Doğuş Üniversitesi Matematik Kulübü Matematik Bireysel Yarışması 2004

Soru ve Yanıtlar

Soru 1. $(5 + \sqrt{52})^{-1/3} + (5 - \sqrt{52})^{-1/3} = ?$

Çözüm : $a = \sqrt[3]{5 + \sqrt{52}}$ ve $b = \sqrt[3]{5 - \sqrt{52}}$ olsun. İstenilen toplam

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$$

olur. Oysa $ab = -3$ olduğundan ve

$(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3 = 10 + 3(-3)(a+b)$ eşitliğinden, $(a + b)^3 = 10 - 9(a + b)$ çıkar ve tek çözüm olarak $a + b = 1$ bulunur. Öyleyse,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = -\frac{1}{3}.$$

Soru 2. *İki basamaklı ab doğal sayısı için,*

$$\sqrt{a \cdot b - 8 \cdot a}$$

bir pozitif tamsayı oluyorsa, ab doğal sayısı hangi değerleri alabilir?

Çözüm: $n \in \mathsf{Z}^{>0}$ olmak üzere

$$\sqrt{a \cdot b - 8 \cdot a} = n$$

diyelim. O halde $a(b - 8) = n^2$ olmalıdır. Buradan da $b = 9$ ve $a = n^2$ bulunur. Demek ki $ab = 19$, 49 ve 99 istenilen doğal sayılardır.

Soru 3. $x^2 + 4y^2 = 2x$ *ve* $xy = y$ *sisteminin çözüm kümesi nedir?*

Çözüm: $xy = y$ olduğundan $y = 0$ ya da $x = 1$. Eğer $y = 0$ ise $x^2 = 2x$ ve $x = 0, 2$. Eğer $x = 1$ ise $4y^2 = 2x - x^2 = 2 - 1 = 1$ ve $y = \pm 1/2$. Çözüm kümesi $\{(0, 0), (2, 0), (1, 1/2), (1, -1/2)\}$'dir.

Soru 4. $2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 20 = 0$ *denkleminin üç kökü* $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ *ve* $x_3 = 5$ *ise,* $b + c$ *toplamı kaçtır?*

Çözüm: $x_1x_2x_3x_4 = 20/2 = 10$ olduğundan, $x_4 = 10/10 = 1$'dir. Demek ki

$$-a/2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 2 + 5 + 1 = 9$$

ve $a = -18$. Denklemde $x = 1$ konulursa

$$2 + a + b + c + 20 = 0,$$

yani $b + c = -4$ bulunur.

Soru 5. $\{1, 2, 3, ..., 99, 100\}$ *kümesinin n elemanlı her altkümesinde farkı 9 olan en az iki eleman bulunması için n sayısı <u>en az</u> kaç olmalıdır?*

Çözüm: İçinde x ve $x + 9$ gibi iki sayı bulunan

$$\{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

kümesi için

$$\{a_1, a_2, ..., a_n\} \cap \{a_1+9, a_2+9, ..., a_n+9\} \neq \emptyset$$

olmalıdır. Bunu garantileyebilmek için ise

$$n + n - 1 \geq 100 + 9 = 109,$$

yani $n \geq 55$ olmalıdır. Bu koşul yeterlidir de: $i = 0$, 1, 2, 3, 4, 5 için, $18i + 1$ ile $18i + 9$ arasındaki sayılar kümesinin 54 tane elemanı vardır ve herhangi iki elemanının arasındaki fark 9 olamaz.

Soru 6. $50! + 7^{133}$ *sayısının 25'e bölümünden elde edilen kalan nedir?*

Çözüm: $7^2 = 49 \equiv -1 \pmod{25}$ ilişkisinden

$$50! + 7^{133} \equiv 0 + 7(-1)^{66} \equiv 7 \pmod{25}$$

bulunur.

Soru 7. *1'le başlayan, iki rakamı aynı ve diğerleri farklı olan kaç tane dört basamaklı sayı vardır?*

Çözüm: $1xxy$, $1xyx$, $1xyy$, $1xy1$, $1x1y$, $11xy$ şeklindeki her sayıdan $9 \times 8 = 72$ tane vardır. O halde $6 \times 72 = 432$ sayı vardır.

Soru 8. *Sadeleştirilemeyen kesir olarak* $a/20$ *şeklinde yazılan, 1'den küçük pozitif kesirli sayıların toplamını bulunuz.*

Çözüm: a sayısı $\{1, 2, ..., 19\}$ kümesinden seçilmeli. Buna göre toplam

$$(1 + 3 + 7 + 9 + 11 + 13 + 17 + 19)/20 = 4$$

bulunur.

Soru 9. *Çarpımları 1 olan* x, y, z *pozitif gerçel sayılarının*

$$x + 1/z = 5,$$
$$y + 1/x = 29$$

eşitliklerini sağladığı bilindiğine göre $z + 1/y$ *değeri kaçtır?*

Çözüm: $1/z = 5 - x$, $y = 29 - 1/x$ olur. Buradan $x(29 - 1/x) = xy = 1/z = 5 - x$ çıkar ve denklem çözüldüğünde de $x = 1/5$, $y = 24$, $z = 5/24$ ve $z + 1/y = 1/4$ bulunur.

Soru 10. *k ve n pozitif tamsayıları için*

$$k{\cdot}n! = ((3!)!)!/3!$$

ise $k + n$ sayısının en küçük değeri kaçtır?

Çözüm: $((3!)!)! = (6!)! = 720!$ olduğundan,

$$k{\cdot}n! = 720!/3! = (719!)(720/3!) = 120{\cdot}719!$$

yani $n = 719$ ve $k = 120$ seçebiliriz. Böylece

$$k + n = 719 + 120 = 839$$

olur. Diğer seçimler $k + n$ sayısını büyütür.

Soru 11. *$3^a = x$, $5^a = y^{-1}$ ve $675^{-a} = x^n y^m$ ise $n + m$ kaçtır?*

Çözüm: Verilenden

$$x^n y^m = 675^{-a} = (3^3 5^2)^{-a} = (3^a)^{-3}(5^a)^{-2} = x^{-3}(y^{-1})^{-2} = x^{-3}y^2$$

bulunur. Buradan da $n + m = -3 + 2 = -1$ bulunur.

Soru 12. *Düzgün bir altıgenin köşeleri yarıçapı 3 cm olan çemberin üzerindedir. Bu köşelerden iki tanesi seçildiğinde aralarındaki uzaklığın 3 cm olma olasılığı nedir?*

Çözüm: Altıgenin köşeleri A, B, C, D, E, F olsun. O zaman $|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FA| = 3$ cm.'dir. Böylece istenilen olasılık

$$\frac{6}{\binom{6}{2}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

bulunur.

Soru 13. *A, B, C pozitif tamsayılar olmak üzere $4C = 7A$ ve $5A = 3B$ ise $A + B + C$ toplamının <u>en küçük</u> değeri nedir?*

Çözüm: Verilenden $20C = 35A = 21B$ çıkar. Demek ki $2^2{\cdot}5{\cdot}C = 5{\cdot}7{\cdot}A = 3{\cdot}7{\cdot}B$. Ayrıca

$$\text{okek}(2^2{\cdot}5,\ 5{\cdot}7,\ 3{\cdot}7) = 2^2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7 = 420.$$

Bunlardan

$$A = 420/35 = 12,$$
$$B = 420/21 = 20,$$
$$C = 420/20 = 21$$

ve $A + B + C = 12 + 20 + 21 = 53$ çıkar.

Soru 14. *$25 + 25x - x^2 - x^3 > 0$ eşitsizliğini sağlayan pozitif tamsayıların toplamı kaçtır?*

Çözüm: $x^3 + x^2 - 25x - 25 = (x+1)(x+5)(x-5) < 0$ olacağından, çözümler

$$(-\infty, -5) \cup (-1, 5)$$

kümesindedir. Çözüm kümesi içinde pozitif tamsayılar ise $x = 1, 2, 3$ ve 4 olacaktır. Böylece aranan toplam 10 bulunur.

Soru 15. *a, b, c pozitif tamsayılardır.*

$$a/8 = 6/b = c$$

olduğuna göre a'nın alacağı en büyük değer için

$$a + b + c$$

toplamı kaç olur?

Çözüm: $a/8 = 6/b = c$ eşitliklerinde a'nın alabileceği en büyük değer, b'nin alabileceği en küçük değerle hesaplanabilir. $b = 1$ alındığında $a = 48$ ve $c = 6$ bulunur. Böylece $a + b + c = 48 + 6 + 1 = 55$.

Soru 16. *m, n sayıları*

$$mn + m + n = 71 \text{ ve } m^2n + mn^2 = 880$$

eşitliklerini sağlayan pozitif tamsayılardır. $m^2 + n^2$ kaçtır?

Çözüm: $s = m + n$, $p = nm$ alalım. $sp = 880$ ve $s + p = 71$ olduğundan, s ve p sayıları

$$x^2 - 71x + 880 = 0$$

denkleminin kökleridir. Demek ki

$$\{s, p\} = \{16, 55\}.$$

Eğer $p = 55$, $s = 16$ ise kolaylıkla $m = 5$ ve $n = 11$ bulunur. $s = 55$, $p = 16$ ise çözüm vermez. Böylece $m^2 + n^2 = 5^2 + 11^2 = 146$ çıkar.

Soru 17. *Kaç tane pozitif k tamsayısı için* EKOK$(6^6, 8^8, k) = 12^{12}$ *olur?*

Çözüm: $12^{12} = 2^{24}3^{12}$, $6^6 = 2^6 3^6$ ve $8^8 = 2^{24}$ olduğundan, $k = 2^a 3^b$ şeklinde olmalı. a sayısı 0, 1, ..., 24 değerlerini alabilir ama $b = 12$ olmalıdır. Böylece koşulu sağlayan 25 tane k sayısının bulunduğu görülür.

Soru 18. *Üç pozitif tamsayının çarpımı bu sayıların toplamının 6 katıdır. Bu tamsayılardan birinin diğer ikisinin toplamı olduğu bilindiğine göre, bu üç sayının <u>birbirinden farklı</u> tüm <u>çarpımlarının toplamı</u> kaçtır?*

Çözüm: Tam sayılar a, b ve $a + b$ olsun. O halde $ab(a+b) = 12(a+b)$. Buradan da $ab = 12$ bulunur. Öyleyse $\{a, b\} = \{1, 12\}$, $\{2, 6\}$ ya da $\{3, 4\}$ olacaktır. Dolayısıyla $ab(a+b) = 156$, 96 veya 84 ve bunların toplamı olarak $156 + 96 + 84 = 336$ bulunur.

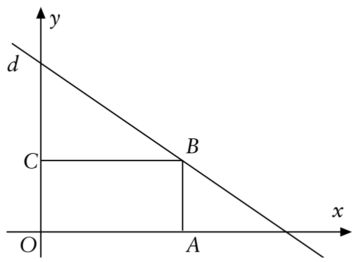
Soru 19. *Gerçel sayılardan tamsayılara f fonksiyonu $n < x \le n+1$, $n \in \mathbb{Z}$ için $f(x) = n+1$ olarak tanımlanıyor. Kaç tane $n < 500$ pozitif tamsayısı için $f(\log_2 n)$ pozitif çift sayıdır?*

Çözüm: $2^{2k-1} < n \le 2^{2k}$ için $f(\log_2 n) = 2k$ olacağı için istenen sayı $(2^8 - 2^7) + (2^6 - 2^5) + \ldots = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1 = 170$ tir.

Soru 20. 20×5^a *sayısının pozitif bölenleri sayısı 27 ise a kaçtır?*

Çözüm: $20\cdot5^a = 2^2 5^{a+1}$ olduğundan $3(a + 2) = 27$, buradan da $a = 7$ bulunur.

Soru 21. *Aşağıdaki şekildeki OABC dikdörtgeninin B köşesi, denklemi* $y = -x/4 + 4$ *olan d doğrusu üzerindedir. OABC dörtgeninin çevresi 20 cm ise alanı kaç* cm^2 *dir?*



Çözüm: $OA = x$ olsun. O halde $20 = Ç(OABC) = 2(x + y) = 2x - x/2 + 8$ ve $x = 8$'dir. Buradan da

$$A(OABC) = xy = 8(-8/4 + 4) = 16$$

bulunur.

Soru 22. *x ve y gerçel sayıları*

$$\log_8 x + \log_4(y^2) = 5$$

ve

$$\log_8 y + \log_4 (x^2) = 7$$

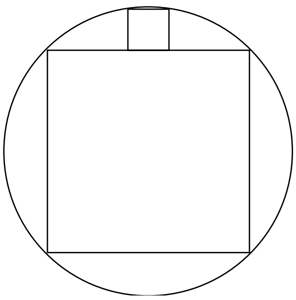
denklemlerini sağladığına göre, xy çarpımı kaçtır?

Çözüm: Birinci denklemden

$$5 = \log_8 x + \log_4 y^2$$
$$= (1/3)\log_2 x + \log_2 y = \log_2 (x^{1/3}y)$$

çıkar, yani $x^{1/3}y = 2^5 = 32$. Benzer şekilde $xy^{1/3} = 2^7 = 128$ bulunur. Buradan da $xy = 2^9 = 512$ çıkar.

Soru 23. *Aşağıdaki şekildeki büyük karenin alanı küçüğün alanının kaç katıdır?*



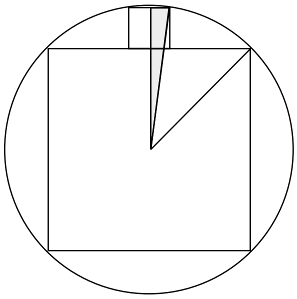
Çözüm: Büyük karenin bir kenarı 2, küçüğünün kenarı $2x$ olsun. O zaman çemberin çapı $\sqrt{2}$'dir. Dolayısıyla aşağıdaki şekildeki gri dik üçgenden

$$(1+ 2x)^2 + x^2 = 2$$

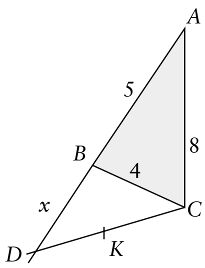
çıkar, yani

$$5x^2 + 4x - 1 = 0 \text{ ve } x = 1/5.$$

Büyük karenin alanının küçük karenin alanına oranı $(2/2x)^2 = 25$'tir.



Soru 24. *K noktası şekildeki ABC üçgeninin dış teğet çemberinin merkezidir.* $|AB| = 5$ *cm,* $|BC| = 4$ *cm ve* $|AC| = 8$ *cm ise CK'yle AB'nin kesişim noktası olan D noktası için,* $|CD|$ *kaç cm'dir?*



Çözüm: DC doğrusu ABC üçgeninin C köşesi-

$$\frac{x}{x+5} = \frac{4}{8}$$

nin dış açıortayıdır ve buna göre

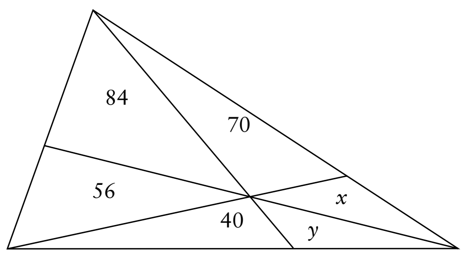
olur ve buradan da $x = 5$ bulunur. Kenarortay ba-

$$4^2 = \frac{|CD|^2 + 8^2}{2} - \frac{100}{4}$$

ğıntısından

elde ederiz ve yanıt $|CD| = 3\sqrt{2}$ çıkar.

Soru 25. *Bir üçgenin içinde bir nokta alınıyor ve üçgenin köşelerinden bu noktadan geçen doğrular çiziliyor, böylece üçgen 6 parçaya bölünüyor. Parçaların alanları aşağıdaki şekildeki gibi* 35, 56,



70, 84, *x ve y olduğuna göre, x/y kaçtır?*

Çözüm: $x\cdot40\cdot84 = y\cdot70\cdot56$ olduğundan,

$$x/y = 7/5$$

bulunur.

Soru 26. *Bir d rakamı için*

$$0{,}d25d25d25\ldots = n/810$$

olduğu bilindiğine göre, n pozitif tamsayısının değeri kaçtır?

Çözüm: $n/810 = 0{,}d25d25 = d25/999$ olduğundan

$$n = (810/999)(d25) = (30/37)(d25).$$

Buradan da $37n = 3000d + 750$ ve

$$3d + 10 \equiv 0 \pmod{37}$$

bulunur. Böylece $d = 9$ ve $n = 750$ olur.

Soru 27. $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{16} - x^{17}$ *polinomunda* $x = y - 1$ *dönüşümü kullanıldığında* y^2 *teriminin katsayısı ne olur?*

Çözüm: $p(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{16} - x^{17}$ $= (1 - x^{18})/(1 + x)$ şeklinde yazıldığında $x = y - 1$ kullanılarak

$$p(x) = \frac{1-x^{18}}{1+x} = \frac{1-(y-1)^{18}}{y}$$

buradan da y^3 teriminin katsayısı

$$\binom{18}{3} = \frac{18!}{15!\,3!} = 816$$

bulunur.

Soru 28. $2y - (3a - 1)x + 5 = 0$ *doğrusuyla* $3y + 3ax + 2 = 0$ *doğrusunun dik kesişmesi için* a*'nın alacağı değerler toplamı nedir?*

Çözüm: Doğrular

$$y = (3a - 1)x/2 - 5/2$$

ve

$$y = -ax - 2/3$$

şeklinde yazıldığında $m_1 = (3a - 1)/2$ ve $m_2 = -a$ olduğu görülür. Doğruların dik olması istendiğinden

$$(3a - 1)(-a)/2 = m_1m_2 = -1$$

yani

$$0 = 3a^2 - a - 2 = (3a + 2)(a - 1)$$

dır. Buradan da $a_1 + a_2 = -2/3 + 1 = 1/3$ bulunur.

Soru 29. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ *çemberine dışındaki* $P(5,7)$ *noktasından çizilen teğetlerin değme noktaları* T_1 *ve* T_2 *ise* $|T_1T_2|$ *kaç br'dir?*

Çözüm. Bir sonraki şekilden takip edin. $t = |T_1T_2|/2$ olsun.

$$|T_1P|^2 + 3^2 = |PM|^2 = (5 - 2)^2 + (7 - 3)^2$$

eşitliğinden $|T_1P| = 4$ bulunur ve aynı eşitlikten

$$|PM| = (4^2 + 3^2)^{1/2} = 5$$

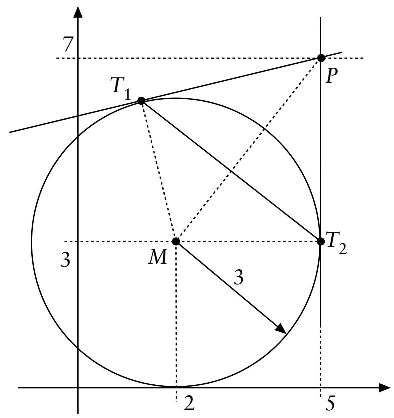
çıkar. Öte yandan T_1PM diküçgeninden dolayı,

$$t/3 = |T_1P|/|PM| = 4/5$$

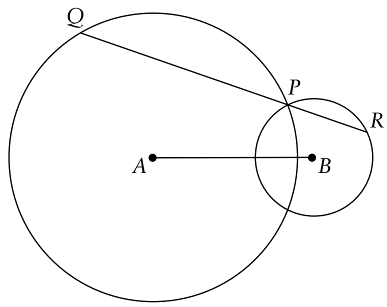
tür. Dolayısıyla $t = 12/5$ bulunur. Buradan da

$$|T_1T_2| = 2t = 24/5$$

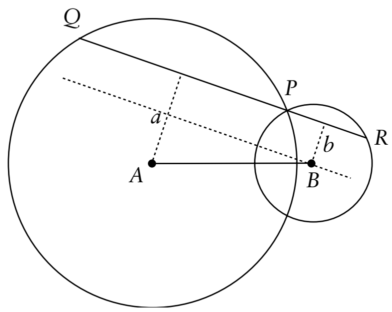
bulunur.



Soru 30. *Merkezleri A ve B, yarıçapları sırasıyla 8 ve 6 olan çemberlerin merkezlerinin uzaklığı 12 ve bunların bir P kesim noktasından geçen ortak QR kirişi için |QP| = |PR|'dir. |QR| uzunluğu kaç birim olmalıdır?*



Çözüm: $|QR| = 2x$ diyelim. A ve B'den QP ve PR'ye indirilen dikmelerin uzunlukları sırasıyla a ve b olsun. B'den QR'ye paralel çizildiğinde oluşan



dik üçgenden $x^2 + (a - b)^2 = 12^2$ ve

$$a^2 = 64 - (x/2)^2,$$
$$b^2 = 36 - (x/2)^2$$

bulunur. Son iki denklemden $a^2 - b^2 = 28$ ve $x^2 = 200 - 2(a - b)^2$ çıkar. Bu son denklemden ve $x^2 + (a - b)^2 = 12^2$ denkleminden biraz hesapla $(a + b)^2 = 56$ bulunur. Bu ve $a^2 - b^2 = 28$ denklemlerinden $a - b = \sqrt{14}$ çıkar, buradan da $x = \sqrt{130}$. ♠