)_5 + (bca)_5 + (cab)_5 = (2220)_5$ olduğuna göre $a + b + c$ sayısı 3'lük tabanda nasıl yazılır?*

**Yanıt:** $(abc)_5 + (bca)_5 + (cab)_5$ sayısı, kolayca görüleceği üzere, $(5^2 + 5 + 1)(a + b + c)$, yani

$$31(a + b + c)$$

sayısına eşittir. Öte yandan,

$$(2220)_5 = (5^3 + 5^2 + 5) \times 2 = 155 \times 2 = 310.$$

Demek ki $a + b + c = 10 = 3^2 + 1 = (101)_3$.

**Soru 29.** *$f(x) = x - 1 + f(x - 1)$ ve $f(1) = 19$ olduğuna göre $f(19)$ kaçtır?*

**Yanıt:** Birer birer eksilterek,

$$f(n) = (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 + f(1)$$

buluruz. Demek ki,

$$f(19) = 18 + 17 + \dots + 1 + 19 = 19\times 20/2 = 190.$$

**Soru 30.** *$\log_5(24!) + \log_5(25!) = m$ ve $25! = 5^x$ ise $x$'in $m$ türünden değeri nedir?*

**Yanıt:** $\log_5(5^m) = m = \log_5(24!) + \log_5(25!) = \log_5(24!\times 25!)$ eşitliğinden, $5^m = 24!\times 25!$ ve bundan da $5^{m+2} = 5^m \times 25 = (25!)^2 = 5^{2x}$ çıkar. Demek ki $2x = m + 2$ ve $x = m/2 + 1$.

**Soru 31.** *Bir turist grubunda 10 Alman ve 5 Fransız turist bulunmaktadır. Bu gruptan rastgele seçilen 3 turistten ikisinin aynı, birinin farklı ülkeden olma olasılığı kaçtır?*

**Yanıt:** İki Alman bir Fransız için,

$$\binom{10}{2}\times 5 = \frac{10\times 9}{2}\times 5 = 225$$

ve iki Alman bir Fransız için,

$$\binom{5}{2}\times 10 = \frac{5\times 4}{2}\times 10 = 100$$

tane seçenek vardır. Üç turisti,

$$\binom{10+5}{3} = \frac{15\times 14\times 13}{3\times 2} = 35\times 13 = 455$$

değişik biçimde seçebiliriz. Demek ki olasılık,

$$\frac{225+100}{455} = \frac{325}{455} = \frac{65}{91} = \frac{5}{7}$$

dir.

**Soru 32.** *$(m+3)x^2 + (7-m)y^2 - 5mx + 20y - 20 = 0$ denklemi düzlemde bir çember belirttiğine göre, merkezinin koordinatlarını ve yarıçapını bulunuz.*

**Yanıt:** Denklem bir çember verdiğine göre, $m + 3 = 7 - m$, yani, $m = 2$ olmalı. Denklem,

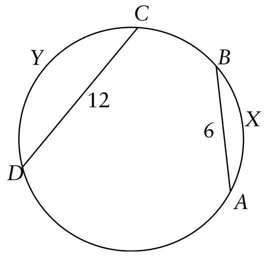
$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

halini alır. Bu da,

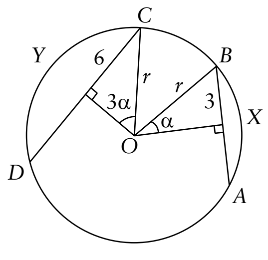
$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

denklemine denktir. Demek ki $(1, -2)$ noktası merkezdir, yarıçap da 3'tür.

**Soru 33.** *Şekildeki A, B, C ve D noktalarından geçen çemberde, X ve Y yayları için, $3m(AXB) = m(CYD)$, $|AB| = 6$ cm ve $|CD| = 12$ cm olduğuna göre çemberin yarıçapı kaç cm'dir?*




**Yanıt:** $O$ merkezinden dikler indirilerek oluşturulan açılar veriye göre $\alpha$ ve $3\alpha$ biçiminde yazı-

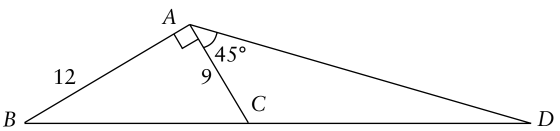



lırlar. Şekilden de anlaşılacağı üzere $\sin\alpha = 3/r$ ve $\sin 3\alpha = 6/r$. Demek ki,

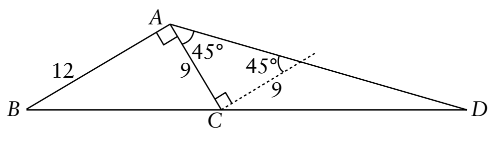
$$6/r = \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 3(3/r) - 4(3/r)^3,$$

ve sadeleştirerek $r^2 = 36$, $r = 6$ bulunur.

**Soru 34.** $[AB] - [AC]$, *$m(CAD) = 45°$, $|AC| = 9$ cm ve $|AB| = 12$ cm olsun. Bu verilere göre ACD üçgeninin alanı kaç cm² olur?*

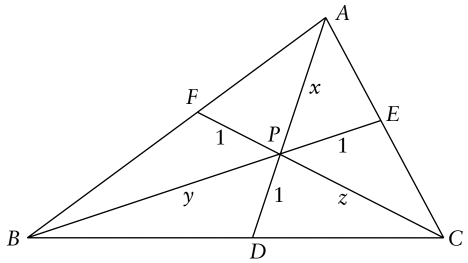



**Yanıt:** Pisagor Teoremi'nden dolayı $|BC| = 15$'tir. Eğer $|CD| = x$ ise, $C$'den $AB$'ye çekilen paralelle elde edilen üçgen, $ABD$ üçgenine benzer olacağından, $x/(x+15) = |DC|/|DB| = 9/12 = 3/4$. Demek ki $x = 45$. Şimdi $ACD$'nin $h$ yüksekliğini bulalım.



Bu yükseklik $ABC$'nin de yüksekliği olduğundan, $ABC$ üçgeninin alanını iki değişik şekilde hesaplayarak, $9\times12/2 = 15\times h/2$, yani $h = 36/5$ buluruz. Demek ki alan $45\times36/10 = 162$ cm$^2$.

**Soru 35.** *P, ABC üçgeninin içinde bir noktadır. PA doğrusu BC'yi D'de, benzer şekilde PB ve PC doğruları CA'yı ve AB'yi sırasıyla E'de ve F'de kesmektedir. Eğer* $|PD| = |PE| = |PF| = 1$ *ve* $|PA| + |PB| + |PC| = a$ *ise,* $|PA||PB||PC|$ *çarpımı nedir?*




**Yanıt:** $x$, $y$ ve $z$ şekildeki gibi olsunlar. $ABC$ ve $ABP$ üçgenlerinin tabanları aynı olduğundan alanlarının oranı yüksekliklerinin oranına eşittir. Bunu diğer üçgenlerle de yaptığımızda,

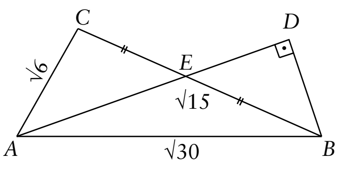
$$\frac{\text{Alan}(ABP)}{\text{Alan}(ABC)} = \frac{1}{1+z},$$
$$\frac{\text{Alan}(BCP)}{\text{Alan}(ABC)} = \frac{1}{1+x},$$
$$\frac{\text{Alan}(ACP)}{\text{Alan}(ABC)} = \frac{1}{1+y}$$

olduğundan, üç eşitliği toplayarak,

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 1$$

bulunur. Paydayı eşitleyip çarpımları yapıp verilen $x+y+z = a$ eşitliği kullanınca, $xyz = 2 + a$ çıkıyor.

**Soru 36.** *Şekildeki üçgenlerde* $|AB| = \sqrt{30}$, $|BC| = \sqrt{15}$, $|CA| = \sqrt{6}$, $|EB| = |EC|$ *ve* $m(ADB) = 90°$ *ise ADB üçgeninin alanının ABC üçgeninin alanına oranı nedir?*




**Yanıt:** Kenarortay bağıntısından, $|AE|^2 = (b^2 + c^2)/2 - a^2/4 = (6 + 30)/2 - 15/4 = 57/4$. Öte yandan eğer $\alpha$, $DAB$ açısıysa, kosinüs teoreminden, $15/4 = 57/4 + 30 - 2 \times \sqrt{57} / 2 \times \sqrt{30} \times \cos\alpha$ ve buradan $\cos\alpha$'nın değeri bulunur. Böylece

$$|AD| = \sqrt{30}\cos\alpha = \frac{81}{2\sqrt{57}}$$

çıkar ve istenilen alanlar oranı

$$\frac{\text{Alan}(ADB)}{\text{Alan}(ABC)} = \frac{|AD|}{2|AE|} = \frac{27}{38}$$

olarak bulunur.

**Soru 37.** $15$*'e asal iki basamaklı kaç sayı vardır?*

**Yanıt:** 15'e asal sayılar hem 3'e hem de 5'e asal olmak zorundalar.

3'e bölünenlerden $33 - 3 = 30$ tane var.

5'e bölünenlerden $19 - 1 = 18$ tane var.

15'e bölünenlerden $6 - 0 = 6$ tane var.

Demek ki toplam $30 + 18 - 6 = 42$ tane ya 3'e ya da 5'e bölünen iki basamaklı sayı var. Böylece aranan yanıt $90 - 42 = 48$ bulunur.

**Soru 38.** $(52 + 6\sqrt{43})^{3/2} - (52 - 6\sqrt{43})^{3/2} = ?$

**Yanıt:** $(3 \pm \sqrt{43})^2 = 9 \pm 6\sqrt{43} + 43 = 52 \pm 6\sqrt{43}$, buradan da

$$\begin{aligned}(52 + 6\sqrt{43})^{3/2} - (52 - 6\sqrt{43})^{3/2} &= (3 + \sqrt{43})^3 - (\sqrt{43} - 3)^3 \\ &= 2(3^3 + 3\cdot3\cdot43) = 828\end{aligned}$$

çıkar.

**Soru 39.** *Çelik bir çubuğa 5 tane küre biçiminde ve aynı büyüklükte boncuk dizilerek üretim yapılmaktadır. Çelik çubuk, boncuklarla tümüyle kaplandığına ve üç boncuk beyaz iki boncuk siyah olduğuna göre kaç değişik ürün elde edilir?*

**Yanıt:** 5'in 2'li (ya da 3'lü) kombinasyonlarından simetriden dolayı yilenen çözümleri çıkarmak gerekir. Yanıt:

$$\binom{5}{2} - 4 = 10 - 4 = 6.$$

**Soru 40.** *Kaç b gerçel sayısı için* $x^2 + bx + 2b$ *polinomunun her iki kökü de tamsayı olur?*

**Yanıt:** $b$ bir tamsayı ve polinomun diskriminantı $b^2 - 8b$ bir tamkare, diyelim $n^2$ olmalı. Buradan, $(b - 4)^2 = n^2 + 16$ ve dolayısıyla, $(b - 4 - n)(b - 4 + n) = 16 = (\pm1)(\pm16) = (\pm2)(\pm8) = (\pm4)(\pm4)$ çıkar ve $b \in \{-1, 0, 8, 9\}$ elde edilir. ♣