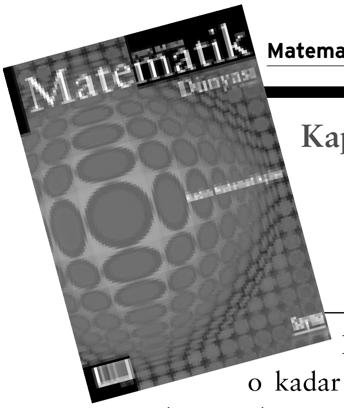

Kapak Konusu: Sayma

Binom Katsayıları

Üçer Beşer

Bu yazıda öğreneceğimiz şey o kadar ama o kadar önemlidir ki, eğer bu şey olmamış olsaydı bu yazı bile olmazdı. (Muhteşem bir giriş oldu.)

$x + y$ teriminin güçlerinin açılımlarına bakalım:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1\\
(x+y)^1 &= x + y\\
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2\\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\\
(x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\\
(x+y)^5 &= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5
\end{aligned}
$$

Bu çarpımları elle yapmak pek o kadar kolay değil, bayağı bir zaman alır. Biz bu yazıda çarpımları daha kolay bulmaya yarayan bir yöntem bulmaya çalışacağız. Bakalım bulabilecek miyiz? Sözgelimi $(x + y)^{15}$ teriminin açılımını oldukça hızlı bir biçimde bulabilir miyiz? (Heyecan had seviyede.)

Belli ki $(x + y)^{15}$ teriminin açılımında,

$$x^{15}, x^{14}y, x^{13}y^2, ..., x^6y^9, x^5y^{10}, ..., xy^{15}, y^{15}$$

monomları olacak, yani $i + j = 15$ eşitliğini sağlayan i ve j doğal sayıları için

$$x^iy^j$$

biçiminde yazılan monomlar olacak, bu kolay, önemli olan bu monomların katsayılarını hesaplayabilmek. (Anlaşılmıştır herhalde: x^iy^j biçiminde yazılan terimlere ***monom*** denir.)

Yukarda bulduğumuz katsayıları ve fazlasını altalta yazalım:

$$
\begin{array}{llllllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \\
1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 36 & 9 & 1
\end{array}
$$

Adına ***Pascal üçgeni*** denilen bu üçgen nasıl oluşturuluyor? Dikkat ederseniz, üçgenin her sayısı bir üstündeki ve bir üstündekinin hemen solundakini sayıların toplamı. Örneğin, en alt satırdaki 84 sayısı bir üst satırdaki 28 ile 56'nın toplamıdır.

Bu üçgene bakarak $(x + y)^9$ teriminin açılımını uzun uzun hesaplara girişmeden bulabiliriz:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^9 = x^9 &+ 9x^8y + 36x^7y^2 + 84x^6y^3\\
&+ 126x^5y^4 + 126x^4y^5 + 84x^3y^6\\
&+ 36x^2y^7 + 9xy^8 + y^9.
\end{aligned}
$$

Şimdi monomların önündeki sayıların neye eşit olduklarını bulalım. $(x + y)^n$ teriminin açılımında kaç tane x^iy^j monomu belirdiğini hesaplamak istiyoruz. $(x + y)^n$ terimini açarken, $x + y$'yi kendisiyle n kez çarpıyoruz, yani

$$(x + y)(x + y)(x + y) .. (x + y)(x + y)$$

işlemini yapıyoruz. Kendimizi çarpımı yapıyormuş gibi düşleyelim. Çarpım işlemine giriştiğimizde sonuç olarak yaptığımız şey, yukardaki her parantezden x ve y'den birini seçmek ve seçtiklerimizi birbirleriyle çarpmak. Olası tüm seçimleri yaptığımızı da unutmayalım. Sözgelimi her parantezden x seçersek, bu x'leri çarparak x^n monomunu buluruz. Biri dışında her parantezden x seçersek, x'i $n–1$ kez, y'yi de bir kez seçmiş olur ve bu seçimlerinizi çarparak $x^{n–1}y$ monomunu buluruz. İkisi dışında her parantezden x seçersek $x^{n–2}y^2$ monomunu buluruz. Eğer x'i i kez seçerseniz, y'yi mecburen $n–i$ kez seçmiş olur ve çarpım olarak $x^iy^{n–i}$ monomunu buluruz. Demek ki $(x + y)^n$ teriminin açılımda kaç tane x^iy^j monomu belirdiğini hesaplamak için n parantez arasından kaç değişik biçimde i'yi seçebileceğimizi hesaplamamız gerekiyor. Toplam n parantez var ve bu n tane parantezden (x ve y arasından x'i seçeceğimiz) i tanesini seçeceğiz. Toplam kaç seçimimiz olduğunu geçen yazımızda görmüştük: Böyle bir seçimi

$$\binom{n}{i}$$

değişik biçimde yapabiliriz. Demek ki, sözgelimi,

$$
\begin{aligned}
(x+y)^6 = \binom{6}{6}x^6 + \binom{6}{5}x^5y + \binom{6}{4}x^4y^2 + \binom{6}{3}x^3y^3\\
+ \binom{6}{2}x^2y^5 + \binom{6}{1}xy^5 + \binom{6}{0}y^6,
\end{aligned}
$$

yani ("6 seç i" hesaplarını yaparak, yukardaki üçgene bakarak değil!)

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^5 + 6xy^5 + y^6.$$

Daha genel olarak,

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \binom{n}{n-2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-i}x^{n-i}y^i + \ldots + y^n$$

eşitliği, yani,

$$(x+y)^n = \sum\nolimits_{i=0}^{n} \binom{n}{n-i}x^{n-i}y^i$$

eşitliği geçerlidir. $n - i$ yerine i yazarsak, bu toplam,

$$(x+y)^n = \sum\nolimits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}x^i y^{n-i}$$

biçimini alır. Böylece, $(x + y)^n$ teriminin açılımındaki monomların katsayılarını bulmuş olduk.

Yukardaki eşitlikten dolayı, "n seç i" sayılarına ***binom katsayıları*** adı verilir.

Eğer x ve y'ye çeşitli değerler verirsek, binom katsayıları arasında ilginç eşitlikler buluruz. Örneğin $x = y = 1$ alırsak,

$$\sum\nolimits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik başka türlü de kanıtlanır: n elemanlı kümenin altküme sayısı bir yandan 2^n'dir, öte yandan i elemanlı altküme sayısı "n seç i" sayısı olduğundan altküme sayısı "n seç i"lerin toplamıdır.

Eğer $x = -1$, $y = 1$ alırsak,

$$\sum\nolimits_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$$

buluruz, ki bu eşitlik de aynen, bir kümenin çift sayıda elemanı olan altküme sayısının, tek sayıda elemanı olan altküme sayısına eşit olduğunu söyler.

$x = 2$, $y = -3$ alınarak bulunacak tuhaf eşitlikleri bulmayı okura bırakıyoruz. Ayrıca y yerine $-y$ alarak,

$$(x-y)^n = \sum\nolimits_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

türden eşitlikler de bulunabilir.

Pascal üçgenindeki her sayının bir üstteki ve onun hemen solundaki sayının toplamı olduğunu söylemiştik. Binom katsayıları olarak ifade edildiğinde, bu, her $1 \le i < n$ için,

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$$

anlamına gelir. Bu eşitliği hemen kanıtlayalım:

$$\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} = \frac{(n-1)!}{i!\,(n-1-i)!} + \frac{(n-1)!}{(i-1)!\,(n-i)!}$$

$$= \frac{(n-i)(n-1)!}{i!\,(n-i)!} + \frac{i(n-1)!}{i!\,(n-i)!} = \frac{(n-i)(n-1)! + i(n-1)!}{i!\,(n-i)!}$$

$$= \frac{n(n-1)! - i(n-1)! + i(n-1)!}{i!\,(n-i)!} = \frac{n(n-1)!}{i!\,(n-i)!} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

$$= \binom{n}{i}.$$

Pascal üçgeninin daha binlerce özelliği vardır. Örneğin, Pascal üçgeninden şöyle bir altıgen alalım:

$$\begin{array}{ccc} 35 & 21 & 7 \\ 70 & 56 & 28 \\ 126 & 126 & 84 \end{array}$$

Dikkatli okur mutlaka,

$$35 \times 28 \times 126 = 21 \times 70 \times 84$$

eşitliğinin farkına varmıştır. (Çok komikti bu!) Buna benzer eşitlik bu türden seçilmiş tüm altıgenler için doğrudur, yani her $1 \le i < n$ için,

$$\binom{n-1}{i-1}\binom{n}{i+1}\binom{n+1}{i} = \binom{n-1}{i}\binom{n}{i-1}\binom{n+1}{i+1}.$$

Şimdi beklenmedik bir şey yapacağız. i-inci binom katsayısına bir daha bakalım:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}.$$

Eşitliğin en sağına bakarsak, "n seç i"yi değişkeni n olan bir polinom olarak görebileceğimizi görürüz! Nitekim n yerine X koyarsak, her i doğal sayısı için,

$$\binom{X}{i} = \frac{X(X-1)\ldots(X-i+1)}{i!}$$

polinomunu tanımlamış oluruz. Bu polinomda X yerine i'den büyük bir n tamsayısı koyduğumuzda, eski binom katsayılarını tekrar buluruz. Bu polinomun derecesinin i olduğuna ve katsayılarının kesirli sayılar olduğuna dikkatinizi çekerim. Şimdi soru şu: Daha önce kanıtladığımız

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$$

eşitliği acaba polinomlar için geçerli mi, yani,

$$\binom{X}{i} = \binom{X-1}{i} + \binom{X-1}{i-1}$$

eşitliği doğru mu? Evet. Çünkü bu eşitliğin iki tarafında birer polinom var ve bu polinomlar sonsuz tane doğal sayı için (i'den büyük her n doğal sayısında) aynı değerleri alıyorlar; bu koşulda iki polinom birbirine eşittir. Nitekim, eğer sonsuz tane x sayısı için $p(X)$ ve $q(X)$ polinomları aynı değeri alıyorsa, o zaman $p(X) - q(X)$ polinomu sonsuz tane x sayısı için 0 değerini alır, ama sıfır polinomu olmayan her polinom ancak derecesi kadar x için 0 değerini alabilir (MD-2004-II, sayfa 29, Sonuç 4); demek ki $p(X) - q(X) = 0$ ve $p(X) = q(X)$. Dolayısıyla,

$$\binom{X}{i} = \binom{X-1}{i} + \binom{X-1}{i-1}$$

eşitliği geçerlidir. Bundan da her r gerçel sayısı için,

$$\binom{r}{i} = \binom{r-1}{i} + \binom{r-1}{i-1}$$

eşitliği geçerlidir! Hatta aynı eşitlik her r karmaşık sayı için de geçerlidir.

Hoş bir şey yaptık: Doğal sayılar için geçerli olan bir eşitliği tüm gerçel sayılara genelleştirdik. Sanırım okur yukardaki yöntemin genel bir yöntem olduğunu anlamıştır. Tamamen aynı yöntemle, her r gerçel (ya da karmaşık) sayısı için,

$$\binom{r-1}{i-1}\binom{r}{i+1}\binom{r+1}{i} = \binom{r-1}{i}\binom{r}{i-1}\binom{r+1}{i+1}$$

eşitliğinin geçerli olduğunu okur kanıtlayabilir.

Asala Bölünme. Binom katsayılarının çok önemli bir başka özelliğine geçelim:

Teorem. *Eğer p bir asal, $n > 0$ bir doğal sayı ve $i = 1, 2, ..., p^n - 1$ ise,*

$$\binom{p^n}{i}$$

sayısı p'ye bölünür. Dolayısıyla her x, y doğal sayısı için, $(x + y)^{p^n} \equiv x^{p^n} + y^{p^n} \pmod p$.

Kanıt: Teoremi önce $n = 1$ olduğu durumda kanıtlayalım. Bunun için

$$\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!}$$

eşitliğine dikkatlice bakmak yeterli: i ve $p-i$ sayıları p'den küçük olduklarından, paydada, paydaki p'yi sadeleştirecek bir p bulunmaz. Doılayısıyla p, "p seç i" sayısını böler.

Şimdi teoremin n için doğru olduğunu varsayıp $n + 1$ için kanıtlayalım. Teoremin n için doğru olduğunu varsaydığımızdan, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ halkasında,

$$(X + 1)^{p^n} = X^{p^n} + 1$$

ve teoremi $n = 1$ için kanıtladığımızdan, her $f(X) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ için,

$$(f(X) + 1)^p = f(X)^p + 1.$$

eşitlikleri geçerlidir.

Bir Asal $n!$'i Kaç Böler?

p bir asal sayı olsun. p'nin $n!$ sayısını bölen en büyük gücünü hesaplayalım, yani p'nin p^k gücünün $n!$'i böldüğü ama p^{k+1}'nin bölmediği k sayısını bulalım. Bu k sayısı $\mathrm{val}_p(n!)$ olarak gösterilir.

$n! = 1 \times 2 \times ... \times n$ olduğundan, p'nin n'den küçükeşit sayıları kaç kez böldüğünü hesaplayıp bunları toplamalıyız.

n'den küçükeşit ve p'ye bölünen $[n/p]$ tane sayı vardır: $p, 2p, 3p, ..., [n/p]p$; çünkü p'nin katı olan bir sonraki sayı n'den büyüktür ve dolayısıyla n'yi bölemez. (Burada $[n/p]$, n/p'nin tam kısmıdır, yani $[n/p] \leq n/p < [n/p] + 1$ eşitsizliklerini sağlayan doğal sayıdır.)

p'nin $[n/p]$ tane olan katlarını sayarsak p^2'yi ve çarpımlarını n'yi bir kez bölüyormuş gibi hesaplarız ve hesabımız eksik kalır. Dolayısıyla n'yi bölen p^2'nin katlarını da saymalıyız. Bunlardan da $[n/p^2]$ tane var. Böylece $[n/p] + [n/p^2]$, n'den küçükeşit ve p ya da p^2'ye tam bölünen sayıların sayısıdır. Ama daha p^3'e bölünenler var... Sonuç olarak,

$$\mathrm{val}_p(n!) = [n/p] + [n/p^2] + [n/p^3] + [n/p^4] + ...$$

dır, yani $p^{\mathrm{val}_p(n!)}$ sayısı $n!$'i böler ama $p^{\mathrm{val}_p(n!)+1}$ sayısı $n!$'i bölmez.

Bu iki bilgiden teoremin $n + 1$ için doğru olduğu çıkacak. $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ halkasında hesaplayalım:

$$(X + 1)^{p^{n+1}} = ((X + 1)^{p^n})^p = (X^{p^n} + 1)^p$$
$$= (X^{p^n})^p + 1 = X^{p^{n+1}} + 1.$$

Öte yandan,

$$(X+1)^{p^{n+1}} = \sum_{i=0}^{p^{n+1}} \binom{p^{n+1}}{i} X^i.$$

Son iki eşitlikten, $i = 1, 2, ..., p^{n+1} - 1$ için, p'nin

$$\binom{p^{n+1}}{i}$$

sayısını böldüğü çıkar. ♠

Alıştırmalar

1. "n seç i" sayılarını en büyük yapan i'yi bulun.

2. $(X + Y + Z)^n$ polinomunda $X^iY^jZ^k$ teriminin katsayısını hesaplayın. (Burada, $i + j + k = n$.)