Problemler ve Çözümleri

Refail Alizade*
rafailalizade@iyte.edu.tr

Bu, bir yıl sürecek bir yarışmadır. Grup halinde, okul ya da bireysel olarak katılabilirsiniz.

Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Ayrıca lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

Her sorunun çözümünü ayrı bir kâğıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

Kâğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenciyseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla İzmir adresine 30.09.2005 tarihine kadar adıma gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A316. Hangi n tamsayıları için n tane 4 rakamı içeren 1444 ... 4 sayısı bir tamsayının karesidir?

A317. Bir $ABCDE$ beşgeninde $BC//AD$ ve $BD//AE$'dir. $[CD]$ ve $[DE]$ kenarlarının orta noktaları sırasıyla K ve L ise ve $[BL]$ ve $[AK]$ doğru parçalarının kesişim noktası O ise, $KDLO$ dörtgeninin ve ABO üçgeninin alanlarının eşit olduklarını kanıtlayınız.

A318. Herbirinin ağırlığı 21'den büyük olmayan bir tamsayıya eşit olan birbirinden farklı n tane ağırlık verilmiştir. Bu ağırlıklar ne olursa olsun, toplam ağırlıkları birbirine eşit olan iki çift ağırlık bulunmasını sağlayan en küçük n sayısı kaçtır?

A319. a, b ve c gerçel sayıları $a < b < c$ eşitsizliklerini sağlar. $1/(x-a) + 1/(x-b) + 1/(x-c) = 0$ denkleminin $a < x_1 < b < x_2 < c$ eşitsizliklerini sağlayan iki x_1 ve x_2 kökünün olduğunu kanıtlayınız.

A320. $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinomu $x = -1$, 0, 1 ve 2 için tamsayı değerleri alıyor. Her x tamsayısı için bu polinomun tamsayı değeri aldığını kanıtlayınız.

* İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü öğretim üyesi.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y316. 2^n sayısının onluk tabanda basamaklarının toplamının 5'e eşit olmasını sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

Y317. $ABCD$ dışbükey dörtgeninin alanı S'dir. Köşeleri $[AC]$, $[AD]$, $[BD]$ ve $[BC]$ doğru parçalarının orta noktaları olan dörtgenin alanının $S/2$'den büyük olmadığını kanıtlayınız.

Y318. 1, 2, 3, ..., $3n$ sayıları her biri n elemandan oluşan üç kümeye bölündü. Bölünme ne şekilde olursa olsun, seçilen sayılardan biri diğer ikisinin toplamına eşit olacak şekilde her kümeden birer eleman seçilebileceğini kanıtlayınız.

Y319. (0, 1) aralığından alınmış her x, y, z gerçel sayıları için

$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) < 1$$

eşitsizliğinin sağlandığını kanıtlayınız.

Y320. Üç basamaklı bir pozitif tamsayıdan bu sayının basamaklarının küplerinin toplamı çıkarıldığında elde edilen fark en fazla kaç olabilir?

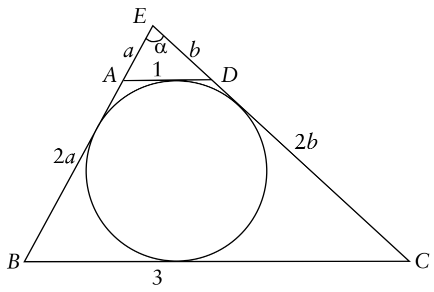
ESKİ SORULARA ÇÖZÜMLER

(Güz 2004, yıl 13, sayı 3)

A306. *Altıncı dereceden kuvvetinin ondalık yazılımı* 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4 *rakamlarından oluşan tüm pozitif tamsayıları bulunuz.*

Çözüm. 10^6 sayısı yedi basamaklı, koşulları sağlayan A^6 sayısı ise sekiz basamaklı olduğundan $A > 10$'dur. $20^6 = 64 \cdot 10^6$ olduğundan ve A^6 sayısının ilk basamağı en fazla 4 olabileceğinden, $A < 20$'dir. A^6 sayısının basamakları toplamı 3'e böldüğünden bu sayı ve dolayısıyla A sayısı da 3'e bölünür. Bu durumda A sayısı 12, 15, 18 dışında bir sayı olamaz. 15^6 sayısı 5'le bittiğinden $A \neq 15$'dir. $12^6 = 2.985.984$ ve $18^6 = 34.012.224$ olduğundan sadece 34.012.224 sayısı koşulu sağlar.

A307. *İçteğet çemberi bulunan bir yamuğun taban uzunlukları* 1 *ve* 3*'tür. Yamuğun yan kenarlarının arasındaki açı en fazla kaç derece olabilir?*



Çözüm: $ABCD$ yamuğunun BA ve CD yan kenarlarının uzantılarının kesişim noktasını E ile gösterelim. $|AE| = a$ ve $|DE| = b$ olsun. AED ve BEC üçgenlerinin benzerliğinden $|AB| = 2a$ ve $|CD| = 2b$ elde edilir. $2a + 2b = |AB| + |CD| = |AD| + |BC| = 4$ eşitliğinden de $a + b = 2$ bulunur. AED üçgenine kosinüs teoremi uygulandığında

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = 1$$

olduğundan

$$(a + b)^2 - 2ab - 2ab \cos \alpha = 1$$

ve

$$ab(1 + \cos \alpha) = 3/2$$

elde edilir. Aritmetik ve geometrik ortalamalar arasındaki eşitsizlikten dolayı

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = 1$$

olduğundan $\cos \alpha \leq 1/2$'dir. Bu durumda α'nın en büyük değeri 60°'dir.

A308. *Kongreye çeşitli ülkelerden* 1000 *kişi katılıyor. Her üç kişi kendi aralarında anlaşabiliyor (bunlardan biri ötekiler için tercümanlık yapabilir). Kongreye katılanları, her odada* 2 *kişi olacak ve bu kişilerin kendi aralarında anlaşabileceği şekilde* 500 *odaya yerleştirilebileceğini kanıtlayınız.*

Çözüm: Herhangi 3 kişi alalım. Bunlardan ikisi kendi aralarında anlaşabiliyor. Bu iki kişiyi bir odaya yerleştirelim. Aynı şekilde geriye kalan 998 kişiden üçünü alıp bunlardan ikisini diğer bir odaya yerleştirelim v.s. bu işlemi geriye A, B, C, D gibi 4 kişi kalana kadar sürdürelim. $\{A, B, C\}$ üçlüsünden biri (diyelim A) diğer ikisi ile anlaşabiliyor. Öte yandan B ve C'den biri (diyelim B) D ile anlaşabiliyor (çünkü $\{B, C, D\}$ üçlüsünden biri diğer ikisi ile anlaşabiliyor). Bu durumda $\{A, C\}$ ikilisini bir odaya, $\{B, D\}$ ikilisini de başka bir odaya yerleştiririz.

A309. *a, b, c, d gerçel sayıları*

$$a^2 + b^2 = 1,$$
$$c^2 + d^2 = 1,$$
$$ac + bd = 0$$

eşitliklerini sağlar. $ab + cd$ ifadesinin alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Çözüm: $a^2 + b^2 = 1$ oduğundan $\sin \alpha = a$ ve $\cos \alpha = b$ olacak şekilde bir α açısı bulunur. Benzer şekilde $\sin \beta = c$, $\cos \beta = d$ olacak şekilde bir β açısı bulunur. Dolayısıyla

$$0 = ac + bd = \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta$$
$$= \cos (\alpha - \beta)$$

eşitliği geçerlidir. Buradan da

$$ab + cd = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \cos \beta$$
$$= (\sin 2\alpha + \sin 2\beta)/2$$
$$= \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 0$$

elde edilir.

A310. 99 *tane* 9 *ardarda yazılmıştır. Elde edilecek* 199 *basamaklı sayı tamkare olacak şekilde bu rakamların sağına* 100 *rakam daha yazılabileceğini kanıtlayınız.*

Çözüm: İlk 99 basamağı 9 olan 199 basamaklı en büyük sayı $10^{199} - 1$'dir. Bu sayıdan büyük olmayan en büyük tamkare a^2 olsun. O halde

$$a^2 \leq 10^{199} - 1 < 16 \cdot 10^{198} = (4 \cdot 10^{99})^2$$

eşitsizliğinden dolayı $a \leq 4 \cdot 10^{99}$'dur. Dolayısıyla

$$10^{199} - 1 - a^2 < (a+1)^2 - a^2 = 2a + 1$$
$$\leq 2 \cdot 4 \cdot 10^{99} + 1,$$

buradan da

$$a^2 > 10^{199} - 1 - 8 \cdot 10^{99} - 1 > 10^{199} - 10^{100}$$

elde edilir. $10^{199} - 10^{100}$, ilk 99 basamağı 9 olan 199 basamaklı sayılardan en küçüğü olduğundan a^2 sayısının ilk 99 basamağı 9 olacak. Böylece a^2 sayısı koşulları sağlar.

Y306. *Beş basamaklı abcde sayısı* 41'*e bölünüyor. Beş basamaklı eabcd sayısının da* 41'*e bölündüğünü kanıtlayınız.*

Çözüm: Dört basamaklı $abcd$ sayısını X ile gösterelim. O halde

$$10X + e = abcde \equiv 0 \ (mod\ 41)$$

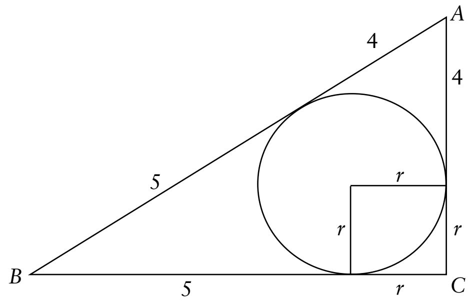
dir. $10^5 - 1 = 99999$ sayısı 41'e bölündüğünden

$$10 \cdot (eabcd) = 10(10^4 e + X)$$
$$\equiv 10^5 e + 10X + e - e$$
$$\equiv (10^5 - 1)\, e \equiv 0 \ (mod\ 41)$$

elde edilir. 10 ile 41 aralarında asal olduğundan $eabcd$ sayısı da 41'e bölünür.

Çözenler: Toplam 48 kişi. Tüm çözenlerin adlarını koyamayacağız ne yazık ki.

Y307. *Bir dik üçgenin içteğet çemberi, hipotenüsü uzunlukları 4 ve 5 olan iki parçaya bölüyor. Üçgenin alanını bulunuz.*



Çözüm: ABC dik üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı r olsun. Pisagor bağıntılarından

$$(r + 5)^2 + (r + 4)^2 = 9^2$$

çıkar, buradan da $r^2 + 9r = 20$ elde edilir. O halde üçgenin alanı

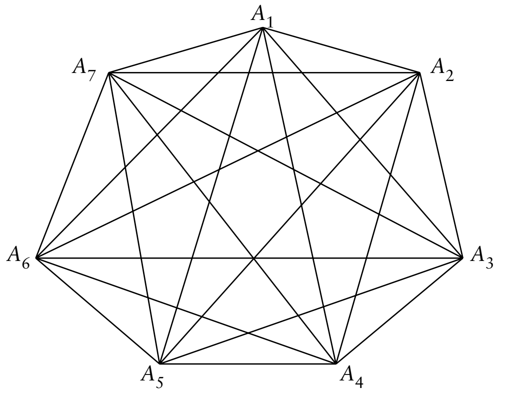
$$r\cdot[9 + (5 + r) + (r + 4)]/2 = r^2 + 9r = 20$$

olur.

Çözenler: 61 kişi.

Y308. *Birkaç voleybol takımı aralarında bir turnuva yaptı. Herhangi iki A ve B takımları alındığında, eğer A, B'yi yenmişse, A'ya yenilmiş ve B'yi yenmiş bir C takımı bulunur. Turnuvaya en az kaç takım katılmıştır?*

Çözüm: En az bir galibiyeti ve en az bir mağlubiyeti olan bir A takımının bulunduğu açıktır. A, B'yi yenmişse, A'ya yenilmiş ve B'yi yenmiş olan bir C takımı bulunur. O halde A'ya yenilmiş ve C'yi yenmiş olan bir D takımı bulunur. D, C'yi yenmiş, B ise C'ye yenilmiştir, dolayısıyla $D \neq B$'dir. Böylece A'nın yenmiş olduğu en az 3 takım bulunur. Benzer şekilde A'yı yenmiş olan en az 3 takım bulunduğu kanıtlanır. O halde turnuvaya en az 7 takım katılmıştır. Koşulları sağlayan 7 takım örneği yukardaki şekilde verilmiştir ($X \to Y$, X'in Y'yi yendiğini göstermektedir.)



Çözenler: İbrahim Çimentepe (İzmir Özel Yamanlar Lisesi), Aras Erzurumluoğlu (ODTÜ Matematik), Zekeriya Güney (Muğla Üniversitesi Matematik Topluluğu).

Y309. *$a_1, a_2, ..., a_n$ pozitif gerçel sayıları*

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$$

eşitliğini sağlar. $i < j$ olmak üzere tüm

$$\frac{a_ia_j}{a_i + a_j}$$

sayılarının toplamının en fazla $(n - 1)/4$ olabileceğini kanıtlayınız.

Çözüm: Aritmetik ve geometrik ortalamalar arasındaki eşitsizlikten

$$\sqrt{a_ia_j} \le \frac{a_i + a_j}{2}$$

buradan da $a_i\, a_j \le (a_i + a_j)^2/4$ elde edilir. O halde

$$\frac{a_ia_j}{a_i + a_j} \le \frac{(a_i + a_j)^2}{4(a_i + a_j)} = \frac{a_i + a_j}{4}$$

olduğundan, $i < j$ olmak üzere tüm $a_ia_j/(a_i + a_j)$ sayılarının toplamı, $i < j$ olmak üzere tüm $(a_i + a_j)/4$ sayılarının toplamından büyük değildir. Son toplamda her a_i sayısına tam $n - 1$ kez rastlandığından bu toplam $(n - 1)(a_1 + a_2 + ... + a_n)/4 = (n - 1)/4$ olacak. Öte yandan $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1/n$ alındığında her $i < j$ için $a_ia_j/(a_i + a_j) = 1/2n$ olacak, böyle ikililerin sayısı $n(n-1)/2$ olduğundan, $i < j$ olmak üzere, tüm $a_i\, a_j/(a_i + a_j)$ sayılarının toplamı $(n - 1)/4$ olur.

Çözenler: Suat Akbulut (İzmir Özel Yamanlar Lisesi), Ertuğrul Aksünger (Antalya Kültür Dersanesi), Mustafa Ataklı (Safa Dersanesi, Gaziantep), Bilgin Canpolat (H.F.Z. Anadolu Lisesi, Çerkezköy, Tekirdağ), Davut Çalık (İzmir Özel Yamanlar Lisesi), Alper Çay (Kayseri Uzman Dersanesi), İbrahim Çimentepe (İzmir Özel Yamanlar Lisesi), Furkan Erden (İzmir Özel Yamanlar Lisesi), Ahmet Hamdi Fazlıoğlu (İzmir Özel Yamanlar Lisesi), Ayhan Gündüz (Osmaniye), Zekeriya Güney (Muğla Üniversitesi Matematik Topluluğu), Osman Öcal (İzmir Özel Yamanlar Lisesi), Tufan Özdin (İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü), Burak Sağlam (İzmir Özel Yamanlar Lisesi), Tuğba Uzluer (İzmir Özel Yamanlar Lisesi), Semih Yavuz (İzmir Özel Yamanlar Lisesi), Hasan Zerze (ODTÜ, Kimya Mühendisliği Böl.).

Y310. *$n \geq 5$ öğeden oluşan bir kümede $n + 1$ tane birbirinden farklı üç elemanlı altküme alınmıştır. Bunlardan tam bir tane ortak elemanı olan ikisinin bulunduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm: Tersini varsayalım. O halde alınan üç elemanlı altkümelerden herhangi ikisi ya kesişmiyor, ya da kesişimler tam 2 eleman içeriyor. Alınan altkümeler kümesinde ~ bağıntısını şeyle tanımlayalım: $A \cap B$ tam iki eleman içeriyorsa veya $A = B$ ise $A \sim B$ olsun. ~ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterelim. Bu bağıntının yansımalı ve simetrik olduğu açıktır. $A \sim B$ ve $B \sim C$ olsun. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, d\}$ ise, $B \sim C$ olduğundan C altkümesi a ve b elemanlarından en az birini içermek zorunda. Bu durumda $C \cap A \neq \varnothing$'dır. $C \cap A$ bir elemandan oluşamayacağı için $C \sim A$'dır. Böylece ~ geçişmeli bağlantıdır ve dolayısıyla bir denklik bağıntısıdır. O halde alınan üç elemanlı altkümeler kümesi ayrık denklik sınıflarına bölünecek. Bu sınıflardan herhangi birini aldığımızda üç durum olabilir:

1) Bu sınıftaki altkümelerin birleşimi sadece 3 elemandan oluşur. Bu durumda sınıfta sadece bir altküme bulunur.

2) Sınıftaki altkümelerin birleşimi tam 4 elemandan oluşur. Bu durumda sınıfta en fazla

$$\binom{4}{3} = 4$$

tane altküme bulunur.

3) Sınıftaki altkümelerin birleşimi en az 5 eleman içerir. Sınıftan $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{a, b, d\}$ altkümelerini alalım. Birleşimde en az 5 eleman bulunduğundan a, b, c, d'den farklı olan bir e elemanı ve sınıfta bu e elemanını içeren bir C altkümesi bulunur. $A \sim C$ ve $B \sim C$ olduğundan $C = \{a, b, e\}$ olmak zorundadır. O halde bu sınıftan herhangi bir $D = \{x, y, z\}$ altkümesi alındığında bu altküme a ve b elemanlarından birini (diyelim a'yı) içermezse b, c, d, e elemanlarının dördü de bu altkümede bulunmak zorundadır. Böyle bir şey olamayacağından $D = \{a, b, u\}$ şeklinde olmak zorundadır. Bu durumda sınıftaki altküme sayısı birleşimdeki eleman sayısının 2 eksiğine eşittir.

Böylece üç durumun her birinde sınıftaki altküme sayısı birleşimdeki eleman sayısından fazla değildir. O halde alınan tüm altkümelerin sayısı $n + 1$ de bu altkümelerin birleşimindeki eleman sayısından fazla olamaz. $n + 1 > n$ olduğundan çelişki elde ederiz.

Çözenler: Zekeriya Güney (Muğla Üniversitesi Matematik Topluluğu), Semih Yavuz (İzmir Özel Yamanlar Lisesi), Nami Yıldırım (T. İş Bankası, İzmir).♠

OYAK

Çimento Grubu ve Tübitak Bilim Adamı Yetiştirme Grubu

2005, Üçüncü Oyak Matematik Yarışması Soruları

1. $x^2 + ax + 1 = 0$ denkleminin kökleri s ve t, $x^2 + bx + 1 = 0$ denkleminin kökleri de u ve v olmak üzere,

$$(s+t)(s+u)(s+v)(t+u)(t+v)(u+v) = ab(a+b)^2$$

olduğunu gösteriniz.

2. Her pozitif n sayısı için,

$$\sqrt{4n+1}, \sqrt{4n+2}, \sqrt{4n+3} \text{ ve } \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$$

gerçel sayılarının tam değerlerinin birbirine eşit olduğunu gösteriniz.

3. O_1 merkezli C_1 çemberiyle O_2 merkezli C_2 çemberi A ve B ayrık noktalarında kesişmektedir. O_1B doğrusu C_2'yi B ve F ayrık noktalarında; O_2B doğrusu da C_1 çemberini B ve E noktalarında kesmektedir. EF doğrusuna paralel ve B'den geçen doğru da C_1 çemberini M ve B; C_2'yi de B ve N noktalarında kesmektedir. $|AE| + |AF| = |MN|$ olduğunu gösteriniz.

4. Aşağıdaki denklemin doğru olmasını sağlayan en küçük k doğal sayısını bulunuz:

$A = \{1, 2, ..., 2005\}$ kümesinin k elemanlı her altkümesinde toplamları veya farkları 669 olan iki eleman bulunur.