Kapak Konusu: Konikler

Parabol, Elips ve Hiperbol

Cebirsel Tanımlar ve Geometrik Çizimler

Geçen yazıda, bir koniğin denkleminin, düzlemin eksenlerini döndürerek ve öteleyerek, $a \neq 0$, c ve f sabitleri için,

$$x^2 + cy^2 = 0,$$
$$x^2 = f,$$
$$ax^2 + cy^2 = 1,$$

ya da

$$y = ax^2$$

biçiminde yazılabileceğini gördük. Bu yazıda bu dört tip denklemden birini sağlayan (x, y) noktalarının düzlemde nasıl ve ne tür bir $\mathcal{C}$ eğrisi (koniği) oluşturduğunu göreceğiz.

Dejenere Şıklar. Birinci ve ikinci tip denklemler ***dejenere*** olarak nitelendirilirler, çünkü bunların tanımladığı eğriler nokta ve doğrulardan oluşurlar, "eğri" sözcüğünün hakkını yeterince vermeyen bir durum sözkonusu...

Birinci Tip Denklemler. İlk olarak

$$x^2 + by^2 = 0$$

denklemlerine bakalım: Eğer $b > 0$ ise sadece $x = y = 0$ buluruz, yani koniğin sadece $(0, 0)$ noktası vardır:

$$\mathcal{C} = \{(0, 0)\}.$$

Eğer $b = 0$ ise $x = 0$ doğrusu elde edilir:

$$\mathcal{C} = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Eğer $b < 0$ ise, $d = -b > 0$ tanımını yaparak

$$0 = x^2 + by^2 = x^2 - dy^2 = (x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d})$$

denklemini elde ederiz. Demek ki bu durumda konik, $x + y\sqrt{d} = 0$ ve $x - y\sqrt{d} = 0$ doğrularının bileşimidir: $\mathcal{C} = \{(\pm y\sqrt{d}, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

İkinci Tip Denklemler. Şimdi $x^2 = f$ denklemiyle tanımlanan koniklere bakalım. Bu denklemin $f < 0$ ise sıfır, $f = 0$ ise bir ve $f > 0$ ise iki çözümü vardır. Ama bir de y değişkeni var; y denklemde belirmediğinden, y'ye herhangi bir koşul koşulmamıştır ve y herhangi bir değeri alabilir. Demek ki bu durumda:

Eğer $f < 0$ ise koniğin hiç noktası yoktur, yani, $\mathcal{C} = \varnothing$'dir.

Eğer $f = 0$ ise konik $x = 0$ doğrusudur:

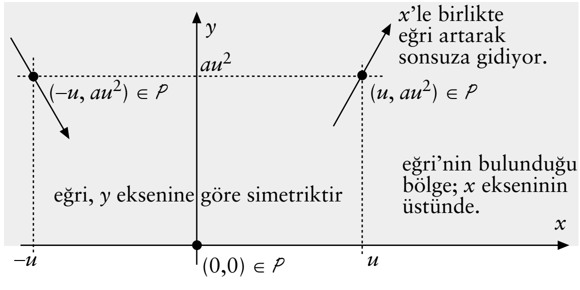
$$\mathcal{C} = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Eğer $f > 0$ ise, konik $x = \sqrt{f}$ ve $x = -\sqrt{f}$ doğrularının birleşimidir: $\mathcal{C} = \{(\pm\sqrt{f}, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

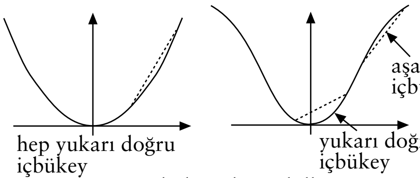
İlginç Şıklar. Üçüncü ve dördüncü denklemlerin verdiği konikler çok daha ilginçtirler. Bunlar üzerine daha uzun düşüneceğiz.

Parabol. Dördüncü tip olan $y = ax^2$ denkleminin verdiği koniğe ve bu koniğin döndürülerine ve ötelemelerine ***parabol*** adı verilir. Parabolün nasıl bir şey olduğunu anlamaya çalışalım. $y = ax^2$ denkleminin verdiği parabole $\mathcal{C}$ yerine $\mathcal{P}$ diyelim. Birkaç gözlemle başlayalım:

- y'yi x'in bir fonksiyonu olarak görebiliriz, çünkü her $x \in \mathbb{R}$, bir ve bir tek y değeri verir. Dolayısıyla her $x = u$ dikey doğrusu $\mathcal{P}$ parabolünü tek bir noktada keser: (u, au^2) noktasında.
- Eğer $a = 0$ ise, $y = 0$ doğrusunu elde ederiz. Bundan böyle $a \neq 0$ olsun.
- Eğer $a < 0$ ise, x eksenine göre düzlemin simetrisini alarak, yani $y' = -y$ eksen değişikliğini yaparak, $a > 0$ varsayımında bulunabiliriz.
- $(0, 0) \in \mathcal{P}$.
- $y = ax^2$ ve $a > 0$ olduğundan, parabolün noktalarının y koordinatları hiç negatif olamazlar, yani parabol hiç x ekseninin altına inmez.
- Eğer $(x, y) \in \mathcal{P}$ ise, $(-x, y) \in \mathcal{P}$. Dolayısıyla eğri y eksenine göre simetriktir ve $x \geq 0$ durumuna odaklanmamız yeterlidir.
- x sonsuza gittiğinde y de sonsuza gider.
- $x \geq 0$ ise, x arttığında y de artar, yani $0 \leq x_1 < x_2$ ise $x_1^2 < x_2^2$ dir.

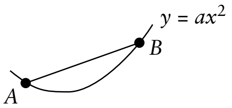


Yukardaki şekilde ufak tefek gözlemlerimizi resmettik. Bu bilgilerden parabolün tam nasıl olduğu anlaşılmaz elbette, sadece bir fikir verir. Örneğin, parabol aşağıdaki iki şekilden biri gibi olabilir.

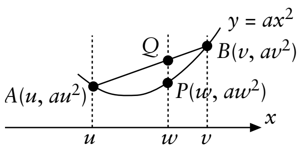


Parabolün olası şekilleri

Şimdi fonksiyonun grafiğini büyük ölçüde belirleyen şu özelliği göstereceğiz: *Her A, $B \in \mathcal{P}$ için, $\mathcal{P}$'nin A ile B arasında kalan kısmı AB kirişinin altındadır, yani grafik yandaki şekildeki gibi yukarı doğru içbükeydir.*



Kanıt: $A(u, au^2) \in \mathcal{P}$ ve $B(v, av^2) \in \mathcal{P}$ olsun. (u, v) aralığından herhangi bir w alalım, yani $u < w < v$ olsun. Şimdi w'nin üstünde bulunan grafiğin P noktasıyla, kirişin Q noktasını karşılaştıralım. Önce bu iki noktanın koordinatlarını bulalım. P'nin koordinatlarının (w, aw^2) olduğu belli. Q'nün birinci koordinatı da w elbette. Q, AB doğrusunun üstünde olduğu için, Q'nün ikinci koordinatını bulmak için AB doğrusunun denklemini bulmalıyız. Bulalım:



$$y = \frac{av^2 - au^2}{v - u}(x - u) + au^2 = a(v + u)(x - u) + au^2.$$

Demek ki AB doğrusunun denklemi şöyle:

$$y = a(v + u)(x - u) + au^2.$$

Dolayısıyla Q noktasının yüksekliği (yani ikinci koordinatı)

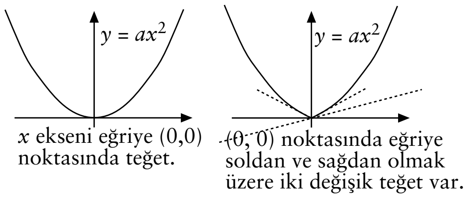
$$a(v + u)(w - u) + au^2$$

dir. Bu yükseklikle P'nin yüksekliği olan aw^2 sayılarını karşılaştıralım. Q'nünkisinin daha büyük olduğunu kanıtlamak zor değil:

$$\begin{aligned} & a(v + u)(w - u) + au^2 > aw^2 \\ & \Leftrightarrow (v + u)(w - u) > w^2 - u^2 = (w - u)(w + u) \\ & \Leftrightarrow v + u > w + u \Leftrightarrow v > w. \end{aligned}$$

Böylece parabolün yukarı doğru içbükey olduğunu kanıtlamış olduk ve neye benzediği büyük ölçüde ortaya çıktı; sayfanın başındaki birinci şekildeki gibi olmalı.

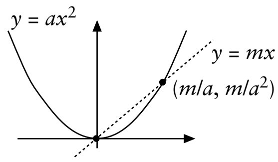
Ama parabolün şeklinden daha tam emin olamayız. Yukardaki şekil biraz fazla yumuşak. Belki de parabolün en umulmadık bir yerinde bir sivriliği vardır. Aşağıdaki sağdaki grafikte (0, 0) noktasında bir sivrilik var, o noktada grafiğin iki değişik teğeti var. (Teğetin matematiksel tanımını daha sonra göreceğiz, şimdilik sezgisel takılalım.) Parabol de, bal gibi, böyle durduk yerde sivriliği olan bir eğri olabilir. Parabolün $O(0, 0)$ civarındaki davranışını daha iyi anlayalım.



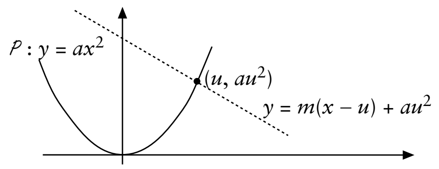
Parabolün (0, 0) noktasının civarındaki davranışını öğrenmek için bu noktadan geçen ve dikey olmayan herhangi bir $y = mx$ doğrusu alalım (m, doğrunun eğimidir) ve bu doğruyu parabolle, yani $y = ax^2$ fonksiyonunun grafiğiyle kesiştirelim. Kesişim noktalarından biri (0, 0) noktasıdır elbet. Bakalım ikinci bir kesişim noktası var mı? Olası ikinci kesişim noktasına (u, v) dersek, o zaman $u \neq 0$ olmalı ve

$$mu = v = au^2$$

eşitlikleri sağlanmalı. $u \neq 0$ olduğundan, bu eşitliklerden $m = au$ ve $u = m/a$ elde ederiz. Demek ki, eğer $m \neq 0$ ise, yani doğru yatay değilse, $y = mx$ doğrusu parabolü (0, 0) ve $(m/a, m^2/a)$ olmak üzere iki değişik noktada keser. Dolayısıyla parabolün (0, 0) noktasının civarındaki davranışı yukardaki ikinci şekildeki gibi değil, birinci şekildeki gibi olmalıdır, yani parabol O noktasına x eksenine nerdeyse paralel olacak biçimde (teğet) yaklaşmalıdır.



Yukarda sorduğumuz aynı soruyu parabolün herhangi bir (u, au^2) noktası için soralım. Bu noktadan geçen ve dikey olmayan bir doğru parabolü



kaç noktadan keser? Parabolün (u, au^2) noktasından geçen ve dikey olmayan bir doğrunun denklemi, belli bir m sayısı için,

$$y = m(x - u) + au^2$$

şeklindedir. Olası ikinci kesişim noktasının birinci koordinatına v dersek, v,

$$av^2 = m(v - u) + au^2$$

eşitliğini sağlamalıdır. Buradan,

$$m(v - u) = av^2 - au^2 = a(v - u)(v + u)$$

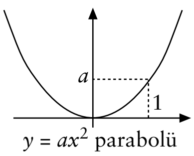
ve ardından, $m = v + u$ çıkar. Demek ki $v \neq u$ eşitsizliği için, $m \neq 2u$ eşitsizliği geçerli olmalı. Sonuç: Eğimi $2u$ ve ∞ (yani dikey) olan iki doğru dışında parabolün (u, au^2) noktasından geçen her doğru parabolü iki noktada keser. Parabolün (u, au^2) noktasından geçen ve eğimi $2u$ olan doğru da parabole (u, u^2) noktasında teğet olan doğrudur.

Yukarda yaptıklarımız, "türev" kullanarak çok daha kolay ve matematiksel bir biçimde yapılabilir ama lise eğitiminde artık türev olmadığından ne yazık ki bu kavramı kullanamıyoruz.

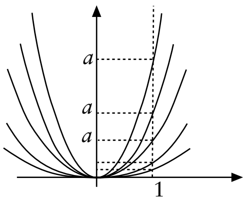
Sonuç olarak,

$$y = ax^2$$

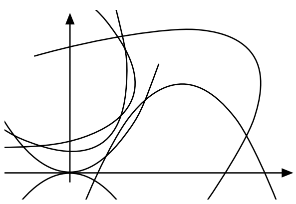
denklemiyle verilen parabolün grafiği yandaki şekildeki gibidir.



a değiştikçe parabolün şekli de değişir. a, 0'a yaklaştıkça parabol yayvanlaşır ve a, 0'a çok yakınsadığında parabol x eksenine çok yakınsar. Öte yandan a büyüdükçe parabol dikleşerek y ekseninin pozitif kısmına yaklaşır. Değişik a'lar için $y = ax^2$ parabolleri yandaki şekilde gösterilmiştir.



Yukardaki parabollerin x eksenine göre simetrilerini alıp belli bir vektör kadar öteler ve belli bir θ açısıyla döndürürsek, düzlemdeki tüm parabolleri elde ederiz. Bu parabollerden birkaçı yandaki şekilde görünmektedir.



Soru. Doğrusal olmayan herhangi üç değişik noktadan bir ve bir tek çemberin geçtiği bilinir. Herhangi üçü doğrusal olmayan her dört (ya da beş) noktadan bir parabol geçer mi?

Üçüncü Tip Denklemler. Gelelim

$$ax^2 + by^2 = 1$$

türünden denklemlere. a ve b katsayılarının en azından biri pozitif değilse denklemin tanımladığı eğri boşkümedir. Bundan böyle iki katsayıdan birinin pozitif olduğunu varsayalım. Bu varsayıma göre, eğer $a \leq 0$ ise $b > 0$ olmak zorundadır ve bu durumda $x = y$ doğrusuna göre düzlemin simetriğini alırsak x ekseni y ve y ekseni de x ekseni olur ve a ile b'nin rolleri değişir. Dolayısıyla a'nın pozitif olduğunu varsayabiliriz. Eğer $b = 0$ ise, eğri iki doğrudan oluşur. Bundan böyle b'nin 0 olmadığını varsayalım. Analizimizi $b > 0$ ya da $b < 0$ koşullarına göre ikiye ayıracağız. Birinci tür eğriye ***elips***, ikinci türe ***hiperbol*** denir. Artık, a yerine $1/a^2$, $|b|$ yerine $1/b^2$ yazarak, elipsin denklemini

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

olarak, hiperbolün denklemini de

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

olarak yazabileceğimizi varsayabiliriz. Ayrıca a ve b'nin de pozitif olduklarını varsayabiliriz.

Elips. Bu bölümde $a > 0$ ve $b > 0$ için,

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

denklemiyle verilen $\mathcal{E}$ eğrilerini ele alacağız. Bu tür eğrilere ve bunların döndürü ve ötelemelerine ***elips*** denir. Önce elipslerin birkaç kolay özelliğinden başlayalım.

• Eğer $a = b$ ise, denklem $x^2 + y^2 = a^2$ biçimine bürünür ve bu denklemin verdiği elips (0, 0) merkezli ve a yarıçaplı çemberdir. Dolayısıyla a ve b birbirlerine yakın sayılarsa elipsin çembere benzeyeceği tahmininde bulunabiliriz.

• Eğer $(x, y) \in \mathcal{E}$ ise, $(-x, y) \in \mathcal{E}$, $(x, -y) \in \mathcal{E}$, $(-x, -y) \in \mathcal{E}$. Dolayısıyla $\mathcal{E}$ eğrisi x ve y eksenlerine göre simetriktir.

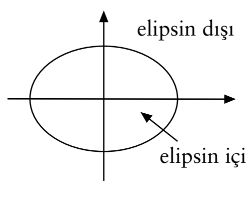
• x^2, en büyük değerini $y^2 = 0$, yani $y = 0$ olduğunda alır. Demek ki $x^2 \leq a^2$ olmalıdır. Dolayısıyla $-a \leq x \leq a$. Benzer eşitsizlikler y koordinatı için de geçerlidir elbet: $-b \leq y \leq b$. Demek ki elips $[-a, a] \times [-b, b]$ dikdörtgeninin içine sıkışmıştır.

• O noktasından geçen her ışının elipsi tek bir noktada kestiğini kanıtlamayı okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

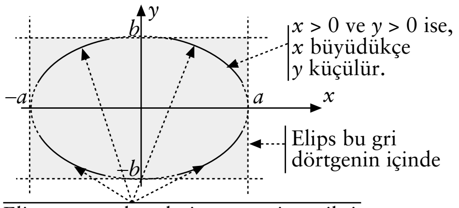
• Eğer x ve y pozitifse, ikisinden biri arttığında diğeri bu artışı telafi edip $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ eşitliğini sağlayabilmek için azalmak zorundadır. x ve y simetri eksenlerinden dolayı, elipsin davranışını diğer durumlarda da (örneğin x pozitif, y negatifken de) biliyoruz.

Bu bulgulardan elipsin nasıl bir eğri olduğu aşağı yukarı çıkar. Elipsi çizmemize ramak kaldı. Birkaç olası eğriyi bir sonraki sayfada çizdik.

• Eğer düzlemin $A(x, y)$ noktası $x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1$ eşitsizliğini sağlıyorsa, bu noktanın elipsin "içinde" olduğunu söyleyelim. Eğer $x^2/a^2 + y^2/b^2 > 1$ ise nokta-

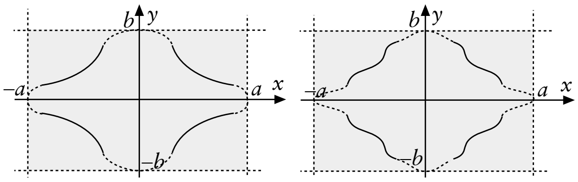


$x^2/a^2 + y^2/c^2 = 1$ Elipsinin Olası Eskizleri



Elips x ve y eksenlerine göre simetriktir.

Şimdiye kadarki bulgularımıza göre elips yukardaki gibi olabileceği gibi aşağıdaki şekillerdeki gibi de olabilir.



nın elipsin “dışında” olduğunu söyleyelim. Böylece elipsin içi ve dışı tanımlanmış oldu.

• Elipsin içinde alınan bir noktayla elipsin dışında alınan bir noktayı birleştiren doğru parçası elipsi tek bir noktada keser. Bunun da kanıtı kolaydır.

• Eğer iki nokta elipsin içindeyse, bu noktaları birleştiren doğru parçası da elipsin içindedir, yani, eğer

$$x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 < 1 \text{ ve } x_1^2/a^2 + y_1^2/b^2 < 1$$

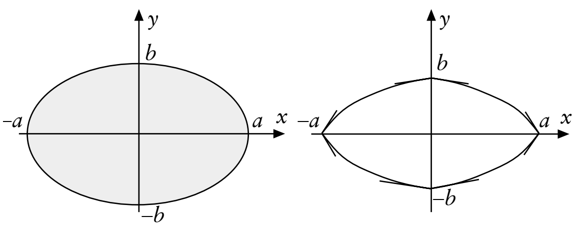
eşitsizlikleri sağlanıyorsa, o zaman her $\lambda \in [0, 1]$ sayısı için,

$$(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1)^2/a^2 + (\lambda y_0 + (1-\lambda)y_1)^2/b^2 < 1$$

eşitsizliği sağlanır. Bunun kanıtı basit bir hesaptan çıkar ve okura bırakılmıştır.

Böylece, elipsin aslında yukardaki birinci şekildeki gibi olduğu, yani dışbükey olduğu çıkar, alttaki diğer iki eğri yukarda kanıtladığımız özelliği sağlamazlar.

Elipsi çizmemize bir engel daha kaldı. Elips eğrisi aşağıdaki iki şekilden biri gibi olabilir. Hangisi?



$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ elipsi yukardaki dışbükey şekillerden biri gibi olabilir. Sağdakinde sivri noktalar vardır. Elipste böyle sivri noktalar olabilir mi?

• Şimdi, elipsin herhangi bir noktasından geçen herhangi bir doğrunun elipsi kaç noktada kestiğini bulalım. Yukardaki şekildeki gibi sivri noktalar olmaması için biri (teğet olanı) dışında, bunların her birinin elipsi iki değişik noktada kesmesi gerekir.

Elipsin üstünde alınan noktanın koordinatları (u, v) olsun. u ile v arasında

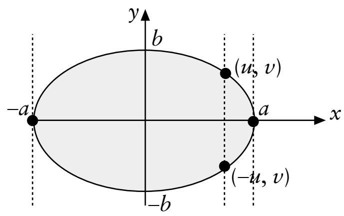
$$u^2/a^2 + v^2/b^2 = 1$$

ilişkisi vardır elbette. Bu noktadan geçen bir doğrunun denklemi ya $x = u$'dur (eğer doğru dikeyse) ya da,

$$y = m(x - u) + v$$

dir.

Önce $x = u$ doğrusuyla $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ elipsini kesiştirelim. Kesişim noktalarından biri (u, v) ise, $(u, -v)$ de diğeridir elbette. Dolayısıyla $v \neq 0$ ise kesişim en az iki noktadır. (Aslında tam iki noktadır.) Eğer $v = 0$ ise o zaman $u = \pm a$ olmalı. u'nun



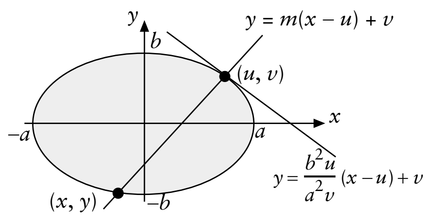
$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ elipsiyle dikey doğruların kesişimi

bu değerini $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ denklemine koyarsak $y = 0$ elde ederiz. Demek ki $v = 0$ durumunda kesişim noktası bir tane: $(u, 0)$.

Şimdi $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ denklemiyle verilen elipsle, bu elipsi bir (u, v) noktasında kesen

$$y = m(x - u) + v$$

doğrusunu kesiştirelim. Kesişim noktalarından biri (u, v). Olası ikinci bir kesişim noktasına (x, y) diyelim.



$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ elipsiyle dikey olmayan doğruların kesişimi

lim. $x \neq u$ eşitsizliğinin farkına varıp hesap yapalım.

$$\begin{aligned}
1 &= x^2/a^2 + y^2/b^2,\\
&= x^2/a^2 + (m(x - u) + v)^2/b^2\\
&= x^2/a^2 + m^2(x - u)^2/b^2 + v^2/b^2 + 2mv(x - u)/b^2\\
&= x^2/a^2 + m^2(x - u)^2/b^2 + 1 - u^2/a^2 + 2mv(x - u)/b^2\\
&= 1 + (x^2 - u^2)/a^2 + m^2(x - u)^2/b^2 + 2mv(x - u)/b^2.
\end{aligned}$$

Önce 1'leri sonra da $x - u$'ları sadeleştirerek,

$$(x + u)/a^2 + m^2(x - u)/b^2 + 2mv/b^2 = 0$$

elde ederiz. Buradan kolaylıkla,

$$(1/a^2 + m^2/b^2)x = -u/a^2 + m^2u/b^2 - 2mv/b^2$$

elde ederiz. Eğer

$$(1/a^2 + m^2/b^2)u \neq -u/a^2 + m^2u/b^2 - 2mv/b^2$$

ise, $x \neq u$ koşulundan dolayı, iki değişik kesişim noktası bulunur. Eğer

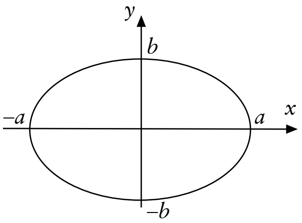
$$(1/a^2 + m^2/b^2)u = -u/a^2 + m^2u/b^2 - 2mv/b^2$$

ise, yani

$$m = -ub^2/va^2$$

ise tek bir kesişim noktası vardır; bu da (u, v) noktasından elipse teğet geçen doğrunun eğimidir.

Demek ki elipsin herhangi bir noktasından elipsi sadece bir noktada kesen tek bir doğru vardır (ve bu doğru da o noktadan geçen teğettir.)



$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ elipsi

Böylece elipsin büyük ölçüde yandaki gibi bir eğri olduğunu kanıtlamış olduk.

Hiperbol. Bu bölümde $a > 0$ ve $b > 0$ için,

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

denklemiyle verilen $\mathcal{H}$ eğrilerini ele alacağız. Bu tür eğrilere ve bunların döndürü, simetri ve ötelemelerine ***hiperbol*** denir. Önce $\mathcal{H}$'nin kolay kanıtlanan birkaç özelliğinden başlayalım.

• Eğer $(x, y) \in \mathcal{H}$ ise,

$$(-x, y) \in \mathcal{H}, (x, -y) \in \mathcal{H}, (-x, -y) \in \mathcal{H}.$$

Dolayısıyla $\mathcal{H}$ eğrisi x ve y eksenlerine göre simetriktir.

• Her $y \in \mathbb{R}$ için, (x, y) noktasının hiperbolün üstünde olduğu iki tane x vardır:

$$x = \frac{\pm a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}.$$

Öte yandan, her $x \in \mathbb{R}$ için, (x, y) noktasının hiperbolün üstünde olduğu bir y yoktur; böyle bir y'nin olması için $x^2 \geq a^2$, yani ya $x \geq a$ ya da $x \leq -a$ eşitsizliği sağlanmalıdır. Bir başka deyişle $(-a, a) \times \mathbb{R}$ bantında hiperbolün bir noktası yoktur. Ama eğer $x \notin (-a, a)$ ise,

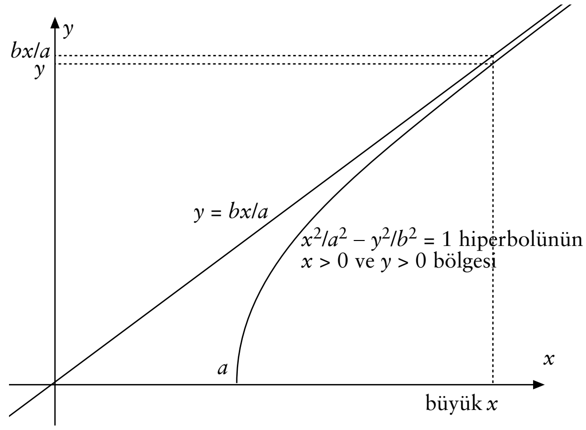
$$y = \frac{\pm b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

olarak alırsak, $(x, y) \in \mathcal{H}$ olur.

• Eğer x ve y pozitifse, bu iki sayıdan biri arttığında, diğeri de, bu artışı telafi edip $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ eşitliğini sağlayabilmek için artmak zorundadır. Hatta x sonsuza doğru gittiğinde y de sonsuza gitmelidir.

• **Asimptot.** Eğer $x \neq 0$ ise, hiperbolün denkleminden

$$y^2/x^2 = b^2/a^2 - b^2/x^2$$



çıkar. Dolayısıyla eğer x çok çok büyükse, o zaman, b^2/x^2 terimi çok çok küçük olur ve y^2/x^2 aşağı yukarı b^2/a^2 sayısına eşit olur, yani

$$y/x \approx \pm b/a$$

olur. Demek ki y'yi de pozitif alırsak,

$$y/x \approx b/a$$

olur. Şimdi şu savı ortaya atıyorum: x çok büyüdüğünde, pozitif bir y için $(x, y) \in \mathcal{H}$ ise, o zaman

$$y \approx bx/a,$$

yani hiperbolle $y = bx/a$ doğrusu birbirlerine çok yakın olurlar. Savımı kanıtlıyorum. (x, y) parabolün üstünde bir nokta olsun. x, çok çok büyük olsun. y de pozitif olsun. bx/a ile y arasındaki farkın çok çok küçük olduğunu kanıtlayacağız:

$$\frac{bx}{a} - y = \frac{bx}{a} - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)$$

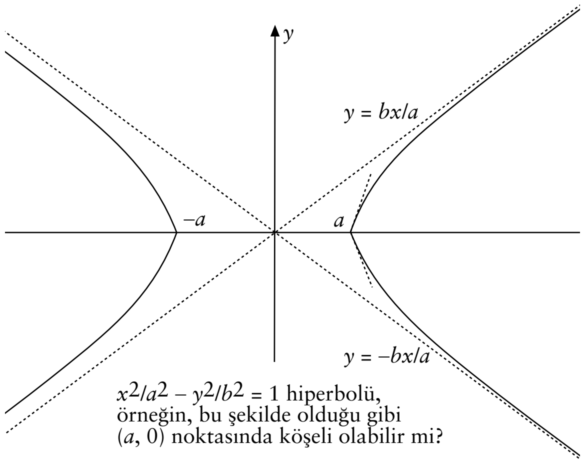
$$= \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= \frac{b}{a}\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \approx 0.$$

Yukardaki hesaptan da görüldüğü gibi bx/a ile y arasındaki fark pozitif (yani $bx/a > y$, yani $y = bx/a$ doğrusu hiperbolün üstünde) ama çok küçük, o kadar ki x sonsuza gittiğinde bu fark 0'a gidiyor.

Bu bulgulardan hiperbolün nasıl bir eğri olduğu aşağı yukarı çıkar, bu sütunun en tepesinde çizilmiş eğri gibidir. Ama henüz bundan tam emin olamayız. O şekil biraz fazla yumuşak. Belki de hiperbolün en umulmadık bir yerinde (bir sonraki sayfadaki şekildeki gibi) bir sivriliği vardır...

Aynen elipste yaptığımız gibi doğrularla hiperbolün kesişim noktalarını bulabiliriz. Elipste yapılana çok benzer bir hesap, eğer $v \neq 0$ ise, hiperbolün (u, v) noktasından geçen ub^2/va^2 eğimli doğru dışında (ki bu doğru hiperbole (u, v) noktasında "teğet" doğrudur) ve $\pm b/a$ eğimli asimptotlara pa-



ralel olan iki doğru dışında (bkz. yan sütunun tepesindeki şekil), hiperbolü (u, v) noktasında kesen her doğrunun hiperbolü bir başka noktada da kestiğini kanıtlayabiliriz, kanıtlayacağız da. Eğer $v = 0$ ise, ifadesini okura bıraktığımız benzer bir önerme doğrudur. Böylece hiperbolün köşeli olamayacağı, "yumuşak" olması gerektiği kanıtlanmış olacak.

Kanıta, daha doğrusu hesaplara girişelim. Hiperbolün üstünde herhangi bir (u, v) noktası alalım. Demek ki

$$u^2/a^2 - v^2/b^2 = 1$$

eşitliği sağlanır. Bu noktadan geçen herhangi bir doğru alalım.

Eğer doğru dikeyse ve $(u, v) \neq (\pm a, 0)$ ise, o zaman doğrunun hiperbolü iki noktada kestiği kolaylıkla kanıtlanır.

Eğer doğru dikeyse ve $(u, v) = (\pm a, 0)$ ise o zaman doğrunun hiperbolü sadece $(u, v) = (\pm a, 0)$ noktasında kestiğini kanıtlamak da kolaydır.

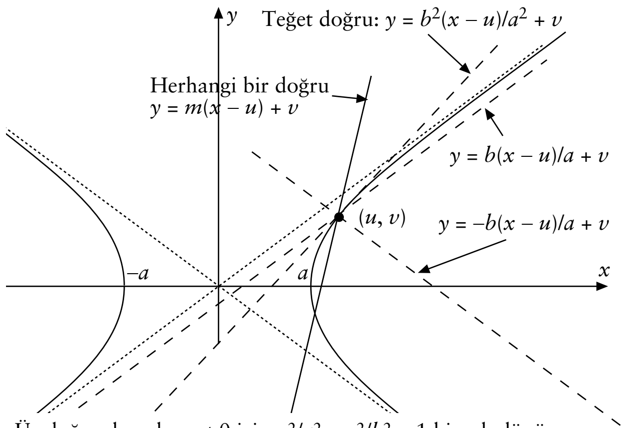
Doğrunun dikey olduğu durumun daha fazla irdelenmesini okura bırakıp, biz en genel durumu irdeleyelim: Doğru dikey olmasın. O zaman doğrunun denklemi, m için,

$$y = m(x - u) + v$$

dir. Demek ki, diğer kesişimi bulmak için,

$$y = m(x - u) + v$$
$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

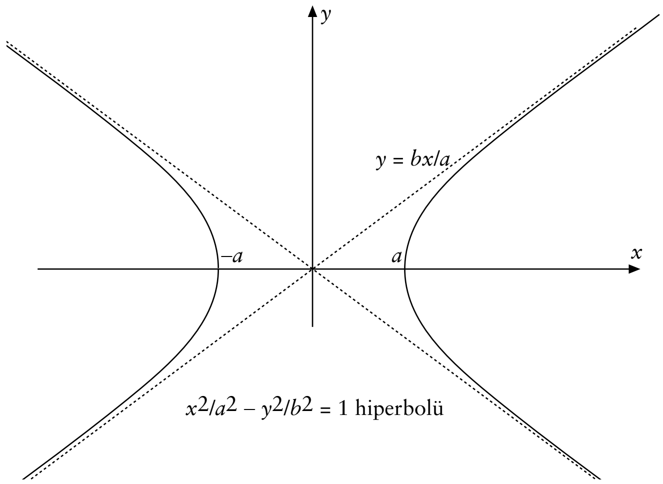
denklem sistemini çözmeliyiz. Bu arada u ile v arasındaki $u^2/a^2 - v^2/b^2 = 1$ ilişkisini de unutmayalım. $x \neq u$ eşitsizliğini varsayabiliriz, çünkü (u, v)'den değişik bir çözüm arıyoruz. İkinci denklemdeki y'yi birinci denklemi kullanarak yokedebiliriz. Ardından, v^2/b^2 yerine $u^2/b^2 - 1$ yazalım. Ortaya çıkan denklemde önce 1'leri sonra da $x - u$'ları atalım. Geriye,



Üç doğru dışında, $v \neq 0$ için $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ hiperbolünün (u, v) noktasından geçen her doğru hiperbolü iki değişik noktada keser. Hiperbolü sadece (u, v) noktasında kesen doğrulardan ikisi asimptotlara paralel olan doğrulardır. Üçüncüsü ise hiperbole teğet olan doğrudur.

$$\frac{x+u}{a^2} - \frac{m^2(x-u)}{b^2} - \frac{2mv}{b^2} = 0$$

denklemi kalır. Eğer x'in katsayısı 0 değilse, yani $m \neq \pm b/a$ ise, bu denklemin tek bir çözümü vardır ve böylece doğrunun hiperbolü kestiği diğer nokta bulunur. Ama dikkat! Bu diğer nokta gene (u, v) noktası olabilir; kolay bir hesap bunun ancak $m = ub^2/va^2$ için doğru olabileceğini gösterir. Bu durumda, doğru, hiperbole (u, v) noktasında teğettir. Eğer x'in katsayısı 0 ise, yani $m = \pm b/a$ ise, yani doğru asimptotlara paralelse çözüm yoktur. (Neden? Dikkatli olmak gerekiyor: $0x = 0$ denkleminin çok çözümü vardır!)



Dikkat edilirse hem parabolde, hem elipste hem de hiperbolde, "teğet" diye adlandırdığımız doğru, eğriyi "iki kez aynı noktada kesiyor". Bu yazıdaki hesapları yapan dikkatli okur ne demek istediğimizi anlayacaktır.

Böylece tüm konikleri çizmiş olduk. ♥