

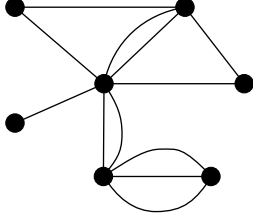
Kapak Konusu: Sayma

Kapsayıcı Ağaç Sayısı (Matris-Ağaç Teoremi)

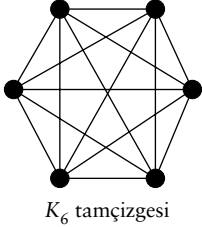
Selda Küçükçifçi* / skucukcifci@ku.edu.tr



Bir çizge aşağıdaki gibi noktalardan ve noktalar arasında bağıntılardan (ya da kenarlardan ya da çizgilerden) oluşmuş bir yapı ya da şekildir.



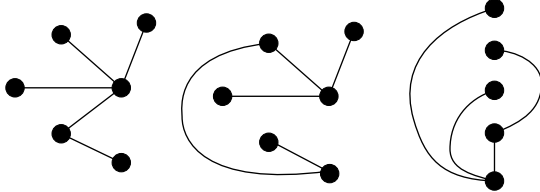
Örneğin, her noktasının her noktasına bağlı olduğu çizgelere **tamçizge** denir ve eğer n nokta varsa bu çizge K_n olarak simgelenir.



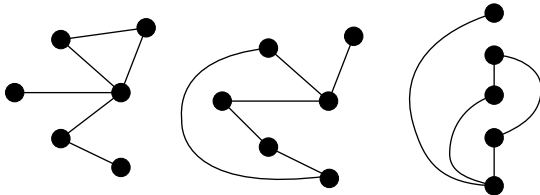
K_6 tamçizgesi

İçinde **döngü** (başladığı noktaya geri dönen yol) olmayan ve her noktasından her noktasına bağlantılar izlenerek

gidilebilen (yani yekpare olan) çizgelere **ağaç** denir. Örneğin aşağıdaki çizgeler ağaçtır.



Ama şu çizgeler ağaç değildirler.



Burada amacımız verilmiş bir çizgenin içinde bulunan ve her noktayı içeren ağaç sayısını hesaplamak. Çizgenin her noktayı içeren ağaçlarına çiz-

genin **kapsayıcı ağacı** adını verelim. Örneğin bir üçgende (yani K_3 'te) üç kapsayıcı ağaç vardır: Üçgenin üç kenarından herhangi birini atarsak bir kapsayıcı ağaç buluruz. Aynı şekilde bir karede de dört kapsayıcı ağaç vardır. Soruyu herhangi bir çizge için soralım ve yanıtlayalım: Bir çizgenin kaç kapsayıcı ağacı vardır?



Gustav Robert Kirchhoff
(1824-1887)

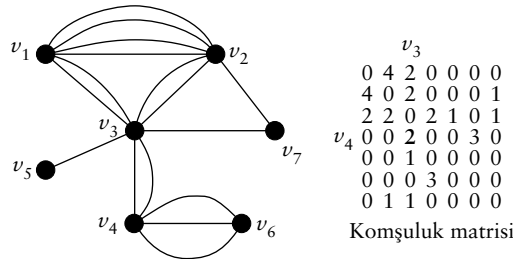
Bu sorunun yanıtı ilk kez Prusyalı matematikçi Kirchhoff [K] tarafından 1847'de Matris-Ağaç Teoremi olarak bilinen bir teoremin sonucu olarak bulunmuştur. Ama bizim kanıtımız Harary'nin [H] kanıtına dayanacak ve lineer cebir gerektirecek.

Matris-Ağaç Teoremi'ni önce yazalım, teoremden kullandığımız terimleri daha sonra açıklarız:

Teorem: Köşeleri adlandırılmış bir G çizgesinin komşuluk matrisi A ve derece matrisi D olsun. G 'nin kapsayıcı ağaç sayısı, $D - A$ matrisinin herhangi bir eşçarpanının değeridir.

Şimdi teoremden geçen terimleri açıklayalım.

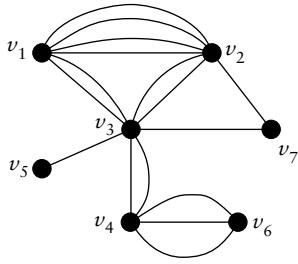
Noktaları v_1, \dots, v_n olan bir çizge alalım. Bu çizgenin **komşuluk matrisi**, (i, j) girdisi v_i ile v_j noktaları arasındaki bağıntı (kenar) sayısı olan $n \times n$ boyutlu matristir.



Çizgenin **derece matrisi** ise, (i, i) girdisi v_i noktasının derecesi (yani v_i 'yi içeren bağıntı sayısı) ve $i \neq j$ için (i, j) girdisi ise 0 olan $n \times n$ boyutlu matristir.

* Koç Üniversitesi Matematik bölümü öğretim üyesi.

1 MD-2003-III, sayfa 19-20'de n noktalı n^{n-2} tane noktaları adlandırılmış ağaç olduğunu (Cayley 1889) kanıtlamıştık. Bu sonucu K_n tamçizgesinin kapsayıcı ağaç sayısı olarak da yorumlayabiliriz.



6	0	0	0	0	0	0
0	7	0	0	0	0	0
0	0	8	0	0	0	0
0	0	0	5	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	3	0
0	0	0	0	0	0	2

Derece matrisi

Elbette komşuluk ve derece matrisleri çizgenin noktalarının kabul edilen sıralamasına göre değişebilir, örneğin $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ için elde edilen matrisler, $v_2, v_1, v_3, \dots, v_n$ için elde edilen matrislerden farklıdır. (İlk iki sütunu ve ilk iki satırı değiştirsek birinden diğerini elde ederiz.) Biz noktaların önceden belirlenmiş belli bir sıralamayla verildiğini varsayacağız; böylece çizgenin komşuluk ve derece matrisleri belirlenmiş olacak.

Eğer M , $n \times n$ boyutlu bir matrisse, M_{ij} , M matrisinden i -inci satır ve j -inci sütun atıldığında elde edilen kare matris olsun. $(-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ sayısına M matrisinin *eşçarpamı* adı verilir.

Böylece teoremdaki terimler açıklanmış oldu. Kanıtımızda şu olgulara ihtiyacımız olacak:

Olgu 1. A ve B , $n \times m$ ve $m \times n$ boyutlu iki matris olsun. $n \leq m$ olduğunu varsayalım. A 'dan $m - n$ sütun silerek $n \times n$ boyutlu bir A_i altmatrisi elde edelim. A_i altmatrisinde A 'nın hangi sütunları gözükmüyorsa B 'den o numaralı satırları alarak $n \times n$ boyutlu B_i matrisini elde edelim. Bu durumda A 'nın olası tüm $n \times n$ boyutlu A_i altmatrisleri için,

$$\det(AB) = \sum_i \det A_i \times \det B_i$$

olur.

Örnek :
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bu çarpım matrisinin determinanı 39'dur. Eş dü-şen altmatrislerin determinantlarının çarpımlarının toplamını hesaplayalım:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 39.$$

Yine aynı sonucu bulduk.

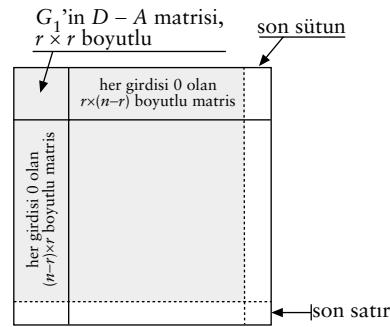
Olgu 2. Her satırının ya da her sütununun toplamı 0 olan bir matrisin determinanı 0'dır. Her satır ve her sütunun toplamı 0 olan bir matrisin determinanı 0'dır ve eşçarpamı aynı değerdedirler.

İkinci olgunun kanıtı oldukça kolay, sütun ve satırların yerlerini değiştirerek ya da birini diğerlerine ekleyerek elde edilir.

Kanıtımızda matrislerle ilgili başka sonuçlar da kullanacağız, ama onları yeri geldiğinde tanıtalım.

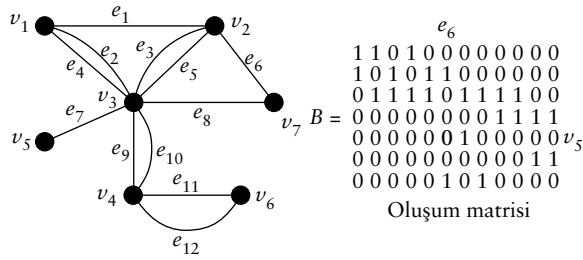
Matris-Ağaç Teoreminin Kanıtı. A matrisinin her i -inci satırının (ve her i -inci sütununun) girdilerinin toplamı v_i noktasının derecesine eşit olduğundan, $D - A$ matrisinde her satır ve her sütunun girdilerinin toplamı 0 olur. Olgu 2'den dolayı $D - A$ matrisinin determinanı 0'dır ve eşçarpamı hep aynı değerdedirler.

Önce G 'nin yekpare olmadığını varsayalım, yani G , aralarında bağıntı bulunmayan en az iki altçizgeden oluşsun. O zaman çizgede hiç kapsayıcı ağaç olmadığından, $D - A$ matrisinin eşçarpamlarının 0 olduğunu kanıtlamalıyız. Kanıtlayalım: G 'nin noktalarına v_1, v_2, \dots, v_n diyelim. G_1 , G 'deki bir bileşen olsun (yani G_1 'in noktalarıyla G 'nin diğer noktaları arasında bağıntı olmasın.) G_1 'in noktalarının v_1, v_2, \dots, v_r olduğunu varsayalım. $D - A$ matrisinden son satır ve sütunu atıp $(n - 1) \times (n - 1)$ boyutlu bir E matrisi elde edelim. E matrisinin ilk r satırının toplamı, her girdisi 0 olan bir satır oluştura-



cağından E matrisinin determinanı 0 olur. Bu akıl yürütme son satır ve son sütun yerine herhangi bir satır ve sütunla yapılabileceğinden, $D - A$ matrisinin her eşçarpamının değerinin 0 olduğu anlaşılır. Böylece bu durumda istediğimizi kanıtlamış olduk.

Şimdi çizgemizin yekpare olduğunu varsayalım. Ayrıca çizgemizin n noktası ve m bağıntısı olsun. Çizgemiz yekpare olduğundan $m \geq n - 1$ 'dir. (Neden?) Çizgenin *oluşum matrisi* B olsun. (Yani v_i noktası e_j kenarındaysa B matrisinin (i, j) girdisi 1, değilse 0 olsun. Elde ettiğimiz $n \times m$ boyutlu matris G çizgesinin *oluşum matrisi*dir. Burada n çizgenin nokta sayısı, m de kenar sayısıdır.) Her



sütun bir kenarı simgelediğinden, B matrisinin her sütununda sadece iki tane 1 vardır ve diğer girdileri 0'dır.

Şimdi B matrisindeki her sütundaki sıfırdan farklı olan iki girdiden herhangi birini -1 yaparak elde ettiğimiz matrise C adını verelim.

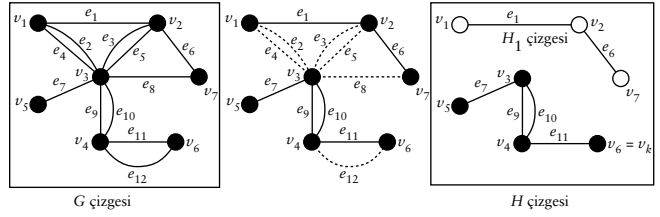
$$C = \begin{matrix} & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad C^t = \begin{matrix} & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_7 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

C 'nin sütunlarının toplamı 0'dır, çünkü girdilerinin biri 1, diğeri -1 ve geri kalanları 0'dır. Bu, birazdan önemli olacak.

CC^t matris çarpımını dikkatlice inceleyelim. (C^t matrisi, yukardaki örnekte görüldüğü gibi, C matrisinin çaprazına göre simetridir, C^t matrisinde C matrisinin sütunları satır, satırları sütun olmuştur.) Cebirsel bir işlem olan CC^t matris çarpımının geometrik anlamı irdelendiğinde, $i \neq j$ ise bu çarpımın (i, j) girdisinin v_i ile v_j noktaları arasındaki kenar sayısı çarpı -1 olduğu gözlemlenir; $i = j$ durumunda ise bu girdi v_i 'nin derecesidir. Demek ki $CC^t = D - A$. Dolayısıyla G 'nin kapsayıcı ağaç sayısının CC^t matrisinin herhangi bir eşçarpanının değeri olduğunu kanıtlamalıyız.

G 'nin $n - 1$ bağıntılı herhangi bir H altçizgesine bakalım. C 'den sadece H 'nin kenarlarına karşılık gelen sütunları kabul edip (yani diğerlerini atıp), sıralardan da herhangi birini, diyelim k -inci sırayı atarak elde ettiğimiz $(n - 1) \times (n - 1)$ boyutlu C' matrisinin (bkz. bir sonraki sütundaki şekil) determinantının mutlak değerini bulalım.

Önce H altçizgesinin bağılı olmadığını varsayalım. O zaman H 'nin v_k noktasını barındırmayan bir bileşeni vardır. Bu bileşen H_1 olsun. Attığımız k -inci satırın H_1 'in noktalarına karşılık gelen girdileri 0'dır çünkü v_k noktası H_1 'de değildir. Dolayısıyla C' matrisinin H_1 çizgesine karşılık gelen altmatrisin

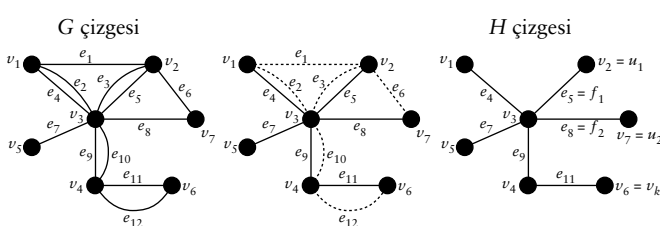


$$C = \begin{matrix} & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad k = 6$$

$$C' = \begin{matrix} & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

sütunlarının toplamı da aynen C matrisinin sütunlarında olduğu gibi 0'dır. Demek ki H_1 çizgesine tekabül eden matrisin (resimde griyle gösterilmiş) determinantı 0'dır. Bundan da $\det C' = 0$ çıkar.

Şimdi H çizgesinin bağılı olduğunu, yani H altçizgesinin G 'nin bir kapsayıcı ağacı olduğunu varsayalım. (Bkz. aşağıdaki şekil.) C' matrisinin satır ve sütunlarını değiştirerek C' matrisini, çaprazın altındaki girdileri 0 olan ama çaprazında hiç 0 olmayan bir matrise (üstüçgen matrisine) dönüştüreceğiz. C' matrisinin girdileri 1 ya da -1 olduklarından ve satır ve sütun değişmelerinden determinantın mutlak değeri değişmediğinden, böyle bir dönüşüm yapabilirsek, $|\det C'| = 1$ eşitliğini kanıtlanmış olacağız.



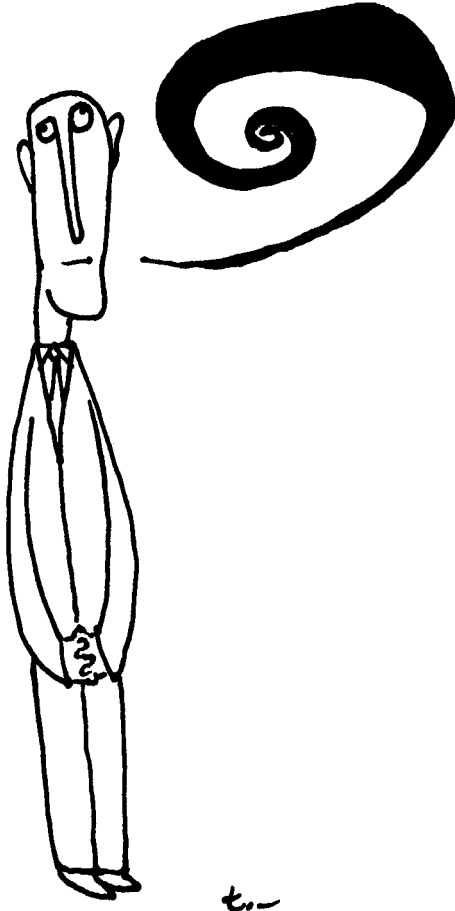
$$C = \begin{matrix} & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad k = 6$$

$$C' = \begin{matrix} & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

u_1 adını vereceğimiz v_k 'den farklı ve derecesi 1 olan bir nokta seçelim. f_1 ise u_1 noktasına bağlı kenar olsun. u_2, v_k ve u_1 'den farklı ve $H \setminus \{u_1\}$ çizgesinde derecesi 1 olan bir nokta, f_2 ise u_2 'ye bağlı kenar olsun. Bu işlemi elimizde sadece v_k noktası kalana kadar uygulayalım. (Bir sonraki adımda $H \setminus \{u_1, u_2\}$ çizgesinden derecesi 1 olan bir u_3 noktası seçeceğiz.) Böylece seçilen her u_i noktası sadece f_1, \dots, f_i noktalarına bağlı olabilir ve e_i noktası f_i kenarına hep bağlı olur. Eğer C' matrisini bu tabanda yazacak olursak, çaprazında 1 ya da -1 olan üçgensel bir matris elde ederiz. Demek ki $\det C' = 1$ 'dir.

$D - A$ matrisinin (ya da CC^t matrisinin) her eşçarpanı aynı değerde olduğu için, $D - A$ matrisinin i -inci satır ve sütunu atarak bulduğumuz eşçarpanı hesaplayalım. C matrisinden i -inci satırı çıkardığımızda elde ettiğimiz matrise C_i dersek, $D - A$ matrisinden i -inci satır ve sütunu atarak elde ettiğimiz matris $C_i C_i^t$ matrisine eşittir. Demek ki $\det(C_i C_i^t)$ değerini bulmalıyız.

Olgu 1'e göre $\det(C_i C_i^t)$, C_i ve C_i^t matrislerinin sonucumuzda belirttiğimiz şekilde aldığımız



altmatrislerinin determinantlarının çarpımlarının toplamlarına eşit. İlgili altmatrislerin determinantlarının çarpımının, sütunlar bir kapsayıcı ağaçsa 1 diğer durumda 0 olduğunu da gördük. Böylece G 'nin kapsayıcı ağaçlarının sayısının $D - A$ matrisinin eşçarpanı olduğunu bulduk. \square

Yazımızın başında sözettiğimiz Cayley Teoremi de Matris-ağaç teoreminden kolaylıkla elde edilebilir. G 'yi n noktalı tam çizge olarak alırsak

$$D - A = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \mathbb{M} & \mathbb{M} & \dots & \mathbb{M} \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

olur. $D - A$ matrisinden ilk satır ve sütunu atalım. $(n - 1) \times (n - 1)$ boyutlu

$$\begin{bmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -n & n & \dots & 0 \\ \mathbb{M} & \mathbb{M} & \dots & \mathbb{M} \\ -n & 0 & \dots & n \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını bulacağız. Önce ilk satırı diğer tüm satırlardan çıkararak

$$\begin{bmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \mathbb{M} & \mathbb{M} & \dots & \mathbb{M} \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

matrisini bulalım. Ardından ilk sütuna diğer tüm sütunları eklersek

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \mathbb{M} & \mathbb{M} & \dots & \mathbb{M} \\ 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}$$

matrisini elde ederiz. Bu işlemler matrisin determinantını değiştirmez ve köşegeninin altındaki tüm girdileri 0 olan bu matrisin determinantı köşegenindeki girdilerin çarpımıdır. Bu durumda matrisin determinantı ise beklediğimiz gibi n^{n-2} dir. \square

Kaynakça

[CL] G. Chartrand, L. Lesniak, *Graphs and Digraphs*, Chapman & Hall, CRC Press 2000.

[H] Harary F., *Graphs and matrices*, SIAM Review 9 (1967) 83-90.

[K] Kirchhoff G., *Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird*, Ann. Phys. Chem. 72 (1847) 497-508.