
Kapak Konusu: Sayma

# Ayrı Düşen Çiftler

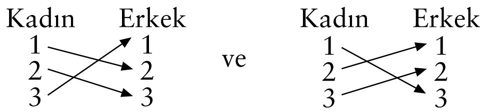
Başak Ay* / *aybasak79@yahoo.com*

Tipik bir sayma problemini ele alacağız bu yazıda: $n$ tane çift bir baloya davet ediliyor. Eşlerin birbiriyle dans etmediği kaç değişik eşleşme vardır?

Örneğin $n = 3$ ise, çiftleri 1, 2, 3 diye numaralandırıp $i$ numaralı çiftin kadın ve erkeğine sırasıyla $k_i$, $e_i$ diyelim. O zaman,

$$k_1\text{-}e_2,\ k_2\text{-}e_3,\ k_3\text{-}e_1 \text{ ve } k_1\text{-}e_3,\ k_2\text{-}e_1,\ k_3\text{-}e_2$$

olmak üzere iki değişik eşleşme mümkündür. ($k_i$ ile $e_i$ dans edemezler.) Bu iki eşleşmeyi




olarak gösterebiliriz. Bunları da (gene sırasıyla)

(123) ve (132)

olarak gösterebiliriz. Buradaki, örneğin, (123),

birinci kadın $k_1$ ikinci erkek $e_2$ ile,
ikinci kadın üçüncü erkekle,
üçüncü kadın birinci erkekle

eşleşecek (dans edecek) anlamına gelir.

Eğer $n = 1$ ise, yani bir tek çift varsa böyle bir eşleşme olamaz elbette. Eğer $n = 2$ ise bu özelliği sağlayan sadece bir tek eşleşme olabilir: Her çiftin erkeği diğer çiftin kadınıyla dans eder.

Şimdi $n = 4$ olsun. Çiftlerin birbirleriyle eşleştirilmedikleri eşleşmeleri teker teker yazalım:

(1234), (1243), (1324)
(1342), (1423), (1432)
(12)(34), (13)(24), (14)(23).

Bu sefer toplam 9 eşleme bulduk. Örneğin (1234),

birinci kadın ikinci erkekle,
ikinci kadın üçüncü erkekle,
üçüncü kadın dördüncü erkekle
dördüncü kadın birinci erkekle

eşleşecek anlamına gelir. Öte yandan (12)(34),

birinci kadın ikinci erkekle,
ikinci kadın birinci erkekle,
üçüncü kadın dördüncü erkekle
dördüncü kadın üçüncü erkekle

eşleşecek anlamına gelir.

Her çifte yukardaki gibi bir sayı verirsek ve

$$f(i) = j$$

eşitliğini, "$i$ sayılı çiftin kadını, $j$ sayılı çiftin erkeğiyle eşleşecek" olarak yorumlarsak, o zaman,

$$\{1, 2, ..., n\}$$

kümesinin, her $i = 1, 2, ..., n$ sayısı için,

$$f(i) \neq i$$

koşulunu sağlayan $f$ eşleşmelerinin (yani birebir ve örten fonksiyonlarının) sayısını bulmak istediğimiz anlaşılır.

$\{1, 2, ..., n\}$ kümesinin eşleşmeleri Sym($n$) olarak simgelenir. Sym($n$)'nin toplam $n!$ tane elemanı vardır. Örneğin Sym(5)'in

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

tane elemanı vardır. İşte bu elemanlar:

- Özdeşlik fonksiyonu: $\mathrm{Id}_5$. Bu eşleşme her sayıyı kendisine götürür.
- (12) eşleşmesi: 1'i 2'ye, 2'yi 1'e götürür; ama 3 ve 4'ü yerlerinden oynatmaz. Buna benzer (13), (14), (15), (23), (24), (25), (34), (35) ve (45) eşleşmeleri de vardır. Görüldüğü gibi bu türden toplam 10 tane vardır. Üç sayı sabitlediklerinden bu tür eşleşmelerle ilgilenmiyoruz.
- (123) eşleşmesi: 1'i 2'ye, 2'yi 3'e, 3'ü 1'e götürür ve 4'ü sabitler. Buna benzer, (124), (125), (132), (134), (135), (142), (143), (145), (152), (153), (154), (234), (235), (243), (245), (253), (254), (345) ve (354) olmak üzere toplam 20 tane eşleşme vardır. İki sayı sabitlediklerinden bu tür eşleşmelerle ilgilenmiyoruz.
- (1234) eşleşmesinin ne yaptığı artık belli olmuş olmalı. Bu eşleşme 5'i sabitler. Bu türden toplam

$$\binom{5}{4} \times 3! = 5 \times 6 = 30$$

tane eşleşme vardır. Bir sayı sabitlediklerinden bu eşleşmelerle de ilgilenmiyoruz.

- (12345) türünden $4! = 24$ tane vardır. Bunlar hiç sayı sabitlemediklerinden bu eşleşmeler bizim istediğimiz türden; bunlarla ilgileniyoruz.
- Gelelim (12)(345) türünden eşleşmelere... Bunlardan,

---

* Florida Atlantik Üniversitesi doktora öğrencisi.

$$\binom{5}{2}\times 2 = 20$$

tane eşleşme vardır. Bunlar da hiç sayı sabitlemezler, yani bu eşleşmeler bizim aradıklarımızdan.

- Son olarak, (12)(34) türünden

$$\binom{5}{2}\binom{3}{2}/2 = 10\times 3/2 = 15$$

tane eşleşme vardır. Bunlar bir sayı sabitlediklerinden, bunlarla da ilgilenmiyoruz.

Toplam,

$$1 + 10 + 20 + 30 + 24 + 20 + 15 = 120 = 5!$$

tane eşleşme bulduk; olması gerektiği kadar. Ama bu 120 eşleşmenin sadece 24 + 20 = 44 tanesi (sadece (12345) ve (12)(345) türünden olanlar) hiç kimsenin kendi eşiyle dans etmediği bir eşleşme veriyor.

Şimdi $n = 6$ ise bu türden kaç eşleşme olduğunu hesaplayalım:

- (12)(34)(56) türünden

$$\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!} = \frac{15\times 6\times 1}{6} = 15$$

tane vardır. (Neden 3!'e böldüğümüzü anladınız mı? Yoksa (12)(34)(56) eşleştirmesini 3! kez saymış olurduk.)

- (123)(456) türünden

$$\frac{\binom{6}{3}\times 2\times\binom{3}{3}\times 2}{2!} = \frac{20\times 2\times 1\times 2}{2} = 40$$

tane eşleşme vardır.

- (12)(3456) türünden

$$\binom{6}{2}\times 3! = 15\times 6 = 90$$

tane eşleşme vardır.

- (123456) türünden 5! = 120 tane vardır.

Diğerlerinin hepsi en az bir sayı sabitlediğinden başka da yoktur. Böylece çiftlerin birbirleriyle dans etmediği toplam 15 + 40 + 90 + 120 = 265 eşleşme buluruz.

Bulduklarımızı yazalım:

$n = 1$ için 0 eşleşme
$n = 2$ için 1 eşleşme
$n = 3$ için 2 eşleşme
$n = 4$ için 9 eşleşme
$n = 5$ için 44 eşleşme
$n = 6$ için 265 eşleşme.

0, 1, 2, 9, 44, 265, ... Tuhaf bir dizi. Formülü bulana aşkolsun! Formülü değil ama bir sonraki sayıyı bulacağız! Bunu nasıl becereceğimizi okuyan görecektir.

**Matematik.** Matematiğe başlayalım. Her $i = 1, ..., n$ sayısı için,

$$A_i = \{\alpha \in \text{Sym}(n) : \alpha(i) = i\}$$

olsun; yani $A_i$, $i$'yi sabitleyen eşleşmeler kümesi. Demek ki,

$$\text{Sym}(n) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

kümesinin eleman sayısını bulmak istiyoruz. Dolayısıyla,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

kümesinin, yani

$$A_1 \cup ... \cup A_n$$

kümesinin eleman sayısını bulmamız yeterli olacak.

Her bir $i$ için $A_i$ kümesinin eleman sayısını bulmak oldukça kolay: $A_i$'nin elemanlarının $i$'yi $i$'ye götürdüklerini bildiğimizden, bu elemanları $n - 1$ elemanlı $\{1, 2, ..., n\} \setminus \{i\}$ kümesinin eşleşmeleri olarak görebiliriz. Bunlardan da $(n - 1)!$ tane olduğundan,

$$|A_i| = (n - 1)!$$

dir.

Aynen yukarda olduğu gibi, eğer $i \neq j$ ise,

$$|A_i \cap A_j| = (n - 2)!$$

dir, çünkü $A_i \cap A_j$ kümesinin elemanları $i$ ve $j$ sayılarını sabitleyen eşleşmeler olduğundan, bu eşleşmeleri $n - 2$ elemanlı $\{1, 2, ..., n\} \setminus \{i, j\}$ kümesinin eşleşmeleri olarak görebiliriz ve bunlardan da $(n - 2)!$ tane vardır.

Genel olarak, eğer $i_1, ..., i_k \in \{1, 2, ..., n\}$ birbirinden değişik $k$ sayıysa,

$$|A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}| = (n - k)!$$

dir.

Demek ki $A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}$ kümelerinin eleman sayılarını biliyoruz ve $A_1 \cup ... \cup A_n$ kümesinin eleman sayısını bulmak istiyoruz.

Eğer $n = 2$ ise bunu bulmak oldukça kolay:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Eğer $n = 3$ ise,

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_2| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.\end{aligned}$$

Bu formülü $n$ tane küme için genelleştirebiliriz: $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$ sayısını bulmak için

$$|A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}|$$

sayılarını toplayıp çıkarırız; eğer $k$ çiftse çıkarır, tekse toplarız:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i_1, ..., i_k} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}|.$$

Yukardaki toplam her $k = 1, ..., n$ ve birbirinden değişik her $i_1, ..., i_k \in \{1, 2, ..., n\}$ sayıları içindir. Ama daha önce $|A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}| = (n - k)!$ eşitliğini bulmuştuk. Demek ki,

$$|\cup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i_1, \ldots, i_k} (-1)^{k+1}(n-k)!$$

Kaç tane birbirinden değişik $i_1, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ seçebiliriz? Elbette,

$$\binom{n}{k}$$

tane. Demek ki formülümüz,

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)!$$

şeklini alır. Ama,

$$\binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)! = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Dolayısıyla,

Şimdi aradığımız yanıtı (yani birbiriyle eşleş-

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}.$$

meyen eşleştirme sayısını) bulmak için bu sayıyı $n!$ sayısından çıkarmalıyız. İşte aradığımız formül:

Formülümüzü $n = 5$ için sınayalım. Yukarda

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

44 tane eşleşme bulmuştuk. Bakalım formül kaç verecek? Eğer şanslı bir günümüzdeysek aynı sonucu bulmamız gerekiyor:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{5} (-1)^k \frac{5!}{k!} &= \frac{5!}{0!} - \frac{5!}{1!} + \frac{5!}{2!} - \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{4!} - \frac{5!}{5!}\\ &= 5! - 5! + 5\times4\times3 - 5\times4 + 5 - 1\\ &= 120 - 120 + 60 - 20 + 5 - 1 = 44.\end{aligned}$$

**Rastgele Eşleştirme.** Çiftleri rastgele eşleyip hiçbir eşin birbiriyle dans etmeme olasılığını hesaplayalım. $n$ tane çifti $n!$ biçimde eşleştirebiliriz. Bu $n!$ eşleştirmenin

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

tanesinde çiftler birbirleriyle dans etmiyorlar. Demek ki olasılığımız,

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

dır.

Bu olasılık öyle rastgele bir sayı değildir. Eğer $n$'yi sonsuza götürürsek bu olasılığın **Euler sabiti** adı verilen $e$ sayısının tersine yakınsadığını görürüz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k/k! = 1/e.$$

Demek ki eğer $n$ büyük bir sayıysa, rastgele bir eşleştirmenin eşlerden hiçbirini diğeriyle eşleştirmeme olasılığı aşağı yukarı $1/e$'dir. Dolayısıyla, büyük $n$'ler için, eşleri birbirleriyle eşleştirmeyen eşleşme sayısı aşağı yukarı $n!/e$'dir. Örneğin, hesap makinasıyla kolayca hesaplanacağı üzere,

$4!/e \approx 8{,}829107 \approx 9$

$5!/e \approx 44{,}14553 \approx 44$

$6!/e \approx 264{,}8732 \approx 265.$

Görüldüğü gibi $n = 4$, 5 ve 6 için $n!/e$ sayıları bizim bulduğumuz 9, 44 ve 265 sayılarına çok yakınlar.

Eğer $n = 7$ ise, $7!/e \approx 1864{,}112$. Dolayısıyla $n = 7$ için 1864 tane eşlerin birbirleriyle eşleşmediği eşleşme olduğunu umut edebiliriz. Saymadan saydığımızı farkettiniz mi? ♠

## Yanlış Yöntem Doğru Yanıt!

"Herkesin kendi eşi dışında bir eş seçme olasılığı $(1 - 1/n)$'dir. Toplam $n$ kişi olduğuna göre, istediğimiz durumun olasılığı $(1 - 1/n)^n$ dir; bu da sonsuzda $1/e$'ye yakınsar" akıl yürütmesi doğru yanıtı verir ama yanlıştır. Çünkü olaylar bağımsız değildir: Eğer $A$, $B$ ile eşleşmişse, $C$, $B$ ile eşleşemez.

## Euler Sayısı

$e$ sayısı ***Euler sayısı*** olarak bilinir. Aynen $\pi$ gibi doğanın bir sabitidir. Yaklaşık değeri

$$e \approx 2{,}718281828459045235$$

dir. Bu sayı matematikte birçok değişik yerde karşımıza çıkar. Bu da doğallığının bir kanıtıdır. Çok bilinen şu eşitlik bile başlı başına kaydadeğerdir: Her $x$ gerçel (ya da karmaşık) sayısı için,

$$e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \ldots$$

Bu sayıya ***Euler sayısı*** denmesinin nedeni İsviçreli ünlü matematikçi Leonard Euler'dir. Her ne kadar sayı Euler'den önce biliniyorsa da, sayının temel özelliklerini içeren çok kapsamlı bir makaleyi ilk yazan Euler'dir. Euler bu makalesinde metindeki

$$1 - 1/2! + 1/3! - 1/4! + \ldots$$

serinin $e^{-1}$'e yakınsadığını göstermiştir. Ayrıca gene aynı makalesinde De Moivre'nin ünlü

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

formülünden faydalanarak

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

eşitliğini göstermiştir. Ayrıca bu formülde $x = \pi$ alarak, matematiğin gelmiş geçmiş en güzel formüllerinden biri olarak nitelendirilen ve analizi ($e$), geometriyi ($\pi$), cebiri ($i$) ve aritmetiği ($-1$) buluşturan, gizemli

$$e^{i\pi} = -1$$

formülüne dikkatimizi çekmiştir.