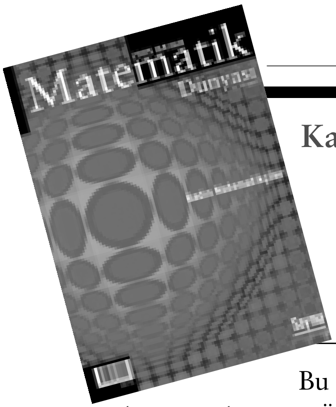


Kapak Konusu: Sayma

Catalan Sayıları

Selin Enüst Çalışkan* / *selincaliskan@gmail.com*

Bu yazımızda Catalan sayılarından sözedeceğiz. Önce birkaç problem sıralayıp bunların her birinin çözümünün Catalan sayılarını verdiğini göstereceğiz. Daha sonra Catalan sayılarının nasıl hesaplanacağını göreceğiz.

Problem 1. Sıralı Çarpım Sayısı. $n + 1$ tane sayı belli bir sırayla verilmiş. Bu sayıları, sıralarını değiştirmeden kaç değişik şekilde çarpabiliriz? $0 \leq n \leq 4$ için yanıtlar şöyle:

$n = 0$. Tek bir sayı verilmiş, a. Yanıt 1'dir. (Hiç çarpma yapmadığımızdan bazı okurlar haklı olarak yanıtın 0 olması gerektiğini düşünebilir. Üstünde durmayıp bir sonraki örneğe geçsin bu okurlar.)

$n = 1$. Bu sefer iki sayı verilmiş: sırasıyla a ve b. Bu iki sayıyı bu sırayla tek bir biçimde çarpabiliriz: $a{\cdot}b$. Yanıt gene 1'dir.

$n = 2$. Üç sayımız var: a, b ve c. İki değişik biçimde çarpabiliriz: $(a{\cdot}b){\cdot}c$, $a{\cdot}(b{\cdot}c)$. Yanıt bu sefer 2.

$n = 3$.· Sayılarımıza sırasıyla a, b, c ve d diyelim. İşte yapabileceğimiz değişik işlemler:

$((a{\cdot}b){\cdot}c){\cdot}d$, $(a{\cdot}b){\cdot}(c{\cdot}d)$, $(a{\cdot}(b{\cdot}c)){\cdot}d$,
$a{\cdot}((b{\cdot}c){\cdot}d)$, $a{\cdot}(b{\cdot}(c{\cdot}d))$.

Yanıt 5'tir.

$n = 4$. Sayılarımıza a, b, c, d ve e diyelim.

$(((a{\cdot}b){\cdot}c){\cdot}d){\cdot}e$, $((a{\cdot}b){\cdot}c){\cdot}(d{\cdot}e)$, $((a{\cdot}b){\cdot}(c{\cdot}d)){\cdot}e$,
$(a{\cdot}b){\cdot}((c{\cdot}d){\cdot}e)$, $(a{\cdot}b){\cdot}(c{\cdot}(d{\cdot}e))$, $((a{\cdot}(b{\cdot}c))d){\cdot}e$,
$(a{\cdot}(b{\cdot}c)){\cdot}(d{\cdot}e)$, $(a{\cdot}((b{\cdot}c){\cdot}d)){\cdot}e$, $(a{\cdot}(b{\cdot}(c{\cdot}d))){\cdot}e$,
$(a{\cdot}(((b{\cdot}c){\cdot}d){\cdot}e)$, $a{\cdot}((b{\cdot}c){\cdot}(d{\cdot}e))$, $a{\cdot}((b{\cdot}(c{\cdot}d)){\cdot}e)$,
$a{\cdot}(b{\cdot}((c{\cdot}d){\cdot}e))$, $a{\cdot}(b{\cdot}(c{\cdot}(d{\cdot}e)))$.

Bu sefer yanıt 14.

Verilen her n sayısı için çözüm sayısını n'ye bağlı olarak veren bir formül bulmak istiyoruz. Bulmak istediğimiz bu sayıya ***Catalan sayısı*** denilir.

Problem 2. Dengelenmiş Parantezler. Diyelim elimizde n açan ve n kapatan parantez var ve bu parantezlerin kaç "dengeli" şekilde gruplanabileceğini bulmak istiyoruz. Burada "dengeli"den kastımız her açılan parantezin bir parantez tarafından kapatılması. Örneğin (()()) dengeli bir gruplamadır, öte yandan ())()(dengeli bir gruplama değildir. Aşağıdaki $0 \leq n \leq 4$ için bütün olasılıkları görüyoruz.

$n = 0$. Hiç parantez yazmamanın tek bir yolu vardır. Yanıt 1'dir.

$n = 1$. Parantezi açıp kapatmalıyız: (). Yanıt 1.

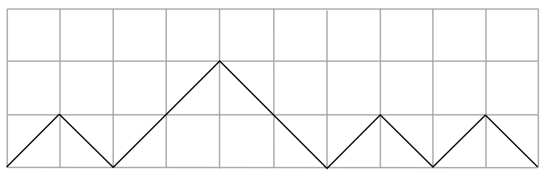
$n = 2$. Yanıt 2: ()(), (()).

$n = 3$. Yanıt 5: ()()(), ()(()), (())(), (()()), ((()))

$n = 4$. Yanıt 14: ()()()(), ()()(()), ()(())(), ()(()()), ()((())), (())()(), (())(()), (()())(), ((()))(), (()()()), (()(())), ((())()), ((()())), (((()))).

Bu problem yukarıda verdığimiz çarpma sayılarını bulma problemine denktir, yani biri çözüldü mü diğeri de çözülür. Bunu görmek için, herhangi bir çarpma sırasını alıp önce en başa bir açan parantez ve en sona bir kapatan parantez koyalım; sonra noktalar ve kapatan parantezler dışında her şeyi silelim; son olarak, noktaları açan parantezlerle değiştirelim. Bu işlem bize dengeli bir parantez gruplaması verecektir. Örnek olarak $(a{\cdot}b){\cdot}c$ çarpımını alalım. Bunu, önce, $((a{\cdot}b){\cdot}c)$ olarak yazalım. Harfleri ve açık parantezleri sildiğimizde ·)·) elde ederiz. Şimdi noktaları açık parantezlerle değiştirirsek ()() dengeli parantez grubunu elde ederiz. Bu işlemi geriye alıp dengeli parantezlerden sıralı bir çarpma bulabiliriz. Bu durumda dengeli parantezlerle çarpım sıraları arasında birebir bir eşleme olduğundan, iki problemin çözümleri birbirine eşittir.

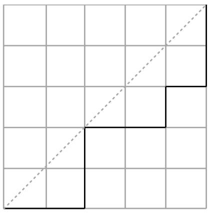
Problem 3. Sıradağlar Problemi. Problem, n tane aşağı eğimli çizgi ve n tane yukarı eğimli çizgi kullanarak başlangıç çizgisinin üstünde kalan kaç tane dağ sırası oluşturulabileceğini bulmak.



Problem 4. New York Adres Problemi. Şimdi de $n \times n$'lik bir ızgara üzerinde - ki bunu New York

* Georgia Institute of Technology'de doktora öğrencisi.

şehrinin sokak ve cadde haritası olarak düşünebilirsiniz - (0, 0) noktasından başlayıp, hep sağa ve yukarı (kuzeye ve doğuya) giderek (n, n) noktasında biten ve hep köşegenin altında kalan yolların sayısını bulmak istiyoruz. Aşağıda böyle bir yola örnek görüyoruz.

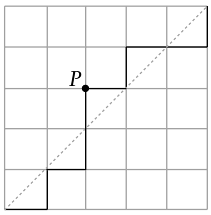


Bu sorunun yukarıda verdiğimiz dağ sıraları problemine denk olduğunu görmeye çalışın. Aynı şekilde bu problem dengeli parantezlerin ve çarpım sayılarının sayısını buldugumuz problemlere de denktir. Mesela sağa bir birim hareket "(" ile ve yukarı bir birim hareket ")" ile değiştirilirse, yukarıdaki gibi bir yol dengeli bir paranteze denk gelir.

Problemlerin Çözümü. Verdiğimiz bütün problemlerin birbirine denk olduğuna göre, bunların hepsini çözmek için birine çözüm bulmak yeterlidir.

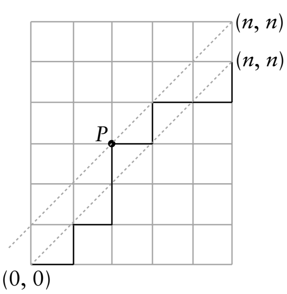
En son problemi ele alalım.

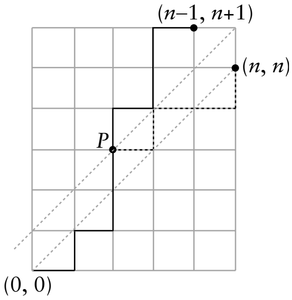
$n \times n$'lik bir ızgara üzerinde (0, 0)'dan (n, n)'ye giden ve köşegenin altında kalan kuzeydoğu yollarını sayalım. Bunun için, (0, 0) noktasından başlayıp hep kuzeydoğuya giden ve (n, n) noktasında biten yolların sayısını bulup, bunlardan köşegeni aşanların sayısını çıkaralım. Köşegeni aşan yollara "kötü yol" diyelim. Bu kötü yolların her biri köşegenin bir noktada üstüne çıkarlar. Aşağıdaki şekilde bir kötü yol örneği görüyorsunuz.



Bu kötü yolun köşegenin üstüne çıktığı ilk noktayı P ile gösterelim ve, bir sonraki şekilde gösterildiği gibi, yolu P'den itibaren P'den geçen köşegene göre yansıtalım.

P noktası kötü yolun köşegenin üstüne çıktığı ilk nokta olduğundan, P noktasına gelene kadar sağa doğru atılan adımların sayısı k ise, yukarı doğru atılan adımların sayısı k+1 olacaktır. Toplam n tane sağa ve n tane yukarı adım olduğundan, geri kalan adımların $n - k$ tanesi sağa ve $n - k - 1$ tanesi ise yukarı olmalıdır. Ama yolumuzu P noktasından itibaren yansıttığımızdan, yansıtılmış yolda toplam $k + (n - k - 1) = n - 1$ sağa adım ve $(k + 1) + (n - k) = n + 1$ yukarı adım olacaktır. Böylece her yansıtılmış yol $(n - 1, n + 1)$ noktasında bitecektir.





Her kötü yol, bu şekilde, (0, 0) noktasında başlayıp $(n - 1, n + 1)$ noktasında biten bir yola dönüşür. Aynı şekilde, bu tip her yol bir kötü yola denk gelir. Demek ki kötü yolların sayısı (0, 0) noktasında başlayıp $(n - 1, n + 1)$ noktasında biten yolların sayısına eşittir. Bu tip yollarda $n - 1$ tane sağa adım $n + 1$ tane de yukarı adım olduğundan bu sayı,

$$\binom{2n}{n-1}$$

dir. (0, 0) noktasından başlayıp, hep sağa ve yukarı giderek (n, n) noktasında biten bütün yolların sayısı ise,

$$\binom{2n}{n}$$

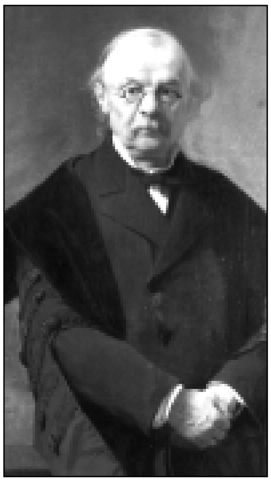
dir. Bu durumda bizim istediğimiz sayı,

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

dir. Bu sayıya ***Catalan sayısı*** denilir ve genelde C_n simgesiyle gösterilir.

Catalan Sayıları Doğuran Fonksiyonlarla Bulmak. Şimdi, Catalan sayılarını doğuran fonksiyonlardan yararlanarak nasıl bulabileceğimizi görelim. İşe Catalan sayılarını veren tümevarımsal bir ilişki bulmakla başlayalım. Herhangi bir n için C_n sayısını $C_0, C_1, ..., C_{n-1}$ sayıları cinsinden veren bir formül bulacağız. Bunun için dengeli parantezler problemindeki formülasyonu kullanacağız. Hatırlarsak n çift açan ve kapatan parantez kullanarak elde edilebilecek dengeli parantezlerin sayısı Catalan sayısı C_n'ye eşitti.

Dikkat edersek herhangi bir dengeli parantez grubu herzaman bir '(' işareti ile başlar ve bu pa-



Belçikalı matematikçi Eugène Charles Catalan (1814-1894)

rantez grubunun içinde bir yerde bu işarete karşılık gelen bir ')' işareti olmalıdır. Dengeli parantez grubumuzda bu bir çift parantezin arasında kalan parantez grubunu A geri kalan parantez grubunu B ile gösterirsek orijinal parantez grubumuz şu şekilde yazılabilir: $(A)B$.

Burada A ve B grupları de kendi içlerinde birer dengeli parantez grubu oluşturmalıdır ve eğer orijinal parantez grubumuz n çift parantezden oluşuyorsa A ve B grupları toplamda $n-1$ çift parantez içermelidir. Yani A, k tane parantez çifti içeriyorsa B, $n-k-1$ tane parantez çifti içermelidir ($0 \le k \le n-1$). A'nın 0, B'nin $n-1$ çift parantezden oluştuğu konfigürasyonların sayısı C_0C_{n-1} şeklinde verilir. Aynı şekilde A'nın 1, B'nin $n-2$ çift parantezden oluştuğu konfigürasyonların sayısı C_1C_{n-2} şeklinde verilir. Bu şekilde devam edip her k için olası bütün konfigürasyonların sayısını bulup toplarsak C_n'yi elde ederiz.

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \ldots + C_{n-1}C_0$$

Şimdi bu tümevarımsal ilişkiyi ve doğuran fonksiyonları kullanarak C_n için genel bir formülü nasıl bulacağımızı görelim. Katsayıları Catalan sayılarından oluşan biçimsel bir seri tanımlayarak başlıyoruz:

$$C(X) = C_0 + C_1X + C_2X^2 + \ldots = \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} C_iX^i.$$

Eğer $C(X)$'i kendisiyle çarparsak $C(X)^2$'yi elde ederiz. $C(X)^2$'nin açılımı ise şöyledir:

$$\begin{aligned} C(X)^2 &= C_0C_0 + (C_0C_1 + C_1C_0)X \\ &\quad + (C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0)X^2 + \ldots \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} (C_0C_i + C_1C_{i-1} + \ldots + C_iC_0)X^i \end{aligned}$$

Dikkat edersek $C(X)^2$'nin i–inci terimi C_{i+1}'e eşit. Bu durumda $C(X)^2$'yi şu şekilde yazabiliriz:

$$C(X)^2 = C_1 + C_2X + C_3X^2 + C_4X^3 + \ldots$$

Bu eşitliği X'le çarpıp C_0 eklersek $C(X)$'i elde ederiz.

$$C(X) = C_0 + XC(X)^2$$

yani, $C_0 = 1$ olduğundan,

$$XC(X)^2 - C(X) + 1 = 0.$$

Bu, $C(X)$ cinsinden ikinci derece denklemdir. Bu denklemi f için çözersek şu ifadeyi elde ederiz:

$$C(X) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4X}}{2X}.$$

Demek ki $C(X)$ güç serisini hesaplamak için, $1-4X$'in karekökünü hesaplamalıyız. $(1+X)^{1/2}$ yazısında bulduğumuz formülü anımsayalım:

$$1+X = \left(\sum_{k\ge 0} \frac{1}{2k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{4^k}\binom{2k}{k}X^k\right)^2.$$

Burada X yerine $-4X$ koyarsak,

$$\begin{aligned} 1-4X &= \left(\sum_{k\ge 0} \frac{1}{2k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{4^k}\binom{2k}{k}(-4X)^k\right)^2 \\ &= \left(\sum_{k\ge 0} \frac{1}{2k-1}\binom{2k}{k}X^k\right)^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$\sqrt{1-4X} = \pm\sum_{k\ge 0} \frac{1}{2k-1}\binom{2k}{k}X^k.$$

$C(X)$'i hesaplamak için + ya da –'li ifadeden birini seçmeliyiz. –'li ifadeyi seçersek, paydadaki X sadeleşmez ve $C(X)$ için bir güç serisi bulmayız. Dolayısıyla +'lı ifadeyi seçmeliyiz. Biraz hesapla,

$$C(X) = \sum_{k\ge 0} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}X^k$$

bulunur. Demek ki C(X)'in k-inci katsayısı,

$$\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}.$$

Dolayısıyla,

$$C_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}.$$

♠