



# Doğu Üniversitesi Matematik Kulübü

## Matematik Bireysel Yarışması 2004

### Soru ve Yanıtlar

**Soru 1.**  $(5 + \sqrt{52})^{-1/3} + (5 - \sqrt{52})^{-1/3} = ?$

**Çözüm :**  $a = \sqrt[3]{5 + \sqrt{52}}$  ve  $b = \sqrt[3]{5 - \sqrt{52}}$  olsun.  
İstenilen toplam

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$$

olur. Oysa  $ab = -3$  olduğundan ve  $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3 = 10 + 3(-3)(a+b)$  eşitliğinden,  $(a+b)^3 = 10 - 9(a+b)$  çıkar ve tek çözüm olarak  $a+b = 1$  bulunur. Öyleyse,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = -\frac{1}{3}$$

**Soru 2.** İki basamaklı  $ab$  doğal sayısı için,

$\sqrt{a \cdot b - 8 \cdot a}$   
bir pozitif tamsayı oluyorsa,  $ab$  doğal sayısı hangi değerleri alabilir?

**Çözüm:**  $n \in \mathbb{Z}^{>0}$  olmak üzere

$$\sqrt{a \cdot b - 8 \cdot a} = n$$

diyelim. O halde  $a(b-8) = n^2$  olmalıdır. Buradan da  $b = 9$  ve  $a = n^2$  bulunur. Demek ki  $ab = 19, 49$  ve  $99$  istenilen doğal sayılardır.

**Soru 3.**  $x^2 + 4y^2 = 2x$  ve  $xy = y$  sisteminin çözüm kümesi nedir?

**Çözüm:**  $xy = y$  olduğundan  $y = 0$  ya da  $x = 1$ . Eğer  $y = 0$  ise  $x^2 = 2x$  ve  $x = 0, 2$ . Eğer  $x = 1$  ise  $4y^2 = 2x - x^2 = 2 - 1 = 1$  ve  $y = \pm 1/2$ . Çözüm kümesi  $\{(0, 0), (2, 0), (1, 1/2), (1, -1/2)\}$ 'dir.

**Soru 4.**  $2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 20 = 0$  denkleminin üç kökü  $x_1 = 1, x_2 = 2$  ve  $x_3 = 5$  ise,  $b + c$  toplamı kaçtır?

**Çözüm:**  $x_1 x_2 x_3 x_4 = 20/2 = 10$  olduğundan,  $x_4 = 10/10 = 1$ 'dir. Demek ki

$$-a/2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 2 + 5 + 1 = 9$$

ve  $a = -18$ . Denkleminde  $x = 1$  konulursa

$$2 + a + b + c + 20 = 0,$$

yani  $b + c = -4$  bulunur.

**Soru 5.**  $\{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$  kümesinin  $n$  elemanlı her altkümesinde farkı 9 olan en az iki eleman bulunması için  $n$  sayısı en az kaç olmalıdır?

**Çözüm:** İçinde  $x$  ve  $x + 9$  gibi iki sayı bulunan  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

kümesi için

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cap \{a_1+9, a_2+9, \dots, a_n+9\} \neq \emptyset$$

olmalıdır. Bunu garantileyebilmek için ise

$$n + n - 1 \geq 100 + 9 = 109,$$

yani  $n \geq 55$  olmalıdır. Bu koşul yeterlidir de:  $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  için,  $18i + 1$  ile  $18i + 9$  arasındaki sayılar kümesinin 54 tane elemanı vardır ve herhangi iki elemanın arasındaki fark 9 olamaz.

**Soru 6.**  $50! + 7^{133}$  sayısının 25'e bölümünden elde edilen kalan nedir?

**Çözüm:**  $7^2 = 49 \equiv -1 \pmod{25}$  ilişkisinden

$$50! + 7^{133} \equiv 0 + 7(-1)^{66} \equiv 7 \pmod{25}$$

bulunur.

**Soru 7.** 1'le başlayan, iki rakamı aynı ve diğerleri farklı olan kaç tane dört basamaklı sayı vardır?

**Çözüm:**  $1xxy, 1xyx, 1xyy, 1xyl, 1xly, 11xy$  şeklindeki her sayıdan  $9 \times 8 = 72$  tane vardır. O halde  $6 \times 72 = 432$  sayı vardır.

**Soru 8.** Sadeleştirilemeyen kesir olarak  $a/20$  şeklinde yazılan, 1'den küçük pozitif kesirli sayıların toplamını bulunuz.

**Çözüm:**  $a$  sayısı  $\{1, 2, \dots, 19\}$  kümesinden seçilmeli. Buna göre toplam

$$(1 + 3 + 7 + 9 + 11 + 13 + 17 + 19)/20 = 4$$

bulunur.

**Soru 9.** Çarpımları 1 olan  $x, y, z$  pozitif gerçel sayılarının

$$x + 1/z = 5,$$

$$y + 1/x = 29$$

eşitliklerini sağladığı bilindiğine göre  $z + 1/y$  değeri kaçtır?

**Çözüm:**  $1/z = 5 - x, y = 29 - 1/x$  olur. Buradan  $x(29 - 1/x) = xy = 1/z = 5 - x$  çıkar ve denklem çözüldüğünde de  $x = 1/5, y = 24, z = 5/24$  ve  $z + 1/y = 1/4$  bulunur.

**Soru 10.**  $k$  ve  $n$  pozitif tamsayıları için  
 $k \cdot n! = ((3!)!)! / 3!$

ise  $k + n$  sayısının en küçük değeri kaçtır?

**Çözüm:**  $((3!)!)! = (6!)! = 720!$  olduğundan,  
 $k \cdot n! = 720! / 3! = (719!)(720/3!) = 120 \cdot 719!$

yani  $n = 719$  ve  $k = 120$  seçebiliriz. Böylece

$$k + n = 719 + 120 = 839$$

olur. Diğer seçimler  $k + n$  sayısını büyütür.

**Soru 11.**  $3^a = x$ ,  $5^a = y^{-1}$  ve  $675^{-a} = x^n y^m$  ise  $n + m$  kaçtır?

**Çözüm:** Verilenden

$$x^n y^m = 675^{-a} = (3^3 5^2)^{-a} = (3^a)^{-3} (5^a)^{-2} \\ = x^{-3} (y^{-1})^{-2} = x^{-3} y^2$$

bulunur. Buradan da  $n + m = -3 + 2 = -1$  bulunur.

**Soru 12.** Düzgün bir altıgenin köşeleri yarıçapı 3 cm olan çemberin üzerindedir. Bu köşelerden iki tanesi seçildiğinde aralarındaki uzaklığın 3 cm olma olasılığı nedir?

**Çözüm:** Altıgenin köşeleri  $A, B, C, D, E, F$  olsun. O zaman  $|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FA| = 3$  cm.'dir. Böylece istenilen olasılık

$$\frac{6}{\binom{6}{2}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

bulunur.

**Soru 13.**  $A, B, C$  pozitif tamsayılar olmak üzere  $4C = 7A$  ve  $5A = 3B$  ise  $A + B + C$  toplamının en küçük değeri nedir?

**Çözüm:** Verilenden  $20C = 35A = 21B$  çıkar.

Demek ki  $2^2 \cdot 5 \cdot C = 5 \cdot 7 \cdot A = 3 \cdot 7 \cdot B$ . Ayrıca

$$\text{okek}(2^2 \cdot 5, 5 \cdot 7, 3 \cdot 7) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420.$$

Bunlardan

$$A = 420/35 = 12,$$

$$B = 420/21 = 20,$$

$$C = 420/20 = 21$$

ve  $A + B + C = 12 + 20 + 21 = 53$  çıkar.

**Soru 14.**  $25 + 25x - x^2 - x^3 > 0$  eşitsizliğini sağlayan pozitif tamsayıların toplamı kaçtır?

**Çözüm:**  $x^3 + x^2 - 25x - 25 = (x+1)(x+5)(x-5)$

$< 0$  olacağından, çözümler

$$(-\infty, -5) \cup (-1, 5)$$

kümesindedir. Çözüm kümesi içinde pozitif tamsayılar ise  $x = 1, 2, 3$  ve  $4$  olacaktır. Böylece aranan toplam 10 bulunur.

**Soru 15.**  $a, b, c$  pozitif tamsayılardır.

$$a/8 = 6/b = c$$

olduğuna göre  $a$ 'nın alacağı en büyük değer için  $a + b + c$

toplamı kaç olur?

**Çözüm:**  $a/8 = 6/b = c$  eşitliklerinde  $a$ 'nın alabileceği en büyük değer,  $b$ 'nin alabileceği en küçük değerle hesaplanabilir.  $b = 1$  alındığında  $a = 48$  ve  $c = 6$  bulunur. Böylece  $a + b + c = 48 + 6 + 1 = 55$ .

**Soru 16.**  $m, n$  sayıları

$$mn + m + n = 71 \text{ ve } m^2n + mn^2 = 880$$

eşitliklerini sağlayan pozitif tamsayılardır.  $m^2 + n^2$  kaçtır?

**Çözüm:**  $s = m + n$ ,  $p = nm$  alalım.  $sp = 880$  ve  $s + p = 71$  olduğundan,  $s$  ve  $p$  sayıları

$$x^2 - 71x + 880 = 0$$

denkleminin kökleridir. Demek ki

$$\{s, p\} = \{16, 55\}.$$

Eğer  $p = 55$ ,  $s = 16$  ise kolaylıkla  $m = 5$  ve  $n = 11$  bulunur.  $s = 55$ ,  $p = 16$  ise çözüm vermez. Böylece  $m^2 + n^2 = 5^2 + 11^2 = 146$  çıkar.

**Soru 17.** Kaç tane pozitif  $k$  tamsayısı için  $EKOK(6^6, 8^8, k) = 12^{12}$  olur?

**Çözüm:**  $12^{12} = 2^{24} 3^{12}$ ,  $6^6 = 2^6 3^6$  ve  $8^8 = 2^{24}$  olduğundan,  $k = 2^a 3^b$  şeklinde olmalı.  $a$  sayısı 0, 1, ..., 24 değerlerini alabilir ama  $b = 12$  olmalıdır. Böylece koşulu sağlayan 25 tane  $k$  sayısının bulunduğu görülür.

**Soru 18.** Üç pozitif tamsayının çarpımı bu sayıların toplamının 6 katıdır. Bu tamsayılardan birinin diğer ikisinin toplamı olduğu bilindiğine göre, bu üç sayının birbirinden farklı tüm çarpımlarının toplamı kaçtır?

**Çözüm:** Tam sayılar  $a, b$  ve  $a + b$  olsun. O halde  $ab(a+b) = 12(a+b)$ . Buradan da  $ab = 12$  bulunur. Öyleyse  $\{a, b\} = \{1, 12\}, \{2, 6\}$  ya da  $\{3, 4\}$  olacaktır. Dolayısıyla  $ab(a+b) = 156, 96$  veya  $84$  ve bunların toplamı olarak  $156 + 96 + 84 = 336$  bulunur.

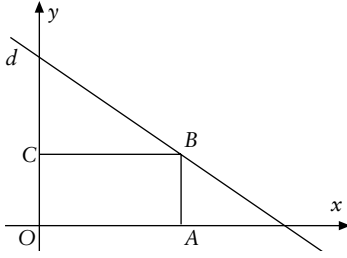
**Soru 19.** Gerçel sayılardan tamsayılara  $f$  fonksiyonu  $n < x \leq n+1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  için  $f(x) = n+1$  olarak tanımlanıyor. Kaç tane  $n < 500$  pozitif tamsayısı için  $f(\log_2 n)$  pozitif çift sayıdır?

**Çözüm:**  $2^{2k-1} < n \leq 2^{2k}$  için  $f(\log_2 n) = 2k$  olacağı için istenen sayı  $(2^8 - 2^7) + (2^6 - 2^5) + \dots = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1 = 170$  tir.

**Soru 20.**  $20 \times 5^a$  sayısının pozitif bölenleri sayısı 27 ise  $a$  kaçtır?

**Çözüm:**  $20 \cdot 5^a = 2^2 \cdot 5^{a+1}$  olduğundan  $3(a+2) = 27$ , buradan da  $a = 7$  bulunur.

**Soru 21.** Aşağıdaki şekildeki  $OABC$  dikdörtgeninin  $B$  köşesi, denklemi  $y = -x/4 + 4$  olan  $d$  doğrusu üzerindedir.  $OABC$  dörtgeninin çevresi 20 cm ise alanı kaç  $cm^2$  dir?



**Çözüm:**  $OA = x$  olsun. O halde  $20 = \text{Ç}(OABC) = 2(x+y) = 2x - x/2 + 8$  ve  $x = 8$ 'dir. Buradan da  $A(OABC) = xy = 8(-8/4 + 4) = 16$  bulunur.

**Soru 22.**  $x$  ve  $y$  gerçel sayıları

$$\log_8 x + \log_4 (y^2) = 5$$

ve

$$\log_8 y + \log_4 (x^2) = 7$$

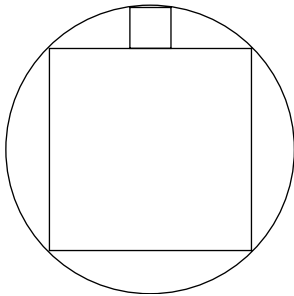
denklemlerini sağladığına göre,  $xy$  çarpımı kaçtır?

**Çözüm:** Birinci denklemden

$$5 = \log_8 x + \log_4 y^2 = (1/3)\log_2 x + \log_2 y = \log_2 (x^{1/3}y)$$

çıkarak, yani  $x^{1/3}y = 2^5 = 32$ . Benzer şekilde  $xy^{1/3} = 2^7 = 128$  bulunur. Buradan da  $xy = 2^9 = 512$  çıkar.

**Soru 23.** Aşağıdaki şekildeki büyük karenin alanı küçüğünün alanının kaç katıdır?



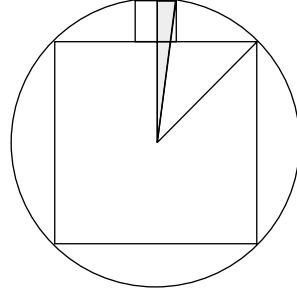
**Çözüm:** Büyük karenin bir kenarı 2, küçüğünün kenarı  $2x$  olsun. O zaman çemberin çapı  $\sqrt{2}$ 'dir. Dolayısıyla aşağıdaki şekildeki gri dik üçgenden

$$(1 + 2x)^2 + x^2 = 2$$

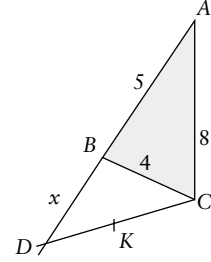
çıkarak, yani

$$5x^2 + 4x - 1 = 0 \text{ ve } x = 1/5.$$

Büyük karenin alanının küçük karenin alanına oranı  $(2/2x)^2 = 25$ 'tir.



**Soru 24.**  $K$  noktası şekildeki  $ABC$  üçgeninin dış teğet çemberinin merkezidir.  $|AB| = 5$  cm,  $|BC| = 4$  cm ve  $|AC| = 8$  cm ise  $CK$ 'yle  $AB$ 'nin kesişim noktası olan  $D$  noktası için,  $|CD|$  kaç cm'dir?



**Çözüm:**  $DC$  doğrusu  $ABC$  üçgeninin  $C$  köşesi-

$$\frac{x}{x+5} = \frac{4}{8}$$

nin dış açıortayıdır ve buna göre

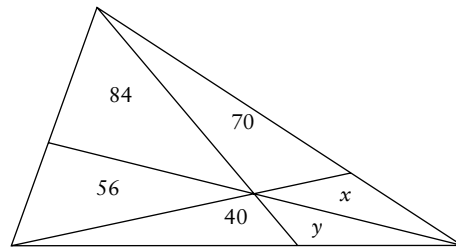
olur ve buradan da  $x = 5$  bulunur. Kenarortay ba-

$$4^2 = \frac{|CD|^2 + 8^2}{2} - \frac{100}{4}$$

ğıntısından

elde ederiz ve yanıt  $|CD| = 3\sqrt{2}$  çıkar.

**Soru 25.** Bir üçgenin içinde bir nokta alınıyor ve üçgenin köşelerinden bu noktadan geçen doğrular çiziliyor, böylece üçgen 6 parçaya bölünüyor. Parçaların alanları aşağıdaki şekildeki gibi 35, 56,



70, 84,  $x$  ve  $y$  olduğuna göre,  $x/y$  kaçtır?

**Çözüm:**  $x \cdot 40 \cdot 84 = y \cdot 70 \cdot 56$  olduğundan,

$$x/y = 7/5$$

bulunur.

**Soru 26.** Bir  $d$  rakamı için

$$0,d25d25d25\dots = n/810$$

olduğu bilindiğine göre,  $n$  pozitif tamsayısının değeri kaçtır?

**Çözüm:**  $n/810 = 0,d25d25 = d25/999$  olduğundan

$$n = (810/999)(d25) = (30/37)(d25).$$

Buradan da  $37n = 3000d + 750$  ve

$$3d + 10 \equiv 0 \pmod{37}$$

bulunur. Böylece  $d = 9$  ve  $n = 750$  olur.

**Soru 27.**  $1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{16} - x^{17}$  polinomunda  $x = y - 1$  dönüşümü kullanıldığında  $y^2$  teriminin katsayısı ne olur?

**Çözüm:**  $p(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{16} - x^{17} = (1 - x^{18})/(1 + x)$  şeklinde yazıldığında  $x = y - 1$  kullanılarak

$$p(x) = \frac{1 - x^{18}}{1 + x} = \frac{1 - (y - 1)^{18}}{y}$$

buradan da  $y^3$  teriminin katsayısı

$$\binom{18}{3} = \frac{18!}{15!3!} = 816$$

bulunur.

**Soru 28.**  $2y - (3a - 1)x + 5 = 0$  doğrusuyla  $3y + 3ax + 2 = 0$  doğrusunun dik kesişmesi için  $a$ 'nın alacağı değerler toplamı nedir?

**Çözüm:** Doğrular

$$y = (3a - 1)x/2 - 5/2$$

ve

$$y = -ax - 2/3$$

şeklinde yazıldığında  $m_1 = (3a - 1)/2$  ve  $m_2 = -a$  olduğu görülür. Doğruların dik olması istendiğinden

$$(3a - 1)(-a)/2 = m_1 m_2 = -1$$

yani

$$0 = 3a^2 - a - 2 = (3a + 2)(a - 1)$$

dır. Buradan da  $a_1 + a_2 = -2/3 + 1 = 1/3$  bulunur.

**Soru 29.**  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$  çemberine dışındaki  $P(5,7)$  noktasından çizilen teğetlerin değme noktaları  $T_1$  ve  $T_2$  ise  $|T_1 T_2|$  kaç br'dir?

**Çözüm.** Bir sonraki şekilden takip edin.  $t = |T_1 T_2|/2$  olsun.

$$|T_1 P|^2 + 3^2 = |PM|^2 = (5 - 2)^2 + (7 - 3)^2$$

eşitliğinden  $|T_1 P| = 4$  bulunur ve aynı eşitlikten

$$|PM| = (4^2 + 3^2)^{1/2} = 5$$

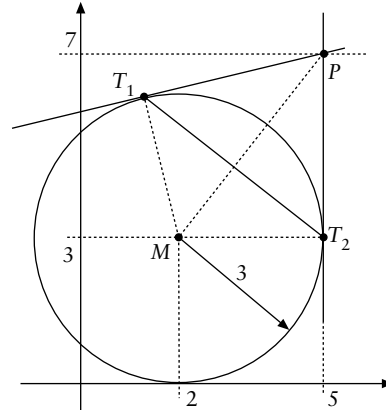
çıkılır. Öte yandan  $T_1 P M$  dik üçgeninden dolayı,

$$t/3 = |T_1 P|/|PM| = 4/5$$

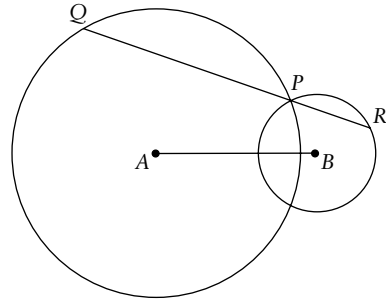
tür. Dolayısıyla  $t = 12/5$  bulunur. Buradan da

$$|T_1 T_2| = 2t = 24/5$$

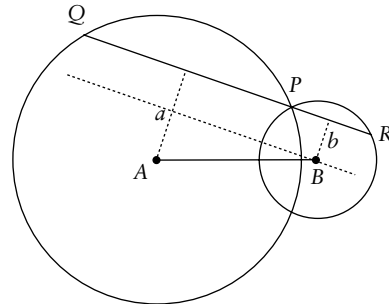
bulunur.



**Soru 30.** Merkezleri  $A$  ve  $B$ , yarıçapları sırasıyla 8 ve 6 olan çemberlerin merkezlerinin uzaklığı 12 ve bunların bir  $P$  kesim noktasından geçen ortak  $QR$  kirişi için  $|QP| = |PR|$ 'dir.  $|QR|$  uzunluğu kaç birim olmalıdır?



**Çözüm:**  $|QR| = 2x$  diyelim.  $A$  ve  $B$ 'den  $QP$  ve  $PR$ 'ye indirilen dikmelerin uzunlukları sırasıyla  $a$  ve  $b$  olsun.  $B$ 'den  $QR$ 'ye paralel çizildiğinde oluşan



dik üçgen  $x^2 + (a - b)^2 = 12^2$  ve

$$a^2 = 64 - (x/2)^2,$$

$$b^2 = 36 - (x/2)^2$$

bulunur. Son iki denklemden  $a^2 - b^2 = 28$  ve  $x^2 = 200 - 2(a - b)^2$  çıkar. Bu son denklemden ve  $x^2 + (a - b)^2 = 12^2$  denkleminde biraz hesapla  $(a + b)^2 = 56$  bulunur. Bu ve  $a^2 - b^2 = 28$  denklemlerinden  $a - b = \sqrt{14}$  çıkar, buradan da  $x = \sqrt{130}$ . ♣