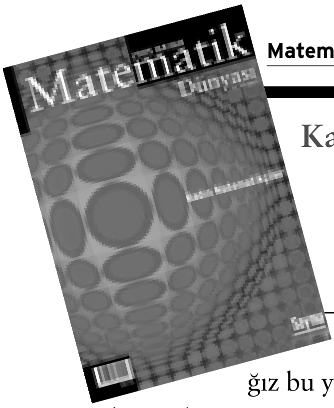


Kapak Konusu: Sayma

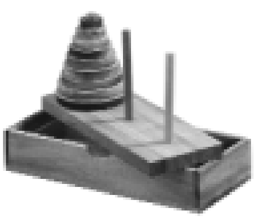
Tümevarımla Sayma

Sayar Bayar

Üç sayma problemi ele alacağız bu yazıda. Herbirinin sayma problemi olmasının yanısıra, bir başka ortak yanları, genel çözümün aynı problemin daha basit hallerinin çözümününden kaynaklanması, yani problemleri belli bir zorluk seviyesinde çözmek için problemlerin daha kolay durumlardaki çözümünden yararlanılmasıdır.

I. Birinci Oyun: Hanoi Kulesi Problemi

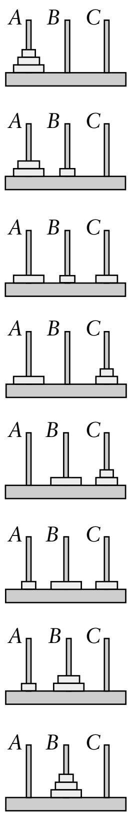
Aşağıdaki resimdeki tek kişilik oyuna bakın. Amaç soldaki çiviye boy sırasıyla dizilmiş dokuz tekeri gene boy sırasıyla bir başka çiviye dizmektir. Yasal bir tür hamle var: Bir teker bulunduğu çividen çıkarılıp bir başka çiviye geçirilebilir, ama alttaki tekerler üstteki tekerlerden hep daha büyük olmalı; yani bir tekeri daha küçük bir tekerin üstüne koyamazsınız.



Bunu başarabilir misiniz ve başarabilirseniz en az kaç hamlede başarabilirsiniz?

Dokuz yerine n tane teker alalım ve aynı soruyu 9 yerine n için soralım.

Bu problem Fransız matematikçi Edouard Lucas tarafından 1883'te bir Hint söylencesinden esinlenerek bulunmuştur. Söylenceye göre, Benares şehrinde bulunan ve dünyanın merkezi olan (inanmayan ölçsün!) bir tapınağın kubbesinin altına, var olan her şeyi yaratan Brahma, evreni yaratırken, üç elmas iğneden birine büyükten küçüğe sıralanmış biçimde saf altından yapılmış 64 teker geçirmiş. Rahipler gece gündüz dur durak bilmeden bu 64 tekeri teker teker gene aynı sırayla bir başka iğneye geçirmeye çalışırlarmış. Ama bir tekeri daha küçük bir tekerin üstüne koymaya hakları yokmuş. Rahipler başarıya ulaştıklarında tapınak dahil her şey yerle bir ve un ufak olacak, yani kıyamet kopacakmış.



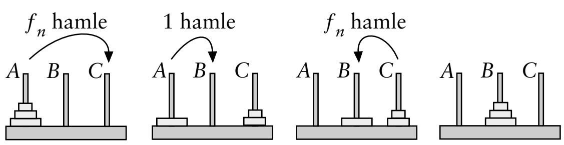
Eğer $n = 1$ ise, o zaman tek bir hamle yeterli: Tekeri A çivisinden alıp B çivisine geçirelim.

Eğer $n = 2$ ise, kolayca sınanacağı üzere üç hamle yeterli ve daha az hamlede de problem çözülemez.

Eğer $n = 3$ ise, bir çözümü yan tarafa dikine çizdik. Toplam yedi hamle yetiyor. Problemin daha az hamlede çözülemeyeceği sanırım hissedilir, ama bu kez ikna olmak ya da etmek o kadar kolay olmayabilir.

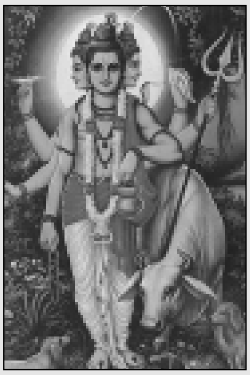
n tekerli problemi çözen en az hamle sayısına f_n diyelim. Yukarda gördüğümüz gibi, $f_1 = 1$, $f_2 = 3$, $f_3 \le 7$. Amacımız f_n'yi bulmak.

Şimdi düşünelim. $n+1$ tekerli oyunda, en alttaki tekeri unutursak, geri kalan n tekeri f_n hamlede C çivisine boy sırasına göre dizebiliriz. Ardından en büyük tekeri A'dan B'ye geçirebiliriz. Son olarak da C çivisinde boy sırasına göre dizilmiş olan n tekeri B çivisine (en büyük tekerin üstüne) gene boy sırasına göre f_n hamlede aktarabiliriz. Böylece $f_n + 1 + f_n$,



$f_{n+1} \le 2f_n + 1$

Brahma



Hint inanışına göre üç büyük tanrı vardır: var eden Brahma, koruyan Vishnu ve yok eden Shiva. Bu üç tanrı, "üç biçimli" anlamına gelen ve çoğu zaman üç başlı bir vücutla resmedilen Trimurti ortak adıyla anılırlar.

* Bu yazı Graham, Knuth ve Patashnik'in **Concrete Mathematics**, adlı muhteşem eserinden araklanmıştır demiyelim de esinlenilmiştir.

yani $2f_n + 1$ hamlede $n + 1$ tekeri boy sırasına göre dizmiş oluruz. Demek ki

$$f_{n+1} \leq 2f_n + 1.$$

Peki daha az hamlede bu işi becerebilir miyiz, yani $f_{n+1} < 2f_n + 1$ olabilir mi? Hayır! Nalan! Bunu kanıtlayalım. En büyük teker ancak en altta olabilir, dolayısıyla bu en büyük tekeri yerinden oynatabilmemiz için çivilerden biri boş olmalı, yani geri kalan n teker boy sırasıyla tek bir çiviye geçirilmiş olmalı. Büyük tekerin yerini iki kez değiştirmek demek, aynı pozisyona iki kez gelmek demektir ki böyle bir hareket gereksiz olup bize zaman kaybettireceğinden büyük tekeri sadece bir kez yerinden oynatmalıyız. Demek ki büyük tekeri bir kez yerinden oynattıktan sonra sadece geri kalan n tekere dokunmalıyız ve bunları boy sırasına göre büyük tekerin üstüne dizmeliyiz, ki bu da en az f_n hamlede yapılabilir. Dolayısıyla $f_{n+1} \geq 2f_n + 1$. Böylece

$$f_{n+1} = 2f_n + 1$$

eşitliğini elde ederiz.

Demek ki n teker için yanıt olan f_n'yi biliyorsak, $f_{n+1} = 2f_n + 1$ eşitliğinden bir fazla teker için yanıt olan f_{n+1}'i de bulabiliriz. Bu formülü n = 1, 2, 3, 4'e uygularsak, f_1'i bildiğimizden,

$$f_1 = 1$$
$$f_2 = 2f_1 + 1 = 2\times1 + 1 = 3$$
$$f_3 = 2f_2 + 1 = 2\times3 + 1 = 7$$
$$f_4 = 2f_3 + 1 = 2\times7 + 1 = 15$$
$$f_5 = 2f_4 + 1 = 2\times15 + 1 = 31$$

elde ederiz. Burada durmak zorunda değiliz elbet, istediğimiz kadar gidebiliriz. On adımda f_{10}'u, yüz adımda f_{100}'ü, bin adımda f_{1000}'i hesaplayabiliriz. En önemlisi, 64 adımda f_{64}'ü hesaplayıp kıyametin aşağı yukarı ne zaman kopacağını tahmin edebiliriz! Brahma rahiplerinin saniyede bir hamle yaptıklarını ve hiç şaşırmadıklarını varsayarsak, evrenin bilinen yaşının beş katı bulunur! Demek ki Brahma 64 yerine 62 teker koysaydı, bugün tahmin edilen kıyamet tarihi bulunacaktı aşağı yukarı, tuhaf bir tesadüf!

Her şey iyi güzel de, f_{1000}'i bin adımda değil, bir adımda hesaplamak istiyorum! İşim gücüm var, acelem var, bin tane hesap yapmak istemiyorum. Bir başka deyişle f_n için sadece n'ye bağımlı bir formül bulmak istiyorum.

Yukarda bulduğumuz f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 sayılarına 1 ekleyelim, bakalım n'olacak:

$$f_1 + 1 = 1 + 1 = 2$$
$$f_2 + 1 = 3 + 1 = 4$$
$$f_3 + 1 = 7 + 1 = 8$$
$$f_4 + 1 = 15 + 1 = 16$$
$$f_5 + 1 = 31 + 1 = 32$$

elde ederiz. Bunların 2'nin katları olduğu dikkatinizi celbetmiştir herhalde:

$$f_1 + 1 = 2 = 2^1$$
$$f_2 + 1 = 4 = 2^2$$
$$f_3 + 1 = 8 = 2^3$$
$$f_4 + 1 = 16 = 2^4$$
$$f_5 + 1 = 32 = 2^5.$$

Bu kadar da rastlantı olamaz! Burada bir teorem olmalı! Galiba,

$$f_n + 1 = 2^n$$

denklemi doğru... Bu son eşitliği kanıtlayalım.

Bildiğimiz

$$f_{n+1} = 2f_n + 1$$

denkleminin her iki tarafına da 1 ekleyelim:

$$f_{n+1} + 1 = 2f_n + 2 = 2(f_n + 1)$$

elde ederiz; yani eğer, $f_n + 1$ yerine g_n dersek,

$$g_{n+1} = 2g_n$$

denklemini elde etmiş oluruz. $g_1 = f_1 + 1 = 1 + 1 = 2$ olduğundan, $g_{n+1} = 2g_n$ formülünde sırayla n = 1, 2, 3, 4 alarak,

$$g_1 = 2 = 2^1$$
$$g_2 = 2 \times g_1 = 2 \times 2^1 = 2^2$$
$$g_3 = 2 \times g_2 = 2 \times 2^2 = 2^3$$
$$g_4 = 2 \times g_3 = 2 \times 2^3 = 2^4$$
$$g_5 = 2 \times g_4 = 2 \times 2^4 = 2^5$$

buluruz. Bunlar zaten bildiğimiz sonuçlardı, ama olsun, bir defa daha bulduk ve bir defa daha bularak gerçekten ikna olduk: Her g_n bir öncekinin iki katı olduğundan ve $g_1 = 2^1$ olduğundan, g_n gerçekten 2^n olmalı.

Olmalı ama matematikte içinde "olmalı" sözü geçen kanıtlar geçerli değildir. Doğruluğu apaçık belli olan bu eşitliğin daha matematiksel bir kanıtını verelim.

Amacımız, $g_n = 2^n$ eşitliğini kanıtlamak. Bu eşitliğe ε_n diyelim:

$$\varepsilon_n : g_n = 2^n.$$

Önce birçok öğrencinin kaçırdığı bir noktaya açıklık getirelim: Eğer, ε_n, $g_n = 2^n$ ise, o zaman

$$\varepsilon_1 \ : \ g_1 = 2^1,$$
$$\varepsilon_2 \ : \ g_2 = 2^2,$$
$$\varepsilon_{45} \ : \ g_{45} = 2^{45},$$

dir. Bu kolay. Bunun gibi,

$$\varepsilon_m \ : \ g_m = 2^m,$$
$$\varepsilon_k \ : \ g_k = 2^k,$$
$$\varepsilon_l \ : \ g_l = 2^l,$$
$$\varepsilon_{n+1} \ : \ g_{n+1} = 2^{n+1},$$

ε_{n+2} : $g_{n+2} = 2^{n+2}$,
ε_{n-1} : $g_{n-1} = 2^{n-1}$,
ε_{2n} : $g_{2n} = 2^{2n}$,
$\varepsilon_{şey}$: $g_{şey} = 2^{şey}$

dir; $g_n = 2^n$ eşitliğinde her n yerine ne gerekiyorsa o simge konur.

ε_n eşitliğini önce $n = 1$ için kanıtlamalıyız, yani ε_1, yani $g_1 = 2^1$ eşitliğini kanıtlamalıyız, ki bunu biliyoruz:

$$g_1 = f_1 + 1 = 1 + 1 = 2 = 2^1.$$

Ardından, eşitliğin n için doğru olduğunu varsayıp (***tümevarım varsayımı***) aynı eşitliği $n + 1$ için kanıtlamalıyız, yani ε_n eşitliğini varsayıp ε_{n+1} eşitliğini kanıtlamalıyız, çünkü o zaman ε_1 eşitliğini bildiğimizden ε_2 eşitliğinin de doğru olduğunu anlarız, ama o zaman ε_3 eşitliği de doğru olur, ve ε_4 eşitliği de... Her n pozitif tamsayısı için ε_n eşitliğinin doğruluğu anlaşılmış olur.

Bu tür kanıta ***tümevarımla kanıt*** denir. Tümevarımla kanıtın geçerli bir kanıt yöntemi olduğunu MD-2003-IV sayımızda kanıtlamıştık (sayfa 48-49).

Merdiven Nasıl Çıkılır? (Tümevarımla!)

Graham, Knuth ve Patashnik'in kitabında şöyle bir benzetme yapılıyor: Tümevarımla kanıt merdivenden çıkmayı öğrenmek gibidir. Merdivene adımını atmayı öğrenmek gerekir her şeyden önce. Ardından, her basamaktan bir sonraki basamağa nasıl çıkılacağı öğrenilmeli. İşte merdiven çıkmak bu kadar basittir!

Daha genel olarak, tümevarımla kanıt tamsayılarla ilgili bir önermeyi önce n_0 gibi bir tamsayı için kanıtlar (yukarda $n_0 = 1$ idi), ardından önermenin n için doğru olduğunu varsayıp $n + 1$ için kanıtlar. Böylece önermenin,

n_0
$n_0 + 1$
$n_0 + 1 + 1$
$n_0 + 1 + 1 + 1$

gibi sayılar için, yani n_0 ve n_0'dan büyük her tamsayı için doğru olduğu anlaşılır.

Şimdi ε_n, yani $g_n = 2^n$ eşitliğini varsayıp, ε_{n+1}, yani $g_{n+1} = 2^{n+1}$ eşitliğini kanıtlayalım. Bunun için, daha önce bulduğumuz g_n ile g_{n+1} arasındaki şu ilişkiyi kullanacağız: $g_{n+1} = 2g_n$. Bu ilişkiden ve $g_n = 2^n$ eşitliğinden $g_{n+1} = 2^{n+1}$ eşitliği hemen çıkar:

$$g_{n+1} = 2g_n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

Bu kadar basit!

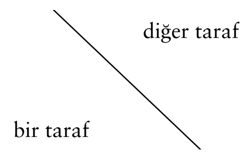
Amacımız g_n'yi değil, f_n'yi bulmaktı. Tanım gereği $g_n = f_n + 1$ olduğundan,

$$f_n = g_n - 1 = 2^n - 1$$

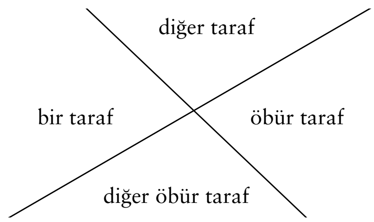
bulunur.

Sonuç: n tekerli Hanoi Kuleleri problemi en az $2^n - 1$ adımda çözülebilir. Tepe tepe kullanın!

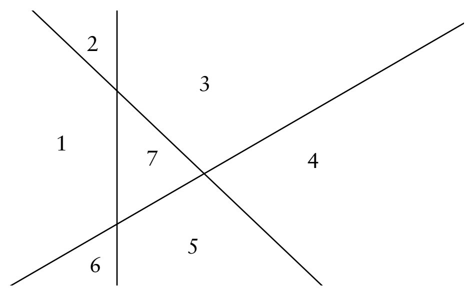
II. İkinci Oyun: Parçalayan Doğrular. Bir doğru düzlemi iki bölgeye parçalar. İşte!



Paralel olmayan iki doğru aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi düzlemi dört parçaya böler.



Üçüncü bir doğru daha çizersek, eğer üçüncü doğru ilk iki doğrunun kesişiminden geçmezse ve daha önceki iki doğrudan birine paralel değilse, düzlem yediye parçalanır:



Dördüncü bir doğru, eğer ilk üç doğrunun belirlediği kesişimlerden geçmezse ve ilk üç doğrudan birine paralel değilse düzlemi 11 parçaya böler.

Ya 7 doğru bir düzlemi en fazla kaç parçaya ayırır? Yapacağımızı ve matematiği doğru değerlendirmek için bu soruyla beş on dakika ilgilenin. Pek kolay olmadığını göreceksiniz.

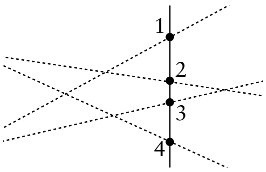
Ya 50 doğru bir düzlemi kaç parçaya ayırır? Kaleme kâğıda sarılıp doğru çizmenizi önermem!

Baklayı ağzımızdan çıkaralım: n tane doğru düzlemi en fazla kaç parçaya böler? Bu sayıya B_n diyelim. $B_0 = 1$ (hiç doğru yoksa düzlem eskisi gibi tek parça kalır!) $B_1 = 2$, $B_2 = 4$, $B_3 = 7$ eşitliklerini biliyoruz. Sıra diğerlerini bulmaya geldi!

Oyun moyun yok ama olsun... Bu da bir çeşit tek kişilik oyun sayılır.

Her doğru eski düzlemlerin her birini en fazla iki parçaya bölebilir. Demek ki $B_{n+1} \le 2B_n$. Ama $n = 2$ olduğunda görüldüğü gibi eşitlik her zaman geçerli değil, bu kez işimiz biraz daha zor.

Gene biraz düşüneceğiz... Çizilen her yeni doğru, kestiği doğru sayısından bir fazla kadar alanı ikiye böler, örneğin eğer yeni çizilen doğru 4 doğruyu kesmişse, bu yeni doğru beş alanı ikiye bölüp bu beş alanı on alan yapmış demektir; bu söylediğimizin doğruluğu yandaki şekilden anlaşılmalı. Dolayısıyla $n + 1$'inci doğruyu diğer tüm n doğruyu kesecek biçimde çizersek, ki çizebiliriz elbet, alan sayısını $n + 1$ artırmış oluruz. Bundan da,



$$B_{n+1} = B_n + n + 1$$

eşitliği çıkar. Şimdi $B_0 = 1$ eşitliğinden hareketle, yeterince zaman verilmişse her B_n'yi bulabiliriz:

$$B_0 = 1$$
$$B_1 = B_0 + 1 = 2$$
$$B_2 = B_1 + 2 = 4$$
$$B_3 = B_2 + 3 = 7$$
$$B_4 = B_3 + 4 = 11$$
$$B_5 = B_4 + 5 = 16$$
$$B_6 = B_5 + 6 = 22$$
$$B_7 = B_6 + 7 = 29$$

Böylece ilk sorumuzu yanıtlamış olduk: Yedi doğruyla düzlem en fazla 29 alana bölünebilir. Ama daha ikinci sorumuza yanıt verecek durumda değiliz daha, 50 doğruyla düzlemi kaç parçaya ayıracağımızı bulmak için bu işlemlerden tam 50 tane yapmalıyız. Oysa bizim işimiz gücümüz var!

Yukardaki listeyi 0'dan 7'ye kadar yazacağımıza 0'dan n'ye kadar (kaçsa o n!) yazalım:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \\ B_1 &= B_0 + 1 \\ B_2 &= B_1 + 2 \\ B_3 &= B_2 + 3 \\ &\dots \\ B_{n-1} &= B_{n-2} + n - 1 \\ B_n &= B_{n-1} + n \end{aligned}$$

ve eşitliğin her iki tarafını da toplayalım. Sol tarafta B_0'dan B_n'ye kadar olan sayıların toplamlarını buluruz. Sağ tarafta B_0'dan B_{n-1}'ye kadar olan sayıların toplamları beliriyor, bunun dışında bir de 1 ve 1'den n'ye kadar olan sayıların toplamları var. B_0'dan B_{n-1}'e kadar olan sayılar her iki tarafta da belirdiğinden, bunlar sadeleşirler, yani yok olurlar ve geriye,

$$B_n = 1 + (1 + 2 + \dots + n)$$

kalır. Ne güzel! Şimdi, sağdaki

$$1 + 2 + \dots + n$$

toplamını bulmalıyız. Gauss'un anasının karnındayken bulduğu rivayet edilen bu toplamın ne olduğunu herhalde herkes biliyordur ve bize de bu toplamın

$$n(n+1)/2$$

olduğunu kanıtlamaktan gına geldi! Zaten MD-2004-I, sayfa 68-69'da kanıtlanmıştı

$$1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$$

eşitliği... Bu eşitliğin tümevarımla kanıtını okura alıştırma olarak bırakıyoruz. Demek ki

$$B_n = 1 + n(n+1)/2 = (n^2 + n + 2)/2.$$

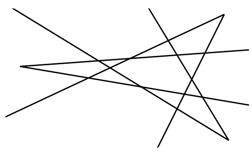
Şimdi artık ikinci sorumuza yanıt verebiliriz, 50 doğruyla bir düzlemi,

$$(50^2 + 50 + 2)/2 = 2552/2 = 1276$$

parçaya ayırabiliriz.

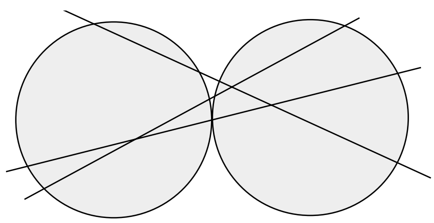
Alıştırmalar.

1. n tane doğru bir daireyi en fazla kaç parçaya ayırır?



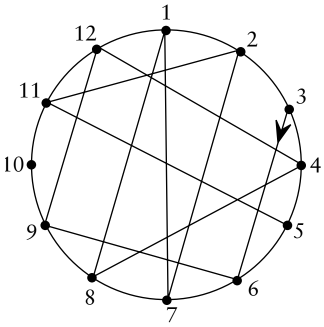
2. n tane bir yerinden kırık doğruyla düzlem en fazla kaç parçaya ayrılır?

3. n tane doğru iki (eş ya da değil) teğet daireyi en fazla kaç parçaya ayırır?



III. Üçüncü Oyun: Josephus Problemi

Flavius Josephus'un ilginç yaşamöyküsünü bir sonraki sayfada okuyabilirsiniz. Belli ki, zeki, işini bilen, havayı iyi koklayan, rüzgârın hangi yönden eseceğini doğru kestirebilen biriymiş. Josephus sayesinde matematik dünyası şu problemle tanışmıştır:

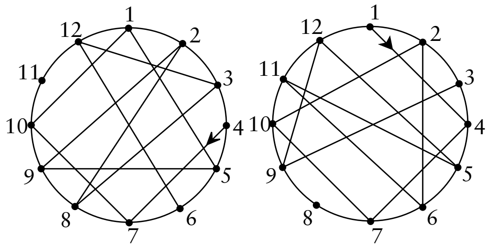


41 kişi bir daire şeklinde diziliyorlar. Herhangi birinden başlanarak kişiler 1'den 41'e kadar numaralandırılıyorlar. Sonra birinciden itibaren saymaya başlanıyor ve her üç kişiden biri oyundan ve daireden çıkıyor... Son kalan kazanıyor. Oyunu kazanmak için kaçıncı kişi olmak gerekir?

Bu soruyu elbette sadece 41 oyuncu için değil, herhangi bir n sayıda oyuncu için sorabiliriz, örneğin eğer 12 kişiyle başlarsak, yukardaki şekilden de görüleceği üzere 10'uncu kişi oyunu kazanır. (Saymaya 1'den başlanıyor: 1-2-3 ve üçüncü kişi oyundan çıkıyor; 4-5-6 ve 6'ncı kişi oyundan çıkıyor, vs.)

Saymaya başkasından başlarsak sonuç değişebilir. Yan sütunda buna örnek verdik.

Her üç kişiden biri oyundan çıkacağına her p kişiden biri oyundan çıkarsa (p, n'den büyük de olabilir), oyun daha da genelleşmiş olur.



12 oyuncuyla ve her üç oyuncudan birinin çıktığı oyunda, ilk olarak 4'üncü oyuncu çıkarsa oyunu 11'nci oyuncu kazanır. İlk olarak 1'inci oyuncu çıkarsa oyunu 8'inci oyuncu kazanır.

Biz burada n'yi herhangi bir sayı olarak alacağız ama p'yi 2 seçeceğiz: Her iki kişiden biri oyundan çıkacak. Önce 2 numara, sonra varsa 4, 6, 8 numaralar çıkacak vs.

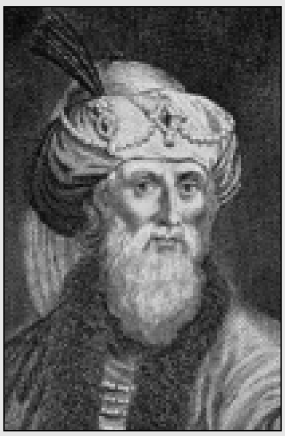
Birkaç denemeyle başlayalım ($J(n)$, oyunu kazananın numarası olsun):

$n =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$J(n) =$	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9

Kazananın hep tek numara olması o kadar şaşırtıcı olmamalı, ne de olsa birinci turda çift sayılar eleniyorlar ve geriye sadece tek sayılar kalıyor. Bu oyunu genel olarak kimin kazandığını bulacağız.

Flavius Josephus (MS 37 - ~100)

Flavius Josephus hayata filozof olarak başlamış, daha sonra Roma'ya karşı savaşan bir generale dönüşmüş, hayatta kalabilmesi için bir ara peygamber olmak zorunda kalmış ve daha sonra tarihçilikle iştigal etmiş ilginç bir kişiliktir. Çağının tek Yahudi tarihçisi olarak bilinir.



Yahudilerin acımasızca vergilendirilmesi ve yoksullaşması sonucu halkın ayaklanmasıyla başlayan Roma'yla Roma işgali altındaki Yahudi Krallığı'nın savaşında (MS 66-70) Galilee bölgesini Romalı general Vespasian'a karşı korumaya çalışmıştır. (Burada ilginç bir parantez açalım: Vespasian, yaşlı ama geçmişte birçok zafere imza atan bir Roma generaliydi. Roma imparatoru Nero'nun bir konserinde uyuyakaldığı için maaşı kesilmiş ve gözden düşmüştü! Ancak savaşın kötüye gitmesi, Nero'yu konserinde uyuyakalan generali tekrar göreve çağırmaya mecbur bırakmıştır.) Josephus direnmede başarılı olamayınca, gözünü budaktan sakınmayan 40 savaşçıyla birlikte bir mağaraya sığınmıştır. Josephus'un karşı koymasına karşın, diğerleri Romalılara teslim olmaktansa intihar etmeyi yeğlemişlerdir. Bunun üzerine Josephus şu intihar biçimini önermiş: 41 kişi bir daire şeklinde dizilecek ve kimse kalmayıncaya kadar her üç kişiden biri kendini öldürecek... Josephus kendisini hayatta kalan en son kişi kalacak biçiminde yerleştirmiş(miş...) sonra da gidip Roma generali Vespasian'a teslim olmuştur. Josephus, generalin imparator olacağı kehanetinde bulunması sayesinde çarmıha gerilmekten kurtulmuştur. Generalin kendi yaşındaki oğluyla sıkı fıkı olması sayesinde hapisten de kurtulmuş ve hele kehaneti gerçekleştiğinde (MS 69) daha da göze girip yaşamını Yahudi kültürünü Romalılara ve Roma kültürünü Yahudilere aktarmaya adamıştır. MS 98'de Vespasian'ın sülalesi imparatorluktan atılınca gözden düşmüştür. Nasıl ve ne zaman öldüğü bilinmemektedir.

Eğer Çift Sayıda Oyuncu Varsa. Oyuncu sayısına $2n$ diyelim. İlk n seferde 2, 4, ..., $2n$ numaralar elenecek ve geriye sadece n tane tek numara kalacak ve o andan itibaren aynı oyun $2n$ yerine n oyuncuyla yeniden oynanacak. Bu yeni oyunda eski 1 numaralı oyuncu gene 1 numara olacak, ama diğerlerinin numarası değişecek: eski 3 numara 2 numara, eski 5 numara 3 numara, eski 7 numara 3 numara olacak... Genel olarak eski $2k - 1$ numaralı oyuncu yeni oyunda k numara olacak. Demek ki bu yeni n kişilik oyunu k numaralı oyuncu kazanıyorsa, $2n$ kişilik oyunu $2k - 1$ numaralı oyuncu kazanır. Dolayısıyla,

$$J(2n) = 2J(n) - 1$$

eşitliği geçerlidir. Örneğin,

$$\begin{aligned}
J(2) &= 2J(1) - 1 = 2 - 1 = 1\\
J(4) &= 2J(2) - 1 = 2 - 1 = 1\\
J(6) &= 2J(3) - 1 = 6 - 1 = 5\\
J(8) &= 2J(4) - 1 = 2 - 1 = 1\\
J(20) &= 2J(10) - 1 = 10 - 1 = 9\\
J(40) &= 2J(20) - 1 = 18 - 1 = 17.
\end{aligned}$$

Eğer Tek Sayıda Oyuncu Varsa. Oyuncu sayısına bu kez $2n+1$ diyelim. O zaman 2, 4, 6, ..., $2n$ ve 1 numaralı oyuncular bu sırayla elenirler ve geriye n tane oyuncu kalır. Bu n oyuncu gene aynı oyunu oynayacaklar ama bu yeni oyunda da oyuncuların numaraları değişir. İlk oyunda 3 numara bu yeni oyunda 1 numara olur, eski 5 numara 2 numara olur, eski 7 numara 3 numara olur... Genel olarak eski oyunda $2k + 1$ numaralı olan oyuncu yeni oyunda k numaralı oyuncu olur. Demek ki,

$$J(2n+1) = 2J(n) + 1.$$

Böylece oyunun analizi nerdeyse tamamlandı:

$$\begin{aligned}
J(1) &= 1,\\
J(2n) &= 2J(n) - 1,\\
J(2n+1) &= 2J(n) + 1.
\end{aligned}$$

Artık istediğimiz n sayısından başlayarak $J(1)$'e kadar geri gidebilir ve $J(n)$'yi bulabiliriz. Örneğin,

$$J(19) = 2J(9) + 1 = 2(2J(4) + 1) + 1 = 7.$$

Yalnız bulduğunuz yöntem pek pratik değil. $J(10.000)$'i bu yöntemle hesaplamak epey meşakkatli. Genel ve "kapalı" bir formül bulalım. İlk olarak bulduğumuz ilk birkaç J değeri yazıp bu değerlere alıcı gözle bakalım:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Belli bir düzen olduğu belli. 2^k'dan $2^{k+1} - 1$'e kadar olan sayılar için J değeri 1, 3, 5, ..., $2^{k+1} - 1$ diye değişiyor.

Formülü tahmin etmek için J'nin 8'den 15'e kadar olan sayılarda aldığı değerleri bir liste halinde yazalım:

$$\begin{aligned}
J(8) &= J(2^3 + 0) = 1 = 2 \times 0 + 1,\\
J(9) &= J(2^3 + 1) = 3 = 2 \times 1 + 1,\\
J(10) &= J(2^3 + 2) = 5 = 2 \times 2 + 1,\\
J(11) &= J(2^3 + 3) = 7 = 2 \times 3 + 1,\\
J(12) &= J(2^3 + 4) = 9 = 2 \times 4 + 1,\\
J(13) &= J(2^3 + 5) = 11 = 2 \times 5 + 1,\\
J(14) &= J(2^3 + 6) = 13 = 2 \times 6 + 1,\\
J(15) &= J(2^3 + 7) = 15 = 2 \times 7 + 1.
\end{aligned}$$

Demek ki tahminimiz, eğer $m \geq 0$ ve $0 \leq l < 2^m$ ise

$$J(2^m + l) = 2l + 1$$

olmalı.

Bu eşitliği de tümevarımla kanıtlayacağız, ama bu kez bir değil, l ve m diye adlandırdığımız iki tamsayıyla ilgili bir eşitliğimiz var. Biz m üzerine tümevarım yapacağız.

Önce $m = 0$ durumunu kanıtlayalım. (Merdivenin birinci adımı.) Bu durumda l ancak 0 olabilir, çünkü $0 \leq l < 2^0 = 1$ eşitsizlikleri sağlanmalı. Demek ki, $J(2^0 + 0) = 2 \times 0 + 1$ eşitliğini kanıtlamalıyız, yani $J(1) = 1$ eşitliğini, ki bunu biliyoruz.

Şimdi merdivenin m-inci basamağında olduğumuzu varsayıp bir sonraki $m + 1$'inci basamağa nasıl çıkacağımızı görelim. Her $0 \leq l < 2^{m-1}$ eşitsizliğini sağlayan l için

$$J(2^m + l) = 2l + 1$$

eşitliğini varsayıp (buna ***tümevarım varsayımı*** denir), eğer $0 \leq l < 2^m$ ise

$$J(2^{m+1} + l) = 2l + 1$$

eşitliğini kanıtlayalım. Eğer l çiftse, $l = 2k$ yazıp hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
J(2^{m+1} + l) &= J(2^{m+1} + 2k) = J(2(2^m + k))\\
&= 2J(2^m + k) - 1 = 2(2k + 1) - 1\\
&= 2(l + 1) - 1 = 2l + 1.
\end{aligned}$$

(Birinci eşitlik $l = 2k$'den, üçüncü eşitlik yukarda bulduğumuz $J(2n) = 2J(n) - 1$ eşitliğinden çıkar. Dördüncü eşitlik tümevarım varsayımıdır. Gerisi hesap.) Şimdi de l'nin tek olduğunu varsayıp $l = 2k + 1$ yazalım ve hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
J(2^{m+1} + l) &= J(2^{m+1} + 2k + 1) = J(2(2^m + k)+1)\\
&= 2J(2^m + k) + 1 = 2(2k + 1) + 1\\
&= 2l + 1.
\end{aligned}$$

(Birinci eşitlik $l = 2k + 1$'den, üçüncü eşitlik yukarda bulduğumuz $J(2n + 1) = 2J(n) + 1$ eşitliğinden çıkar. Dördüncü eşitlik tümevarım varsayımıdır. Gerisi hesap. ♠