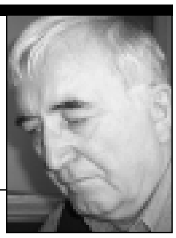
Yirminci Yüzyılda Matematiği Sarsan Temel Düşünceler



Timur Karaçay* / tkaracay@baskent.edu.tr

Adına **Kaos Kuramı** denilebilecek bir kuram bilimsel anlamda oluştu mu? Bu soruya olumlu yanıt vermek için zaman henüz erken olabilir. Ancak böyle bir kuramın doğuşu için yeterince neden ve olgu olduğu ve bu amaçla çaba sarfedildiği gözardı edilemez. Bu konuşmada, bir matematikçi gözüyle determinizmin ve kaosun ne olduğu açıklanacaktır.

Hareket. İnsanlığı tarih boyunca çok uğraştıran doğa olayları vardır. Hareket ve zaman bunların başında gelir. Felsefenin, fiziğin, matematiğin ve sanatın temel uğraş alanları olmuşlardır.

Mekaniğin amacı, evrendeki nesnelerin hareketini açıklamak, yani belli bir anda bulunacakları konumu öngörebilmektir. Hareket eden nesneler, galaksi ve güneş sistemleri gibi devasa, saat sarkaçları ve futbol topu gibi insan boyutunda ya da elektron gibi atomik boyutlarda olabilir. Yakın çevremizdeki hareketleri Newton mekaniğiyle, atomaltı parçacıkların hareketlerini kuantum mekaniğiyle, galaksilerin hareketini de görecelik kuramıyla açıklamaya çalışıyoruz. Tüm bu hareketleri açıklayan tek bir mekanik kuramı her saygın fizikçinin hayalidir.

17'inci yüzyıldan sonra gelişen modern bilim, hareketi açıklama yönünde epeyce yol almıştır, ama gene de hareketin her yönünü açıklamaktan çok uzaktayız. Biraz geriye bakarak bu yolda alınan mesafeyi görmek, bundan sonra alınacak yol için umut ve cesaret verecektir. Henüz emekleme çağında olan kaos kuramı bu yolda çağımızda atılmış önemli bir adımdır.

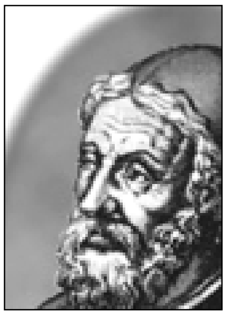
Aristo. MÖ 300 yıllarında Aristo (MÖ 384-322), birçok alanda yaptığı gibi, hareket için de gözlemlerine dayalı yasalar koymuştur. Konumuzla ilgili olan ikisi şunlardır:

1. *Cisimler ağırlıklarıyla doğru orantılı bir ivmeyle yere düşerler.*

2. *Bir cismin hareket etmesi için ona sürekli bir kuvvet etki etmelidir.*

Aristo'nun bu mekanik yasaları - ki yanlıştırlar - fizik bilmeyen herkesin sezgiyle ulaşabileceği sonuçlardır. Ortalama bir insanın hareketi başka türlü algılaması zordur. Aristo'nun yasaları, günlük yaşama ve algılamalarımıza o kadar uygundur ki, 1800 yıl boyunca insanlık bu yasalardan kuşku duymamıştır.

Ama bilim adamlarının bir işi de kuşkulanmak ve sorgulamaktır: Eğer bir cismin hareketi için ona sürekli kuvvet uygulamak gerekiyorsa, gök cisimlerini kim itiyor veya çekiyor? Dalından düşen elmayı yere iten veya çeken şey nedir?



Ptolemy. MS 150'lerde Claudius Ptolemy'nin (MS ≈85 - ≈150) gök cisimlerinin hareketi için koyduğu yasalar Katolik Kilisesi'nin resmi görüşüyle uyum sağlayınca yerküremiz evrenin merkezi olma mertebesine erişmiştir[1].

Kopernik. Günün birinde Nikola Kopernik (Nicolaus Copernicus, 1473-1543) adlı bir Polonyalı çıplak gözle yaptığı uzun gözlemlerden sonra gerçekle yüzyüze gelmemizi sağladı: Yerküremiz taşımakta olduğu o yüce payeyi güneşe kaptırdı: Artık, evrenin merkezi dünya değil, güneşti[2]!

* Başkent Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi. Yazı, 21-24 Eylül 2004'te Assos'ta gerçekleştirilen Mantık, Matematik ve Felsefe II.Ulusal Sempozyumu'nda yapılan konuşmadan uyarlanmıştır.

1 Yermerkezli evren, İngilizcesiyle geocentric universe.

2 Günmerkezli evren, İngilizcesiyle heliocentric universe.

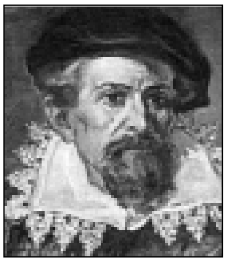
Kepler. Evren kuramını Johann Kepler (1571-1630) geometrik bir modele oturttu:

1. *Bir gezegenin yörüngesi, bir odağında güneşin yer aldığı bir elipstir.*

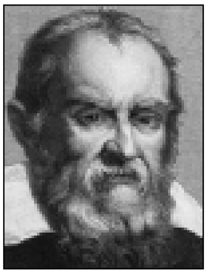
2. *Güneşi gezegene birleştiren doğru eşit zaman aralıklarında eşit alanlar süpürür.*

3. *Gezegenin periyodunun karesi güneşe olan ortalama uzaklığının küpüyle orantılıdır.* (*Dünya için* $T^2 = R^3$.)

Kepler'in, bugün bile geçerliğini koruyan bu mükemmel geometrik modeli, güneş sistemi içindeki gezegenlerin hareketlerini kusursuz açıklıyordu ama evrendeki bütün hareketleri ve en önemlisi hareketlerin nedenini açıklamaya yetmiyordu.

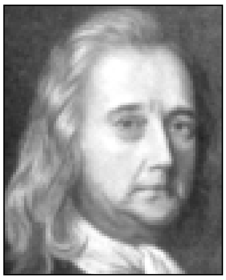


Galile. Galileo Galilei (1564-1642) bir yandan teleskopla gök cisimlerini gözleyip Kopernik'in günmerkezli kuramını doğrularken, öte yandan yerçekimiyle ilgili deneyleri Aristo'nun 2000 yıllık imparatorluğunu derinden sarsıyordu: *Bütün cisimler aynı ivmeyle yere düşerler.*



Bu yasa ağır cisimlerin de hafif cisimlerle aynı ivmeyle yere düştüğünü söylüyor ve Aristo'nun yukarda anılan ilk yasasını çürütüyor. Tarih, büyük imparatorlukların derinden sarsılınca yıkılmalarının kaçınılmaz olduğunu göstermiştir.

Newton. Galile'nin sarstığı Aristo imparatorluğuna Isaac Newton (1642-1727) son darbeyi indirecektir. ***Newton Hareket Yasaları*** denen aşağıdaki yasalar, Aristo imparatorluğunu yıkmakla kalmadı, 200 yıl boyunca fiziğin temeli oldu ve çağımızın teknolojisine yol açtı:



1. *Hareketli bir cisim dışarıdan bir kuvvetle etkilenmezse düzgün doğrusal hareketini ilelebet sürdürür.*

2. *Kütlesi m olan bir cisme uygulanan F kuvvetiyle a ivmesi arasında F = ma bağıntısı vardır.*

3. *Her etkiye karşı ona eşit bir tepki vardır.*

Newton, Kepler'in mükemmel geometrik modelinin ve Galile'nin yerçekimiyle ilgili şaşırtıcı gözleminin gerisinde yatan gizemi aramaya başladı. Gezegenler neden Kepler'in modeliyle hareket ederler? Ağır ve hafif cisimler neden aynı ivmeyle yere düşerler? Bu soruların yanıtlarını veren matematiksel bir formül olmalıydı. Sonunda aradığını buldu. Newton'un hareket yasaları, biraz sonra ele alacağımız ***determinizm*** kavramının temelidir. Newton'dan sonra 20'inci yüzyıl başına dek hareketle ilgili her şeyin Newton'un hareket yasalarından çıktığına inanılacaktır.

Nerden Nereye? (Matematikten Fiziğe!)

Kepler, gezegenlerin hareketlerini açıklayan geometrik modeli yaratmak için Perge'li Apollonius'un (MÖ 262-190) 1800 yıl önce yazdığı **Konikler** adlı yapıtına dayanıyordu. Herhalde, Apollonius, koniklerin gizlerini tutkuyla araştırıp ortaya dökerken, on sekiz yüzyıl sonra büyük bir uygarlığa çığır açacağını aklına bile getirmiyordu: Apollonius olmasa Kepler, Kepler olmasa Newton, Newton olmasa Einstein olmazdı!

Diferansiyel Denklemler - Dinamik Sistemler

Fiziksel bir olguyu, örneğin bir nesnenin hareketini anlamak için, olguyu kâğıda hapsetmek, yani matematiksel bir modelini kurmak gerekir. Bu da genellikle matematiksel denklemlerle mümkündür. Fiziksel olguyu matematiksel olarak anlamakla, bulunan denklem sistemini çözmek eşdeğerdir, en azından bu yolda atılmış çok önemli bir adımdır. Bulunan denklemler genellikle ***diferansiyel denklem*** denen bir türdendir. (Bkz. sayfa 64.)

Bazı diferansiyel denklemleri çözmek kolaydır, bunlara ***doğrusal*** ya da ***lineer diferansiyel denklemler*** denir (bkz. bir sonraki sayfadaki gri karenin sonu.) Diferansiyel denklemlerin çözümleri adına ***analitik*** denilen (bkz. bir sonraki sayfadaki gri kutu), oldukça ele avuca gelen, bir anlamda eli yüzü düzgün ya da evcil diyebileceğimiz ve polinomlara oldukça benzeyen fonksiyonlardır. Bu diferansiyel denklemlerin çözümleri bulunabildiğinden, temsil ettikleri fiziksel olgunun matematiksel çözümlemesi de yapılabilir, en azından böyle bir kuramsal temel vardır.

Doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümleri ne yazık ki bilinen fonksiyonlar cinsinden yazılamaz genelde. Bu zor denklemler teorik olarak çözülemediğinden yaklaşık çözümler için bilgisayarlar kullanılır.

Hız

Bir doğru üzerinde yol alan bir parçacık t-inci saniyede $x(t) = t^2$ metrede olsun. Örneğin, parçacık, 0'ıncı saniyede $x(0) = 0^2 = 0$ metrede, 3'üncü saniyede $x(3) = 3^2 = 9$ metrededir. Hızı gittikçe artan bu parçacığın **tam** 3'üncü saniyedeki hızını hesaplayalım.

Önce parçacığın 3 ve 4'üncü saniyeler arasındaki ortalama hızını hesaplayalım. Parçacık, 3'üncü saniyede $x(3) = 3^2 = 9$ metredeyken, 4'üncü saniyede $x(4) = 4^2 = 16$ metreye varmış, demek ki 1 saniyede $16 - 9 = 7$ metre katetmiş. Dolayısıyla parçacığın 3 ve 4'üncü saniyeler arasındaki ortalama hızı 7 metre/saniye'dir.

Şimdi parçacığın 3 ve 3,1'inci saniyeler arasındaki ortalama hızını hesaplayalım. Parçacık, 3'üncü saniyede $x(3) = 3^2 = 9$ metredeyken, 3,1'inci saniyede $x(3{,}1) = 3{,}1^2 = 9{,}61$ metreye varmış, demek ki 0,1 saniyede $9{,}61 - 9 = 0{,}61$ metre ketetmiş. Dolayısıyla parçacığın 3'üncü ve 3,1'inci saniye arasındaki ortalama hızı $0{,}61/0{,}1 = 6{,}1$ metre/saniye'dir.

Şimdi de, herhangi bir h için, parçacığın 3 ve $3 + h$'inci saniyeler arasındaki ortalama hızını hesaplayalım. Yukarda $h = 1$ ve 0,1 için 7 ve 6,1 bulduk.

Parçacık, 3'üncü saniyede $3^2 = 9$ metredeyken, $3 + h$'inci saniyede $(3 + h)^2 = 9 + 6h + h^2$ metreye varmış, demek ki h saniyelik bir sürede

$$(9 + 6h + h^2) - 9 = 6h + h^2$$

metre katetmiş. Dolayısıyla parçacığın 3'üncü ve $3+h$'inci saniye arasındaki ortalama hızı

$$(6h + h^2)/h = 6 + h$$

metre/saniye'dir.

Parçacığın 3'üncü ve $3 + h$'inci saniyeler arasındaki ortalama hızının $6 + h$ olduğunu bulduk. Parçacığın **tam** 3'üncü saniyedeki hızını bulmak için $h = 0$ almak gerekir: Parçacığın **tam** 3'üncü saniyedeki hızı $6 + 0 = 6$ metre/saniye'dir.

Yukardaki hesapları 3 yerine herhangi bir t zamanı için yapalım. Parçacığın t ile $t + h$ arasındaki ortalama hızı,

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = \frac{(t^2 + 2th + h^2) - t^2}{h}$$

$$= \frac{2th + h^2}{h} = 2t + h$$

dir. $h = 0$ alırsak, parçacığın t anındaki hızının $2t$ olduğunu buluruz. Genel formül şöyle:

$$\text{hız} = x'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}.$$

Diferansiyel Denklemler

Hareket eden bir noktanın t anındaki konumunu $x = x(t)$ ile gösterelim. Noktanın her an bir de hızı vardır. Noktanın t anındaki hızını $x' = x'(t)$ ile gösterelim. Örneğin eğer $x'(t) = 0$ ise, nesne o t anında hareket etmiyordur, (ama hemen sonra ya da hemen önce hareket halinde olabilir, örneğin havaya bir taş attığımızda, en tepeye vardığında taşın hızı 0'dır, düşmeye başladığında hız negatiftir.) ***İvme*** ise hızın hızıdır. Havaya atılan bir taş gittikçe yavaşladığından ivmesi başlangıçta negatiftir; taş düşmeye başladığında ivmesi pozitif olur. Noktanın t anındaki ivmesini $x'' = x''(t)$ ile gösterelim. İvmenin de hızı hesaplanabilir ve x''' ile gösterilir. Bunu böylece sonsuza kadar sürdürüp t zamanına göre değişen x, x', x'', ..., $x^{(n)}$, ... fonksiyonlarını elde edebiliriz.

Hareket eden bir parçacığın t anındaki $x(t)$ konumunu belirlemek için, genellikle, önce, x, x', x'', x''', ... fonksiyonları arasında bir bağlantı kurulur. Örneğin, konum hıza eşit olabilir, o zaman bağlantı $x = x'$ dir (daha doğrusu $x(t) = x'(t)$'dir.) Ya da $xx' = 2tx''$ gibi bir bağlantı olabilir. Bu tür bağlantılara ***diferansiyel denklem*** denir. Diferansiyel denklem bulunduktan sonra, bu diferansiyel denklemi sağlayan $x = x(t)$ fonksiyonlarının bulunması gerekir.

Değişkeni t olan p_0, ..., p_n, q fonksiyonları için,

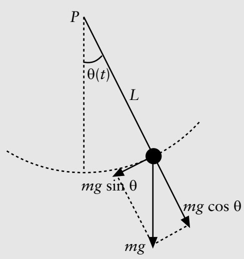
$$x^{(n)} + p_n x^{(n-1)} + ... + p_1 x' + p_0 x = q$$

biçiminde yazılan diferansiyel denklemlere ***doğrusal diferansiyel denklemler*** denir. Doğrusal diferansiyel denklemleri çözmek diğerlerine göre daha kolaydır.

Sarkacın Hareketi

Kütlesi m, ipinin uzunluğu L olan bir sarkaç belli bir θ_0 açısıyla gerilip belli bir hızla itilirse, sarkacın t anındaki açısı $\theta = \theta(t)$,

$$L\theta'' + g\sin(\theta) = 0$$



diferansiyel denklemini sağlar. (Buradaki g yerçekiminin ivmesidir.) Bu denklem lineer değildir ve çözümü, bilinen diğer fonksiyonlar cinsinden yazılamaz, bilgisayar yardımıyla sayısal ve yaklaşık olarak çözülebilir ancak. Ama eğer θ_0 ve ilk hız küçükse, o zaman θ da küçük olur ve $\sin(\theta) \approx \theta$ olduğundan, küçük hataları umursamayarak denklemi $L\theta'' + g\theta = 0$ lineer denklemine dönüştürüp çözebiliriz.

Analitik Fonksiyonlar

$f(x) = ax^2 + bx + c$ gibi bir polinom tarafından verilen fonksiyonlar oldukça kolay anlaşılırlar. Ama her fonksiyon polinom tarafından verilmez elbet. $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$, belli bir $a \in \mathsf{R}$ noktasında n kez türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Kolayca kanıtlanabileceği üzere,

$$f(a) = p_n(a)$$
$$f'(a) = p_n'(a)$$
$$\ldots$$
$$f^{(n)}(a) = p_n^{(n)}(a)$$

eşitliklerini sağlayan bir ve bir tek n-inci dereceden $p_n(x)$ polinomu vardır:

$$p_n(x) = \Sigma_{i=0}^{n} f^{(i)}(a)(x-a)^i/i!$$

Bu polinomların n büyüdükçe f'ye daha çok benzediklerini, hatta sonsuzda hem yakınsak hem de f'ye eşit olduklarını, yani,

$$f(x) = \Sigma_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(a)(x-a)^i/i!$$

eşitliğini ummak gerekir. Ne yazık ki bu eşitlik her zaman doğru değildir: 1) Seri yakınsak olmayabilir, 2) Seri yakınsak olduğunda da $f(x)$'e yakınsamayabilir. Ama eğer bir $\varepsilon > 0$ ve her $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ için,

$$f(x) = \Sigma_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(a)(x-a)^i/i!$$

ise, f'ye a'da ***analitik*** denir. Analitik fonksiyonlar polinomsal olmasalar da polinomsal fonksiyonlara oldukça benzediklerinden el üstünde tutulurlar. exp, sin, cos gibi fonksiyonlar her noktada analitiktirler.

Basit hareketleri matematikselleştiren diferansiyel denklemler ya da denklem sistemleri genellikle doğrusaldır. Fiziksel sistem karmaşıklaştıkça, diferansiyel denklemlerdeki değişken sayısı artar, sistem çok değişkenli olur. Ayrıca denklemdeki terimlerin dereceleri büyür ve sistem doğrusal olmaktan çıkar. Genellikle, bu tip denklemlerin analitik bir çözüm uzayı yoktur. Bu, ***kaos*** diye adlandırılan olguları alışılmış matematik diliyle açıklayamayışımızın asıl nedenidir.

Dinamik Sistem. Diyelim bir ortamda kuşlar (avcılar) ve solucanlar (avlar) var. Belli bir t anındaki solucan sayısına $s(t)$, kuş sayısına $k(t)$ diyelim. Elbette solucan ve kuş sayısı arasında bir ilişki olmalı, örneğin kuş sayısı arttıkça solucan sayısı azalmalı. Şöyle bir model tasarlayalım (Lotka-Volterra modeli):

$$s'(t) = as(t) - bs(t)k(t)$$
$$k'(t) = cs(t)k(t) - ek(t).$$

Burada, a, b, c ve d, ava, avcıya, coğrafyaya vs göre değişen pozitif sabit sayılardır; s' ve k' ise solucan ve kuş sayısının t anındaki artış (ya da azalış) hızıdır.

Birinci denklem şunu der: Eğer ortamda kuş yoksa, yani $k = 0$ ise, solucan sayısı $s' = as$ hızıyla artar (yani kuş yoksa belli bir a sabiti için $s(t) = ae^{rt}$ olur.) Ama her kuş da solucanların belli bir b yüzdesini avlamaktadır, dolayısıyla kuş sayısı solucan sayısını azaltmaktadır. (Demek ki b sabiti 0'la 1 arasında bir sayıdır.)

İkinci denkleme göre, avlanacak solucan yoksa kuş sayısı $k' = - ek$ hızıyla değişir, yani azalır. csk terimi avlanan solucan sayısının kuşların çoğalmasına neden olduğunu gösterir.

İşte bu, (***sürekli***) bir ***dinamik sistem***dir. Eğer bu sistemi çözmek çok zorsa, zamanı sürekli değiştirmek yerine örneğin saniye başı değiştirterek şöyle bir sisteme varabiliriz:

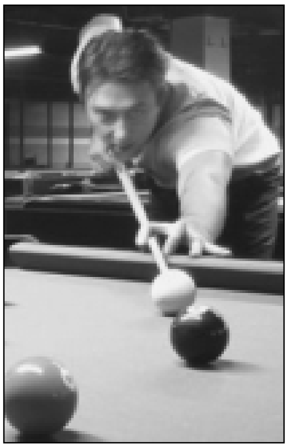
$$s_{n+1} - s_n = as_n + bs_nk_n$$
$$k_{n+1} - k_n = cs_nk_n + ek_n.$$

Buradaki $s_n = s(n)$ ve $k_n = k(n)$, n-inci andaki (ya da saniyedeki) solucan ve kuş sayısıdır. Eğer sıfırıncı saniyedeki solucan ve kuş sayısını, yani $s_0 = s(0)$ ve $k_0 = k(0)$ sayılarını biliyorsak, hesapla 1000'inci saniyedeki solucan ve kuş sayısını – en azından kuramsal olarak – bulabiliriz. Zamanın birim birim ilerlediği böyle bir sisteme de ***ayrık dinamik sistem*** denir.

Eğer $s(0)$ ve $k(0)$ biliniyorsa, sürekli ya da ayrık olsun, analitik çözümü olan her dinamik sistemin tek bir çözümü vardır. $s(0)$ ve $k(0)$ değiştikçe, doğal olarak genel çözüm de değişir. Bu değerlere dinamik sistemin ***başlangıç koşulları*** denir.

Örneğin bir bilardo topunun ıstakayla vuruluş yönü, gücü ve topun neresine vurulduğu başlangıç koşullarıdır. Verilen başlangıç koşullarıyla top her zaman aynı yörüngeyi izler.

Başlangıç Koşulları. 1500'lerde, bir doğa yasasını açıklamanın tek yolunun onu belirleyecek ölçümlerin yapılmasıyla mümkün olabileceği görüşü çıktı. Bunun anlamı açıktı: Evrenin yasaları sözel ifadeler yerine simge ve sayılarla açıklanmalıydı. Bu görüş 17'inci yüzyılda gelişmeye başlayan modern bilimin temeli olmuştur ve maddeyi ve doğa olaylarını açıklamak için bilim matematiği asıl araç olarak kullanmıştır. Örneğin, Newton yasaları sözel olarak ifade edilseler bile, bir fiziksel sistemin durumunu açıklamak için hareket eden parçacığın belli bir andaki (diyelim 0'ıncı saniyedeki) konumunun, hızının, yönünün ve ona etkiyen kuvvetlerin bilinmesi gerekir. Bu bilgiler de elbette sayısaldır ve sistemin ***başlangıç koşulları***dır.



Bir bilardo oyuncusu, aslında vuracağı topa istediği yörüngeyi çizdirtecek başlangıç koşullarını arıyordur.

Bir dinamik sistemin bir andaki konumunu, hızını, yönünü ve ona etkiyen kuvvetleri bildiğimizi varsayarak onun daha sonraki ya da daha önceki bir zamandaki durumunu da bilmek istiyoruz. Fiziksel durumu matematikselleştiren diferansiyel denklem ya da sistem doğrusalsa çözümün analitik olduğunu söylemiştik. Ama her başlangıç koşulu için bir başka analitik çözüm bulunur.

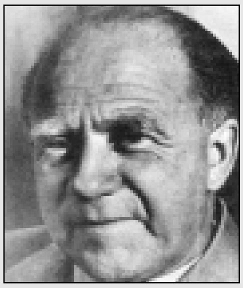
Determinizm. Felsefi açıdan, klasik mekaniğin yani Newton mekaniğinin özü determinizmdir. Determinizm, "bir fiziksel sistemin şimdiki durumu, önceki durumunun sonucudur" der. Dolayısıyla her olay ve hareketi önceden belirlemek mümkündür. Bu görüşü, antik çağın maddeci düşünürlerine kadar geriye götürebiliriz. Hiç değilse, 1500 yıllarında ortaya çıkan **nedensellik** (**neden-sonuç**) düşüncesinin ağırlık kazanmasından sonra Isaac Newton'un ortaya koyduğu hareketin üç temel yasası modern bilimi bütünüyle determinizme dayalı kılmıştır. Bu yasalar, determinizmi yalnız ileriye değil, geriye doğru da çalışan sağlam bir araç olarak görür. Gerçekten, Newton'un hareket yasalarına göre, şu andaki fiziksel durum önceki fiziksel durumdan çıktığı gibi, bundan sonra olacak fiziksel durum da şu andaki fiziksel durumun sonucu olacaktır. Klasik fizikçi açısından, Halley kuyruklu yıldızının 2061'de yeniden dünyayı ziyaret edeceğini kesinlikle öngörebilmek ya da gelecek güneş tutulmasının ne zaman olacağını ve dünyanın neresinden en iyi görüneceğini şimdiden şaşmaz biçimde hesaplayabilmek, determinizmin yadsınamaz zaferleridir. Modern bilimin dayanağı olan ve yüzyıllardır etkisini sürdüren bu görüş, bugünün bilimini, teknolojisini ve uygarlığını yaratmıştır.

Determinizmin matematiksel dili çok açıktır. Başlangıç koşulları bilince, ona uyan biricik analitik çözümü bulabiliriz. Bu çözüme f diyelim. Herhangi bir t anında sistemin durumunu biliyorsak, f fonksiyonunu biliyoruz demektir. Artık her a için $f(t+a)$ ve $f(t-a)$ değerlerini hesaplamak, yani sistemin a zaman sonra ve a zaman önceki durumlarını saptamak mümkündür.

Demek ki determinizmin uygulanabilmesi için, sistemin analitik çözümüne ve iyi belirlenmiş başlangıç koşullarına gereksinim vardır. Çok kolaymış gibi görünen bu iş, gerçekte pek çok sistem için imkânsızdır. Bu imkânsızlık ***kaos*** diye anılan fenomenleri yaratır.

Tanrı Zar Atar mı? Newton fiziği doruktayken, 20'inci yüzyıl içinde Newton fiziğinin eksiğini tamamlamak için yapılan çalışmalarda iki yeni kuram ortaya çıktı: kuantum ve görecelik kuramları. Görecelik kuramı, bu yazının kapsamı dışındadır. Kaosun olasılığa dayalı yanıyla yakın ilişkisi nedeniyle kuantum mekaniğine birkaç satır ayırmakta yarar vardır.

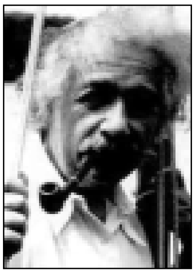
Heisenberg Belirsizlik İlkesi'ne göre hareket halindeki bir parçacığın belli bir andaki momentumuyla (yani kütlesiyle hızının çarpımıyla) bulunduğu konumu, deney koşulları mükemmel bile olsa, kesin olarak belirlenemez, mutlaka bir hata olmalıdır, çünkü ölçüm yapmak için sistem mutlaka "rahatsız edilmelidir". Bu iki hatanın çarpımı ***quantum sabiti*** adı verilen ve $\hbar$ olarak simgelenen bir sabitten daha az olamaz ($\hbar = h/2\pi = 6{,}6262 \times 10^{-34}/2\pi\ J\times s$). Bu belirsizlik insani boyutlarda önemsiz olsa da atomik boyutlarda görmezden gelinemeyecek bir hatadır. Eğer momentum p, konum x ise ve hatalar da Δp ve Δx ise, $\Delta p \times \Delta x > \hbar$ olmalıdır. Dolayısıyla konumu tam olarak tespit etmek için (yani Δx'in 0 olması için), Δp sonsuz olmalıdır! Belirsizliğin hakim olduğu bu "quantum dünyası"nda bir parçacığın uzaydaki konumu yüzdeyüz kesinlikle belirlenemez, parçacığın konumu sadece %99 gibi belli bir olasılıkla belirlenebilir.



Atomun yapısını açıklamak için atomaltı parçacıklarının hareketleri belirlenmeli. Bu parçacıklara determinizm ilkesini uygulayabilmek için başlangıç koşullarının bilinmesi gerekiyor. Ama Heisenberg ilkesine göre (bkz. bir önceki sayfadaki gri alan) parçacıkların aynı anda tam olarak konum ve hızlarını ölçebilme olanağı yok; hız bilindiğinde konum bilinmiyor, konum bilindiğindeyse hız bilinmiyor.

Buna çare olarak "olasılık" kuramı kullanıldı. Parçacıkların hızları ya da konumları belli olasılıklarla belirlendi. Fizikte olasılığın kullanılışı determinizmden radikal bir sapıştır.

Dönemin en renkli kişilerinden Albert Einstein bu görüşe karşı durup "Tanrı'nın zar attığına inanamam!" diyecektir. Ama, olayın çok inandırıcı yanı vardır. Yapılan tahmin bir parçacık için değil, milyonlarcası içindir. Bir para atıp tura geleceğini tahmin ederseniz, ya tutturur ya da yanılırsınız. Ama 1.000.000 tane para atıp 500.000 tanesinin **tura** geleceğini söylerseniz gene büyük olasılıkla yanılırsınız ama gerçek tura sayısının da çok uzağına düşmezsiniz.


Albert Einstein

Bütün bunlardan önce, hemen 20'inci yüzyıl başlarken Newton mekaniğine duyulan güveni sarsan görüşlerin ortaya çıkışını anımsamalıyız. 1898'de Fransız matematikçisi Jacques Hadamard başlangıç koşulunda bir hata yapıldığında sistemin uzun dönemde öngörülemez olacağını belirtti. Ünlü Fransız Matematikçisi ve düşünürü Henri Poincaré 1900'de güneş sisteminin dengesinin sağlam olup olmadığının kanıtlanamayacağını gösterdi. 1908'de Science et Méthode adlı ünlü yapıtında konuyu ayrıntılarıyla işlemiştir.

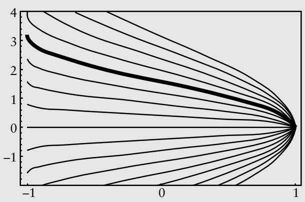

Jacques Hadamard

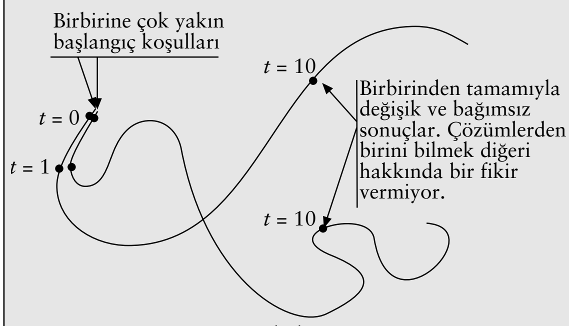

Henri Poincaré

Ölçümlemede Belirsizlik. Başlangıç koşullarını nasıl belirleyeceğiz? Bunun tek yolu gözlem ve ölçümlemedir. Ama gözlemler, deneyler, ölçümler gerçek sayısal değerleri veremez; onları ancak belli bir yaklaşıklıkla, yani belli bir hatayla bulabiliriz. Her ölçümlemede kaçınılmaz olan alet ve insan hatalarını bir yana koysak bile, kuramsal olarak hiçbir alet her zaman gerçek değerleri veremez. Ölçümlemede Belirsizlik dediğimiz bu olgu, bir fiziksel sistemin başlangıç koşullarının kesin olarak belirlenemeyeceği anlamına gelir. Bu olgunun determinizm ilkesinde yarattığı olumsuzluğu saptayan ilk kişi Henri Poincaré'dir (1854-1912). Şimdi bunun ilginç öyküsüne geçebiliriz.

Kaotik Davranış

Analitik çözümü olan bir sistemde başlangıç koşullarındaki ufak bir değişiklik, aşağıdaki şekilde de görüldüğü gibi çözümlerde de ufak değişikliklere neden olur. Oysa analitik çözümü olmayan bir sistemde ufak bir değişiklik öngörülemez değişikliklere neden olabilir. Örneğin atmosfer olayları kaotiktir ve bu yüzden meteoroloji ancak birkaç gün sonrasını tahmin edebilir.





Kaotik davranış

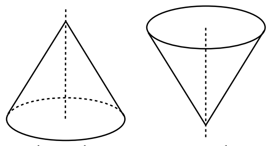
n Cisim Problemi

Ağırlıkları olan noktasal *n* cisim belli bir hızla ve belli bir yörüngeyle bir ortama girdiklerinde, cisimler ağırlıklarından dolayı birbirlerini çekerler ve yörüngeleri birbirinden etkilenir. Bu *n* cismin çizeceği yörüngeyi bulmak ***n cisim problemi*** olarak anılır. Cisimlerden biri ya da birkaçı sabit varsayılabilir ya da bir ya da birkaçının ağırlığı diğerlerine göre çok küçük alınabilir. 3 cisim problemine örnek olarak güneş-jüpiter-dünya ya da güneş-dünya-satelit alınabilir.

İki cisim problemi Newton tarafından çözülmüştür ve çözümü analitiktir. Ama ikiden fazla cisim için problemin genel çözümü kaotiktir.

Kelebek Etkisi. Newton yasaları iki gök cisminin hareketine mükemmel uyum sağlar, ama ikiden çok (örneğin üç) cisim olduğunda analitik çözüm elde edilmez. “Üç Cisim Problemi” diye anılan bu problem yirminci yüzyıla girerken astronomide popüler bir konu oldu.

Norveç Kralı II. Oscar, güneş sisteminin dengesinin sağlam ya da hassas olup olmadığını kanıtlayana ödül vereceğini duyurdu. Henri Poincaré 1900’de, güneş sisteminin hareketini belirleyen denklem sisteminin çözümünün başlangıç koşullarına bağımlı olduğunu, ancak başlangıç koşullarının asla doğru olarak saptanamayacağını, dolayısıyla güneş sisteminin sağlam ya da hassas olup olmadığının belirlenemeyeceğini gösterdi. Bu öngörülemez durum için “kaos” terimini kullanan ilk kişi de odur. Böylece, Poincaré, istenen problemi çözmeden ödülün sahibi oldu. (Makale matbaadayken matematiksel bir hata farkedilir, Poincaré hatayı zorlanarak da olsa düzeltir ama bu arada aldığı ödülün daha fazlasını hatayı düzeltmek için harcamıştır!) Ama bir problemin çözülemeyeceğini kanıtlamak, problemi çözmek kadar değerlidir.



Sağlam denge Hassas denge

Şimdi Poincaré’nin büyük bulgusunun matematiksel açıdan basit açıklamasını yapabiliriz. Dinamik sistemin analitik çözümü varsa, belli bir başlangıç değeri yakınındaki değerler için fonksiyon (yörünge) değerleri de birbirine yakındır (süreklilik). Determinizm asıl gücünü buradan alır. Bu sistemlerde başlangıç koşulları kesinlikle belirlenemese bile, gerçek başlangıç değerlerine yakın değerlerin alınması sonuçta önemli farklar yaratmaz.

Çözüm analitik olmadığında, birbirine çok yakın noktalardaki teğetler birbirinden çok uzakta olabilirler. Ya da birbirine çok yakın başlangıç koşullarında sonuçlar birbirinden çok uzak olabilirler.

Bu kısa açıklamadan sonra, konuyla ilgilenen fizikçilerin kaos terimine yükledikleri anlamı ortaya koyabiliriz: **Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık.** Fizikçilerin bunu ifade eden güzel bir deyimleri var: *Çin’de bir kelebek kanat çırparsa Teksas’ta kasırga olabilir*. Bu sözde hiçbir politik ima olmadığını söylemeye gerek yoktur. Sadece, söylenmek istenen, başlangıç koşullarındaki çok küçük değişimin sistemin davranışında çok büyük fark yaratabildiğidir.

Werner Karl Heisenberg

1901’de Almanya’da doğmuştur. Birinci Dünya Savaşı yüzünden lise öğrenimi yarıda bırakıp Bavarya’da hasata yardım etmek zorunda kalır. Savaştan sonra Münih’e gider ve Hitler’in Bavarya’daki komünist iktidarı yıkmaya çalışan “Demokratik Sosyalist” güçlerinde yer alır. Ayrıca şiiriyle, müziğiyle, düşüncesiyle yeni bir “Alman yaşamı” kurmaya çalışan “Yeni İzciler” gençlik hareketine katılır.

1920’de sayılar kuramında matematik doktorası almak için Münih Üniversitesi’ne girer ama sonradan teorik fiziğe geçer ve Bohr, Pauli, Born ve Fermi gibi yüzyılın en büyük fizikçileriyle tanışır. 1923’te, uygulamalı fizikteki başarısızlığı yüzünden “orta” dereceyle doktorasını alır ama aynı yıl ünlü Göttingen Üniversitesi’nde profesör olur. Sayılar yerine matrisler kullanan bir atom kuramı geliştirir. Bir yıl sonra Schrödinger’in bulduğu dalga mekaniği Heisenberg’in matris kuramını gölgelemiş olsa da Schrödinger her iki kuramın eşdeğer olduklarını kanıtlar. 1926’da Kopenhag Kuramsal Fizik Enstitüsü’ne Bohr’un yanına gider ve yaşamının en verimli zamanını geçirir. 1927’de elektronun özelliklerini anlamak için yollanan gamma ışınlarının elektronun davranışını değiştirdiğini gözlemler ve Einstein’ın kuşkuyla karşıladığı Belirsizlik İlkesini öne sürer. Aynı yıl Almanya’ya döner. 1932’de genç yaşında Nobel Ödülü’nü alır. Ancak 1933 Nazi iktidarı ve İkinci Dünya Savaşı Alman üniversitelerini allak bullak eder. Yahudi akademisyenler ülkeyi terketmektedirler. Naziler “Yahudi fiziği” olarak nitelendirdikleri teorik fiziği üniversitelerden temizlemek isterler. Heisenberg doğrudan suçlanır ama Birinci Dünya Savaşı’nda yıkılan Almanya’yı eski günlerine kavuşturmak istediğinden ülkeyi terketmez. SS şefi Himmler’e başvurmasıyla itibarı iade edilir. Atom bombası projesinin başına getirilir. Savaş bittiğinde Heisenberg İngiltere’de bir süre hapsedilir. Serbest bırakıldığında, daha sonra arkadaşı Max Planck’ın adını verdiği Kaiser Wilhelm Enstitüsü’nün başına getirtilir. 1970’te emekli olur ve 1976’da ölür. Almanya’nın bomba yapımındaki başarısızlığı isteksizliğinden mi yoksa bilimsel yetersizlikten mi kaynaklandığı bugün dahi tartışma konusudur.

Hoşgeldin Kaos! Aya insan indiren, Mars'a uydu gönderen ve bu hareketlerin her saniyesini önceden öngören determinizmin büyük gücünü yanımızda hissetmek hepimize huzur veriyor. Ama, bir bilardo topunun illa diktörtgen olmayan bir masada nereye çarpacağını hesaplayamamak, üç gün sonrasının hava durumunu doğru tahmin edememek ya da bir dünya savaşının sonuçlarını öngörememek gibi olgular, kaygı verici değilse bile, determinizmin verdiği huzura gölge düşürecek kadar hayalkırıcıdır.

Konuşma diline indirirsek, davranışı öngörülemeyen dinamik sistemlerini ya da onların davranışlarını ***kaos*** olarak niteliyoruz. Fizikçilerin kaos terimine yükledikleri bu anlamla sokaktaki adamın, hele hele politikacıların kaos terimine yükledikleri anlam çok farklıdır. Fizikçilerin söylediklerini matematik diliyle ifade edersek kaosu daha iyi tanımlamış oluruz.

Sonuç olarak, doğrusal (lineer) olmayan dinamik sistemlerin çoğu için öngörü yapmaya engel olan üç neden vardır:

1. Sistemin analitik çözümü yoktur.
2. Hiçbir başlangıç koşulunu tam olarak belirleyemeyiz (Ölçümlemede Belirsizlik İlkesi).
3. Başlangıç koşullarında meydana gelen çok küçük değişim(ler) sonuçta çok büyük farklara neden olabilir (Başlangıç koşullarına hassas bağımlılık – Kelebek etkisi).

Aslında üçüncü nedeni birinci nedene indirgeyebiliriz, çünkü sistemin çözümü analitikse kelebek etkisi ortadan kalkar, yani birbirine yakın başlangıç koşulları için birbirine yakın fonksiyon değerleri çıkar.

Garip Çekerler. Poincaré'nin 1900'de bulduğu kaos kavramı, meteorolojist Edward Lorenz'in 1963'te "meteorolojik değişimlerin başlangıç koşullarına hassas bağımlılığı" diye ifade edilen gözlemlerine kadar pek ilgi çekmedi. Çünkü fizikçiler yirminci yüzyılın ilk yarısında kendilerine daha ilginç gelen kuantum fiziğiyle ilgileniyorlardı ve Poincaré'nin bu önemli buluşunu ihmal ettiler. Lorenz, Poincaré'nin 63 yıl önceki bulgusunu ondan bağımsız olarak yeniden buldu. Ele aldığı dinamik sistem için (meteoroloji) başlangıç koşullarında oluşacak küçük değişimlerin sonuca çok büyük etkiler yaptığını gözlemledi ve bu gözlemini matematikselleştirdi. Kelebek benzetmesi onundur. Böylece, uzun süreli hava tahminlerinin olanaksızlığını ortaya koydu.

Lorenz havanın ısı değişimini belirlemek için, birinci basamaktan üç diferansiyel denklemden oluşan

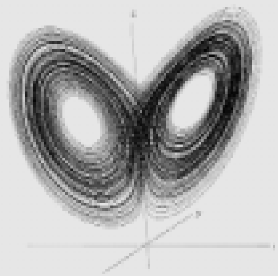
$$dx/dt = -ax + ay$$
$$dy/dt = bx - y - zx$$
$$dz/dt = -cz + xy$$

sisteminin sayısal çözümünü arıyordu. Sistem doğrusal değil ve akışkanlar dinamiğinde kullanılan sistemlerin basitleştirilmiş bir özel durumu. Zamanı gösteren t değişkeni $\Delta t \approx dt$ kadar değiştiğinde, Lorenz, analiz derslerine yeni başlayan öğrencilerin bile itiraz edebilecekleri şu yaklaşık işlemleri yaptı:

$$X = x + \Delta x \approx x + dx = x - axdt + aydt$$
$$Y = y + \Delta y \approx y + dy = y + bxdt + aydt - ydt - zxdt$$
$$Z = z + \Delta z \approx z + dz = z - czdt + xydt$$

(Başlangıç değerleri: $dt = 0{,}02$, $a = 5$, $b = 15$, $c = 1$.) t değiştikçe (X, Y, Z) noktasının üç boyutlu uzayda çizdiği yörüngeyi bilgisayarla çizmeye başladı (bkz. aşağıdaki şekil.) Ortaya çıkan grafik kendisini hiç kesmiyor ve iki nokta civarında dönüyordu. Bu noktalara ***Lorenz Çekerleri***[3] denir.

Lorentz Çekerleri



Yandaki şekilde birbirine çok yakın alınan iki nokta şekildeki yolları takip ederek bir süre birbirine oldukça yakın seyrederler ama kısa bir süre sonra yolları birbirinden tamamıyla bağımsız olur, birinin yolu diğerinin alacağı yolu

Tekrarlar[4]**.** Lorenz kaosu yeniden keşfedince, kaos örnekleri arayanlar çoğaldı. Farklı sistemler ve farklı başlangıç koşulları için "garip çekerler"i canlandıran bilgisayar programları yazıldı. Bu sistemlerin çoğu, matematik diliyle söylersek, tekrarlama yöntemleriyle elde edilir. Bunlar arasında gündemde uzun süre kalan bazı örnekleri sıralayacağız.

Julia ve Mandelbrot Kümeleri. Gaston Maurice Julia (1893-1978) İkinci Dünya Savaşı'nda yü-

3 İngilizcesi "attractors" ya da "strange attractors".

4 İngilizcesi "iterations".

zünden yaralandı. Uzun süre hastanede kaldı. Bu sürede babasının kendisine verdiği polinomlarla ilgili bir kitabı okumaya başladı. Rasyonel bir f fonksiyonu için

$$f^n(X) = f(f(...(f(X))...))$$

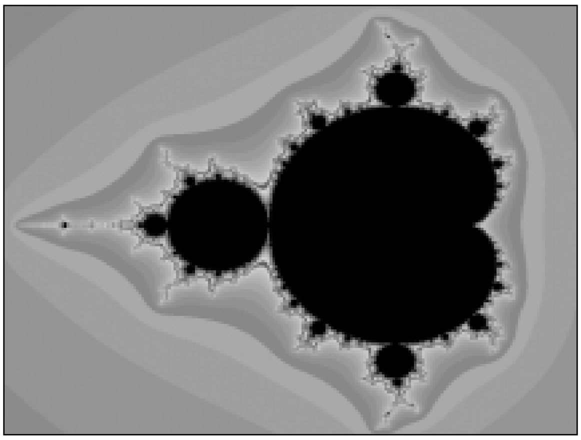
değerlerini inceledi. Yörüngesi, yani $\{f^n(x) : n \in \mathrm{N}\}$ kümesi sonlu olan x noktalarından oluşan kümeleri araştırdı ve bunların ilginç özelliklerini buldu. Ancak, buluşları bir süre sonra unutuldu. 1973'te Benoit Mandelbrot'un (d. 1924) işi yeniden ele alıp karmaşık düzlemde bilgisayarla çizimler yapmasıyla konu yeniden gündeme geldi. Julia ve Mandelbrot kümeleri arasındaki farkı, karmaşık düzlemde yaygın bir örnek olan z a $z^2 + c$ dönüşümü üzerinde açıklayalım.

Dizisel yörüngeleri kolay göstermek için bu dönüşümü $z(n+1) = z(n)z(n) + c$ biçiminde yazalım. Sabit bir c sayısı için $\{z(n) : n \in \mathrm{N}\}$ yörüngesini sonlu yapan $z(0)$ noktalarının karmaşık düzlemde oluşturduğu $J(c)$ kümesine *Julian dolgusu*[5], bu kümenin kenarına da *Julian kümesi* denir. 1919'da G. Julia ve P. Fatou ikilisi, her dolgu kümesinin ya tekparça[6] (yekpare) bir küme ya da bir Cantor kümesi olduğunu ispatladı.

Tekparça her Julia dolgusu bir **Mandelbrot kümesi**'dir. z a $z^2 + c$ dönüşümününde $z(0) = 0$ alınırsa c noktasının yörüngesi bulunur:

$$z(1) = z(0)z(0) + c = c.$$

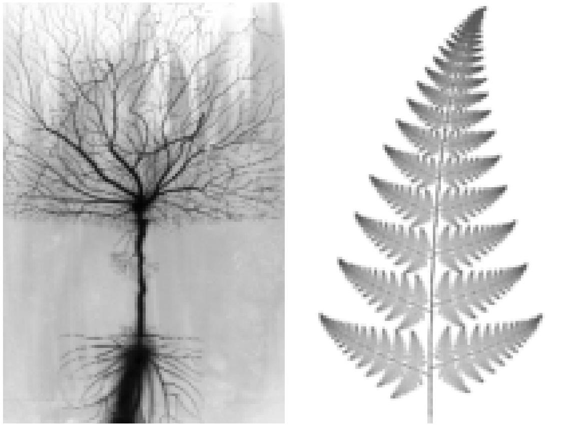
Bu şekilde yörüngesi sonlu olan c noktalarının oluşturduğu küme, $z \to z^2 + c$ dönüşümüne karşılık gelen *Mandelbrot kümesi*dir. Bu küme bağlantılı bir Julian dolgusudur. Kenar uzunluğu sonsuzdur ancak alanı bilinmemektedir.



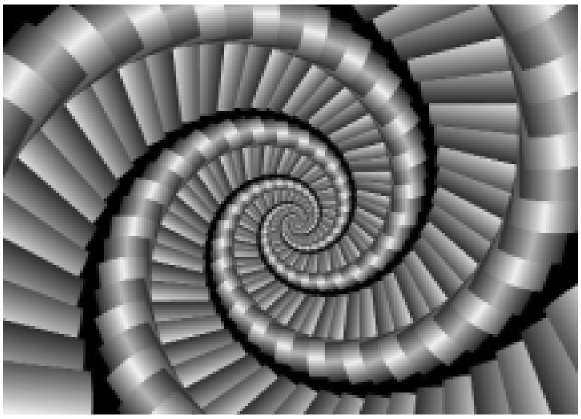
$z \to z^2 + c$ dönüşümüne karşılık gelen Mandelbrot kümesi.

5 İngilizcesi "Julian-filled set".

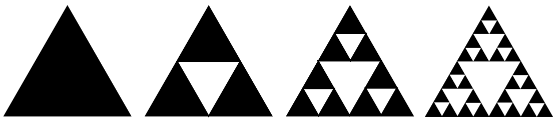
6 İngilizcesi "connected".



Doğal fraktaller: Bir ağaç ve bir eğrelti otu.



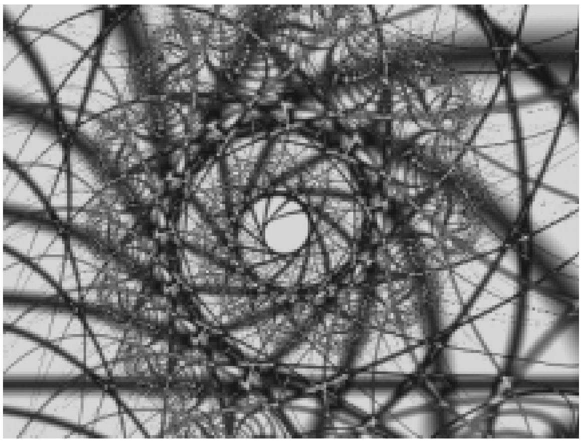
Ev yapımı fraktal



Matematiksel Fraktal: Yukardaki şekildeki gibi, her adımda siyah renkli eşkenar üçgenlerden her biri dört eşkenar üçgene ayrılır ve her adımda ortadaki atılırsa, sonsuz adım sonra kalan şekle ***Sierpinski üçgeni*** adı verilir.

Kaosla Birlikte Matematiğe Giren Yeni Kavramlar. Tekrarlamayla yaratılan ve kaotik sayılan bazı olgular matematiğe yeni ufuklar açtı mı? Buna şimdiden olumlu bir yanıt vermek zordur. Ama kendi kendini tekrarlayan geometrik şekillerden çıkan ***fraktal geometri*** ve ***fraktal boyut*** matematiğe yeni giren kavramlardır.

L-sistem harflerin kısa bir dizimiyle temsil edilen basit bir nesneden başlayarak çok karmaşık nesneler yaratabilen bir tekrarlama yöntemidir. Geçen yüzyılın başlarında ortaya çıkan bu yöntem önceleri ilgi görmedi. 1950'li yıllarda Noam Chomsky L-sistemi doğal dillerin sözdizimine (sentaksa) uyguladı. 1968'de biyolog Aristid Lindenmayer tarafından bitkilerin büyümesini temsil etmek üzere kullanıldı. L-sistem bilgisayar desteğiyle başarılı sonuçlar verip vermeyeceğini düşünmeye değer.



Ev yapımı bir başka fraktal

Bu kavramların matematikte yeni ufuklar açıp açamayacağını zamanla göreceğiz.

Matematik Açısından Asıl Sorun Nedir? Julia kümeleri, Mandelbrot kümeleri, Sierpinski üçgeni, Cantor tozu, eğrelti otu, brokoli gibi örnekleri ister kaotik sistem sayalım ister saymayalım, asıl sorunumuz başkadır. Tekrarlamalarla istediğimiz kadar kaotik sistemler yaratabiliriz. Hatta kendi kendisini tekrar etmesi gerekmeyen sınırsız sayıda ardışık işlemler yaparak sistemi tamamen içinden çıkılmaz duruma getirebiliriz. Bunu şöyle bir örnekle açıklayabiliriz. Elimizde bir $y = f(x)$ fonksiyonu var olsun. Bunun birinci ve ikinci basamaktan türevlerini almayı da içeren sonlu sayıda cebirsel işlemden oluşan bir operatöre, iterasyonun bir adımı gözüyle bakalım. Bu adımları ardışık olarak uygulayarak çok karmaşık bir diferansiyel denklem üretmek kolaydır. İşlemlerden sonra ürettiğimiz denklem şöyle olsun:

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Şimdi, yaptığımız işlemleri unuttuğumuzu varsayalım ve başladığımız fonksiyonu yeniden bulmak isteyelim. Daha iyisi, yaptığımız işlemlerden habersiz olan birisinden bu diferansiyel denklemi çözüp yeniden $y = f(x)$ fonksiyonunu bulmasını isteyelim. Eğer denklemimiz çözüm yöntemi bilinen bir sınıfa girmiyorsa, hiç kimse aranan fonksiyonu bulamayacaktır.

Söz gelimi, Sierpinski üçgeni sonunda düzlemde bir toz halini alacaktır. Olayın geçmişini hiç bilmeyen birisi, bu tozun bir üçgenden Sierpinski iterasyon kuralı ile elde edildiğini ispatlayabilir mi?

Bilimkurgusal bir dil kullanarak konuşalım. Bugün belli tekrarlamalarla "kaotik grafikler" çizen bilgisayarlarımız, günün birinde başkasının çizdiği "kaotik grafiklere" bakarak tekrarlama kuralını ve kuralın başlangıcını çıkarmaya başlarsa matematikçileri çok mutlu edeceklerdir.

Dinamik sistemlerde istenen şey, dinamik kural dediğimiz diferansiyel denklemin (ya da denklem sisteminin) çözümünü bulmaktır. Buna matematikte tersinme (inverse) problemi diyoruz. Cebir, analiz ve diferansiyel denklem kuramlarımız çoğunlukla tersinme problemleriyle uğraşır. Çünkü, determinizmin istediği şeyleri veren odur. Öte yandan, bütün problemleri çözen bir tersinme kuralı yoktur. Bu nedenle problemler kendi içlerinde birbirine benzer sınıflara ayrılıp, her sınıf için ayrı ayrı çözüm yöntemleri geliştirilir. Örneğin, bütün diferansiyel denklemleri çözen bir tek yöntem yoktur. Bunun yerine, her diferansiyel denklem sınıfı için ayrı ayrı çözüm yöntemleri aranır. Kaotik sistemler için de benzer şeyin olması gerekir. "Böl ve yönet" ilkesi yalnız politikada değil, bilimsel bilgi üretiminde de geçerliği olan bir altın kuraldır.

Sonuç. Matematikçiler, Çin'de kanat çırpan kelebeğin nasıl olup da Teksas'ta kasırga yaratacağını açıklayan matematiksel modelden çok, Teksas'ta olan kasırgayı Çin'de hangi kelebeğin hangi kanat çırpışıyla yarattığını bilmek isterler. Günün birinde kaos bir bilim olacaksa, matematikçiler o kelebeği bulmak zorundadır. ♠

Kaynakça

1. Anishchenko, Vadim S., **Dynamical Chaos**, World Scientific, 1995.
2. Aristid Lindenmayer, *Mathematical models for cellular interaction in development*, J. Theoret. Biology, 18:280-315, 1968.
3. Baker, Gregory L. ve Gollub, Jerry B., **Chaotic Dynamics: An Introduction.** Cambridge, England: Cambridge University Press, 1990.
4. Barry Cipra, **What's Happening in the Mathematical Sciences**, Cilt 1-5, AMS Bookstore.
5. Crownover, Richard M., **Introduction to Fractals and Chaos**, Jones and Bartlett, 1995.
6. David Ruelle, **Rastlantı ve Kaos**, TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları, Ankara, 1990.
7. Davis, Brian, **Exploring Chaos: Theory and Experiment.** Perseus Books, 1999.
8. Gary Mar ve Patrick Grim, **Semantics of Paradox: Chaotic Liars, Fractals, and Strange Attractors**, Philosophy and Computing.
9. Hilborn, Robert C., **Chaos and Nonlinear Dynamics**, New York: Oxford University Press, 1994.
10. Ian Stewart, **Does God Play Dice? The Mathematics of Chaos**, Basil Blackwell, 1990.
11. James Gleick, **Kaos**, TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları, Ankara, 1987.