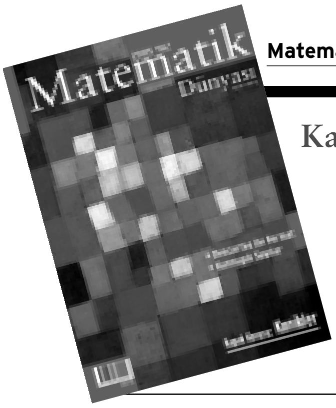
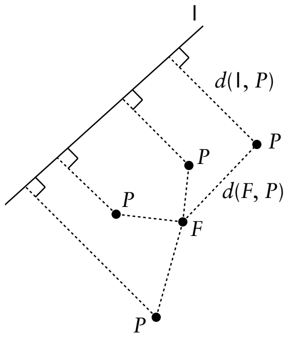


Kapak Konusu: Konikler

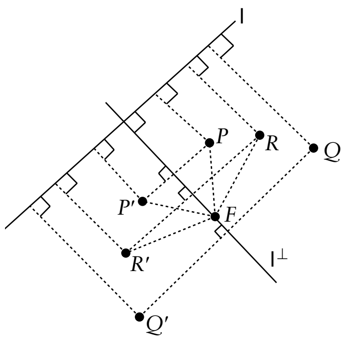
Koniklerin Simetrileri, Odak Noktaları ve Doğrultmanları

Ali Nesin* / *anesin@bilgi.edu.tr*
Engin Yardımcı** / *enginyardimci@yahoo.co.uk*

Bir önceki yazıda, düzlemde, doğrultman denilen bir l doğrusuna ve odak noktası denilen bir F noktasına olan uzaklıklarının oranının sabit olduğu noktalar kümesinin bir konik olduğunu gördük. Bu yazıda hemen hemen her koniğin bir doğrultmanı ve bir odak noktasının olduğunu göstereceğiz.



Önce çok genel bir şey yapalım. Bir F noktası ve bir l doğrusu verilmiş olsun. Bir de ayrıca bir e sabiti verilmiş olsun. $\{P : d(P, F) = e{\cdot}d(P, \mathrm{l})\}$ koniğini ele alalım. F noktasından geçen ve l doğrusuna dik olan doğru, kolayca görüleceği üzere, koniğin bir simetri eksenidir. Yazımızda bu olguyu tam üç kez kullanacağız.



Önce elipsi irdeleyelim.

ELİPS

Önsav. $0 < b < a$ *olmak üzere* $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ *denklemiyle verilmiş bir elipsin en uzun kirişi merkezden geçen yatay kiriştir ve bunun da uzunluğu* $2a$*'dır.*

Kanıt: F ve F' elipsin odak noktaları olsun. Sayfa 33'teki Teorem 2'de, elipsin herhangi bir M noktası için $d(M, F) + d(M, F') = 2a$ eşitliğini görmüştük. Şimdi elipsin üstünde M ve N noktaları alırsak, üçgen eşitsizliğinden,

$$d(M, N) \le d(M, F) + d(F, N)$$

ve

$$d(M, N) \le d(M, F') + d(F', N)$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Bunları altalta toplayıp ikiye bölersek, $d(M, N) \le 2a$ eşitsizliğini elde ederiz. Demek ki bir kirişin uzunluğu en fazla $2a$ olabiliyormuş. Merkezden geçen yatay kirişin uzunluğunun $2a$ olduğu bariz. □

Elipsin bu en uzun kirişine ***asal kiriş*** denir.

Sonuç. *Eğer* $a \ne b$ *ise,* $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ *denklemiyle verilmiş bir elipsin simetri doğruları sadece* x *ve* y *eksenleridir ve sadece* $(0, 0)$ *noktası simetri noktasıdır.*

Kanıt: Önerme x ve y'ye göre simetrik olduğundan $a > b$ eşitsizliğini varsayabiliriz. Yukarda kanıtladığımız üzere x ekseni üstündeki kiriş, elipsin biricik en uzun kirişidir. Dolayısıyla elipsi elipse götüren düzlemin mesafe koruyan dönüşümleri bu uzun kirişin yerini değiştiremez. Bundan da istenen sonuç çıkar. □

Teorem. *Eğer* $a > b$ *ise,* $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ *denklemiyle verilmiş bir elipsin sadece iki tane odak noktası ve doğrultman çifti vardır.* e *sabit oranı bu iki çift için de aynıdır. Bunlar,* $\varepsilon = \pm 1$ için,

$$F\left(\varepsilon\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$$

odak noktası ve

$$x = \frac{\varepsilon a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

denklemiyle verilmiş l *doğrultmanı çiftidir. Sabit oran, her iki çift için de*

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$$

dir. Yani elips,

$$\{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, F) = e{\cdot}d(P, \mathrm{l})\}$$

kümesidir.

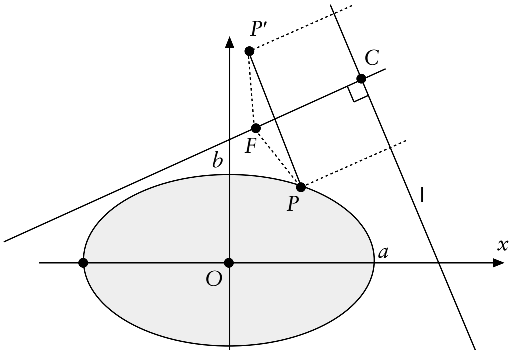
Kanıt: Önce, elipsin bir F odak noktası ve bir l doğrultmanı (ve bir e oranı) olduğunu varsayıp

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.
** ODTÜ Matematik Bölümü öğrencisi.

bunları bulmaya çalışalım. Bu biraz zaman alacak. Daha sonra bulduğumuz bu F, l ve e'nin istediklerimiz olduğunu kanıtlayacağız.

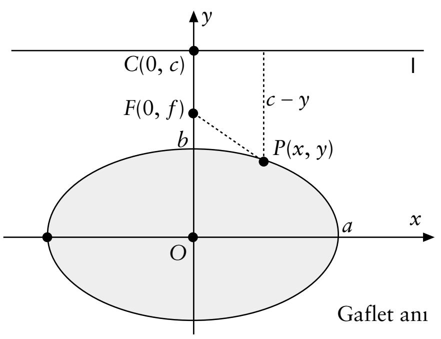
Her şeyden önce F odak noktası l doğrultmanının üstünde olamaz, çünkü aksi takdirde $d(P, F) = e \cdot d(P, \text{l})$ koşulu bir doğruyu verirdi ve elipsimizin bir doğru olmadığı malum.

F'den l doğrultmanına bir dik çekelim. C, bu dikle doğrultmanın kesişim noktası olsun. Kolayca görüleceği üzere, CF elipsin bir simetri doğrusudur



(bkz. yukardaki şekil: Eğer P noktası elipsin üstündeyse, P'nin CF'ye göre simetrisi olan P' noktası da aynı oran bağıntısını sağladığından elipsin üstündedir.) Bir önceki sonuçtan dolayı, CF doğrusu ya x ya da y eksenidir, yani C ve F noktalarının ikisi birden ya x ya da y ekseni üzerindedir. CF'nin x ekseni olduğunu kanıtlayacağız.

Bir çelişki elde etmek amacıyla, bir gaflet anında CF doğrusunun y ekseni olduğunu varsayalım. O



Gaflet anı

zaman l doğrultmanı x eksenine paraleldir. C ve F'nin koordinatları sırasıyla $(0, c)$ ve $(0, f)$ olsun. Şimdi, elips üstünde seçilmiş her $P(x, y)$ noktası için,

$$\frac{\sqrt{x^2+(y-f)^2}}{|c-y|} = \frac{d(P,F)}{d(P,\text{l})} = e$$

eşitliği geçerlidir. Her iki tarafın da karesini alıp paydaları eşitlersek, elipsin üstündeki her (x, y) noktası için,

$$x^2 + (y - f)^2 = e^2(c - y)^2$$

eşitliğini buluruz. (x, y) noktası elipsin üstünde olduğundan x^2 yerine $a^2(1 - y^2/b^2)$ koyabiliriz. Dolayısıyla her $y \in [-b, b]$ sayısı için,

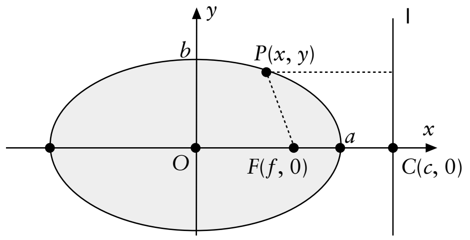
$$a^2(1 - y^2/b^2) + (y - f)^2 = e^2(c - y)^2$$

eşitliği geçerlidir. Demek ki

$$a^2(1 - Y^2/b^2) + (Y - f)^2 - e^2(c - Y)^2$$

polinomunun sonsuz sayıda kökü vardır, yani sıfır polinomudur. Dolayısıyla Y^2'nin katsayısı 0'a eşittir, yani, $e^2 = -a^2/b^2 + 1 < 0$, bir çelişki. Söz verdiğimiz gibi CF'nin x ekseni olduğunu kanıtladık.

Şimdi F ve C'nin koordinatları $(f, 0)$ ve $(c, 0)$ olsunlar. Hâlâ daha varsayımsal olan orana da e diyelim. f'yi, c'yi ve e'yi bulacağız.



Gerekirse y eksenine göre her şeyin simetrisini alarak c'nin negatif olmadığını varsayabiliriz. (Yukardaki şekle aldanmamalı, daha ne F'nin elipsin içinde olduğunu ve ne de $f < a < c$ eşitsizliklerini biliyoruz.)

Elips üstünde seçilmiş her $P(x, y)$ noktası için,

$$\frac{\sqrt{x^2+(y-f)^2}}{|c-y|} = \frac{d(P,F)}{d(P,\text{l})} = e$$

eşitliği geçerlidir. Her iki tarafın da karesini alıp paydaları eşitlersek, elipsin üstündeki her (x, y) noktası için,

$$(x - f)^2 + y^2 = e^2(c - x)^2$$

eşitliğini buluruz. (x, y) noktası elipsin üstünde olduğundan y^2 yerine $b^2(1 - x^2/a^2)$ koyabiliriz. Dolayısıyla her $x \in [-a, a]$ sayısı için,

$$(x - f)^2 + b^2(1 - x^2/a^2) = e^2(c - x)^2$$

eşitliği geçerlidir. Demek ki

$$(X - f)^2 + b^2(1 - X^2/a^2) - e^2(c - X)^2$$

polinomunun sonsuz sayıda kökü vardır, yani sıfır polinomudur; demek ki üç katsayısı da 0 olmalıdır:

$$\begin{aligned} 1 - b^2/a^2 - e^2 &= 0 \\ -2f + 2ce^2 &= 0 \\ f^2 + b^2 - e^2c^2 &= 0. \end{aligned}$$

Bu üç denklemden f'yi, c'yi ve e'yi bulacağız.

Birincisinden hemen e'yi bulabiliriz: $e^2 = 1 - b^2/a^2$. Bundan ve ikincisinden yararlanarak f'yi c cinsinden yazabiliriz:

$$f = ce^2 = c(1 - b^2/a^2).$$

Bu son iki sonuçtan ve üçüncü denklemden c'yi bulabiliriz:

$$\begin{aligned} 0 &= f^2 + b^2 - e^2c^2 \\ &= c^2(1 - b^2/a^2)^2 + b^2 - (1 - b^2/a^2)c^2 \\ &= c^2(-b^2/a^2 + b^4/a^4) + b^2. \end{aligned}$$

Gerekli sadeleştirmeyi yapıp c^2'yi tecrit edersek,

$$c = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} > a$$

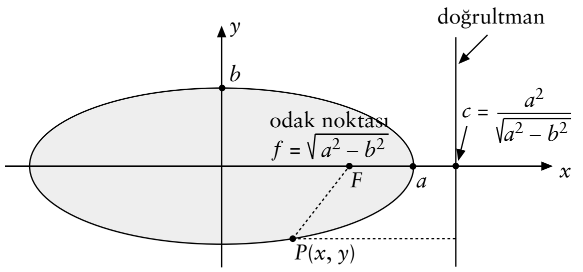
buluruz. Şimdi, c'nin bu değerini biraz önce bulduğumuz $f = c(1 - b^2/a^2)$ eşitliğine yerleştirirsek,

$$f = \sqrt{a^2 - b^2} < a$$

buluruz. e'yi zaten yukarda bulmuştuk:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1.$$

Demek ki, eğer varsa, $F(0, f)$ odak noktasını, ℓ $(x = c)$ doğrultmanını ve e oranını bulduk. Şimdi bu bulduğumuz F noktasının gerçekten odak noktası, ℓ doğrusunun gerçekten doğrultman olduğunu ve e'nin gerçekten sabit oran olduğunu kanıtlamalıyız.



$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ denklemiyle verilen elipste,
$|PF|/|PQ| = e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$.

Kanıtlayalım. $P(x, y)$, elipsin üstünde herhangi bir nokta olsun. Bakalım $d(P, F)/d(P, \ell) = e$ eşitliği geçerli mi? Tüm sayılar pozitif olduğundan, elips üstündeki her P noktasının

$$d(P, F)^2 = e^2 \cdot d(P, \ell)^2$$

eşitliğini, yani $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ eşitliğini sağlayan her (x, y) sayı çiftinin

$$d((x, y), (f, 0))^2 = e^2 \cdot (c - x)^2$$

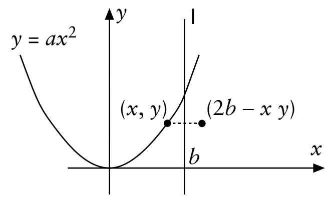
eşitliğini sağladığını kanıtlamak yeterli. Bu da, verilen c, f ve e sayılarıyla oldukça zahmetsiz biçimde yapılabilir. Bulduğumuz bu odak noktası ve doğrultmanın bir de y eksenine göre simetrileri vardır elbet. Kanıtımız bitmiştir. □

PARABOL

Parabollerin denkleminin bir $a > 0$ sabiti için, $y = ax^2$ biçiminde yazılabileceğini gördük. Tabii denklemin bu hale gelmesi için parabolü döndürmek, ötelemek ve bir eksene göre simetrisini almak gerekebilir; bunları yaptığımızı varsayalım.

Teorem. *y ekseni $y = ax^2$ denklemiyle verilen parabolün tek simetri eksenidir.*

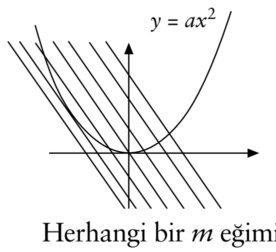
Kanıt: Önce dikey simetri eksenlerine bakalım. ℓ, parabolün dikey bir simetri ekseni olsun. O zaman ℓ doğrusunun denklemi, bir b için, $x = b$ biçimindedir. b'nin 0 olduğunu kanıtlayacağız. (x, y),



parabolün üstünde herhangi bir noktanın koordinatları olsun. Bu noktanın ℓ doğrusuna göre simetriği, kolayca görüleceği üzere, $(2b - x, y)$ noktasıdır. Demek ki bu nokta da parabolün üstünde. Şimdi hem $y = ax^2$ hem de $y = a(2b - x)^2$ denklemi geçerli olmalıdır. Demek ki, $ax^2 = y = a(2b - x)^2$ ve sadeleştirerek, $b^2 = bx$ olmalı. Ama bu eşitlik her x için sağlanmalı. Dolayısıyla $b = 0$ olmalı. Böylece, dikey doğruların arasında sadece $x = 0$ denklemiyle verilen y ekseninin parabolün simetri ekseni olduğunu kanıtladık.

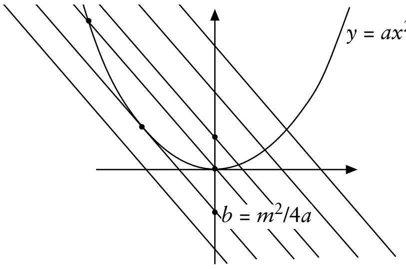
Belli bir doğruya paralel olan doğrular kümesine bir ***paralellik sınıfı*** adını verelim. Örneğin dikey doğrular kümesi bir paralellik sınıfıdır; x ekseniyle 45 derecelik açı yapan doğrular kümesi bir başka paralellik sınıfıdır. Bir paralellik sınıfı bir eğim tarafından belirlenir; daha açık bir ifadeyle, eğer bir paralellik sınıfı dikey doğrulardan oluşmuyorsa, o zaman bir m sayısı (eğimi) için, paralellik sınıfındaki her doğru $y = mx + b$ biçiminde yazılır ve $y = mx + b$ biçiminde yazılan her doğru bu paralellik sınıfındadır.

Şimdi, $y = ax^2$ parabolü açısından, dikey doğrular paralellik sınıfının diğer paralellik sınıflarına göre bir ayrıcalığı olduğunu kanıtlayacağız. Her dikey doğru parabolü sadece bir noktada keser, bunu biliyoruz. Bakalım başka bir paralellik sınıfı bu özelliği sağlıyor mu? Bizce sağlamıyor!



Herhangi bir m eğimini sabitleyip, eğimi m olan paralellik sınıfına, yani belli bir b sayısı için denklemi $y = mx + b$ şeklinde yazılan doğrulara ve bu doğruların parabolle kesişim noktalarına bakalım. (Yandaki sütundaki şekle bakın.) Olası bir kesişim noktasının x ve y koordinatları bir yandan $y = mx +$

b denklemini bir yandan da $y = ax^2$ denklemini sağlar. Demek ki birinci koordinat x, $ax^2 = mx + b$ denklemini sağlamalı. Bu son denklemin ya 0 ya 1 ya da 2 çözümü vardır: Eğer $b > -m^2/4a$ ise iki çözüm vardır, eğer $b = -m^2/4a$ ise bir çözüm vardır, eğer $b < -m^2/4a$ ise hiç çözüm yoktur. Her x çözümü için bir y $(= mx + b)$ bulunabileceğinden parabolle $y = mx + b$ doğrusunun kesişim noktası sayısı, $ax^2 = mx + b$ denkleminin çözüm sayısı kadardır. Böylece dikey doğrular paralellik sınıfının diğer doğrulara göre bir ayrıcalığı olduğunu göstermiş olduk.



$y = mx + b$ doğruları (b değişirken)
$y = ax^2$ parabolünü
0 ($b < m^2/4a$ ise),
1 ($b = m^2/4a$ ise) ya da
2 ($b > m^2/4a$ ise) noktada keserler.

Bu, bize simetri ekseni hakkında bilgi verir. Dikey doğrular parabol için ayrıcalıklı bir paralellik sınıfı olduğundan, simetri ekseni dikey doğruları korumalı, yani dikey bir doğrunun simetri eksenine göre simetrisi gene bir dikey doğru olmalı. Demek ki simetri doğrusu dikey ya da yatay olmalı. Dikeyse y ekseni olduğunu ilk paragrafta gördük. Yatay olamayacağını görmek kolay: Yatay bir simetri ekseni olsa, parabolün ikinci koordinatı negatif olan bir noktası olurdu ki, olmadığını biliyoruz. □

Şimdi de bir parabolün bir ve bir tek odak noktası ve doğrultmanı olduğunu ve oranın 1 olduğunu kanıtlayalım. Bunu $y = ax^2$ denklemiyle verilen parabol için kanıtlamak yeterli elbette.

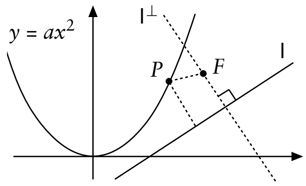
Teorem. *Bir parabolün bir ve bir tane odak noktası ve doğrultmanı vardır ve oran* 1*'dir, yani bir ve bir tane F noktası* (*odak noktası*) *ve* l *doğrusu* (*doğrultman*) *için*, *parabol*,

$$\{P : |PF| = d(P, l)\}$$

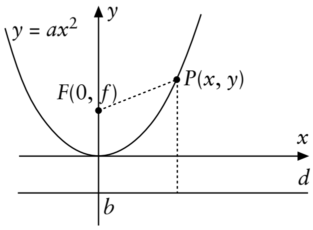
kümesidir. Eğer parabol $y = ax^2$ denklemiyle verilmişse, odak noktası $F(0, 1/4a)$ ve doğrultmanı $y = -1/4a$ doğrusudur.

Kanıt: $y = ax^2$ denklemiyle verilen parabole odaklanmak yeterli. Önce, parabolün bir F odak noktası ve bir l doğrultmanının olduğunu varsayıp F'yi ve l'yi bulalım. Oran hakkında herhangi bir varsayımda bulunmayacağız.

F'den l'ye $l^\perp$ dik doğrusunu inelim. Parabolün noktaları $|PF| = e{\cdot}d(P, l)$ eşitliğini sağlayan noktalar olduğundan, $l^\perp$ doğrusu parabolün bir simetri eksenidir.



Bir önceki önsava göre $l^\perp$ doğrusu y eksenidir. Demek ki l doğrusu yataydır ve F noktası y ekseninin üstündedir. $F(0, f)$ olsun ve l doğrusu da $y = b$ denklemiyle verilmiş olsun. Amacımız f'yi ve b'yi bulmak. Daha sonra bulduğumuz bu F'nin ve l'nin gerçekten odak noktası ve doğrultman olduğunu kanıtlayacağız.



l doğrusu parabolü kesemeyeceğinden (neden?) $b < 0$ olmalı.

(0, 0) noktası parabolün üstünde olduğundan, $P = (0, 0)$ alırsak, $|f| = |PF| = e{\cdot}d(P, l) = e{\cdot}|b| = -eb$ eşitliğini buluruz. Demek ki f'yi ve e'yi bulmak yeterli; o zaman b de belirleniyor.

$P(x, y)$ parabolün herhangi bir noktası olsun. O zaman,

$$\sqrt{x^2 + (y - f)^2} = d(P, F) = e{\cdot}d(P, d) = e(y - b)$$

eşitliği sağlanır. Her iki tarafın da karesini alalım.

$$x^2 + (y - f)^2 = e^2(y - b)^2$$

bulunur. Ama $y = ax^2$ denklemi sağlanmak zorunda. Demek ki her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$x^2 + (ax^2 - f)^2 = e^2(ax^2 - b)^2$$

eşitliği sağlanmalı. Bunu bir polinom gibi görürsek,

$$X^2 + (aX^2 - f)^2 - e^2(aX^2 - b)^2$$

polinomunun 0 polinomu olduğunu, yani katsayılarının 0 olduğunu görürüz. Demek ki,

$$a^2 = e^2a^2$$
$$1 - 2af = -2e^2ab$$
$$f^2 = e^2b^2$$

eşitlikleri sağlanmalı. (Sonuncusunu zaten biliyorduk, $|f| = -eb$ eşitliğini daha önce bulmuştuk.) Birincisinden $e = 1$ çıkar (e pozitif olmalı). e'nin bu değerini ikinci ve üçüncü denkleme yerleştirirsek,

$$1 = 2a(f - b) \text{ ve } f = \pm b$$

buluruz. Birinci denklemden dolayı $f = b$ olamaz. Demek ki $f = -b$. Bunu birinci denkleme yerleştirirsek, $4af = 1$ ve $f = 1/4a$ buluruz. Buradan da b

çıkar: $b = -f = -1/4a$.

Böylece olası odak noktasını, doğrultayı ve oranı bulduk: Sırasıyla $F(0, 1/4a)$ noktası, $y = -1/4a$ doğrusu ve $e = 1$ oranı. Şimdi bunların gerçekten odak noktası, doğrultay ve oran olduğunu kanıtlamalıyız. Okur dikkat ederse, bunu yukarda yaptığımızı görecektir; göremiyorsa hesapları bir defa daha yapmasında yarar vardır. □

HİPERBOL

Son olarak, başka konik kalmadığından, hiperbolü ele alacağız.

Önsav. (**a**) *$y = \pm bx/a$ doğruları $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ hiperbolünün asimptotlarıdır ve bu hiperbolün başka asimptotu yoktur.*

(**b**) *x ve y eksenleri $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ hiperbolünün simetri eksenleridir ve bu hiperbolün başka simetri ekseni yoktur.*

Kanıt: (a) Sayfa 27-28'de, $y = \pm bx/a$ doğrularının $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ hiperbolünün asimptotları olduklarını kanıtlamıştık. Aynı kanıt hiperbolün başka asimptotu olmadığını da kanıtlar.

(b) x ve y eksenlerinin simetri eksenleri olduğu bariz. Hiperbolün bir simetrisi asimptotları asimptotlara göndermek zorunda olduğundan, birinci kısımdan, eğer asimptotlar birbirine dik değilse, x ve y eksenlerinden başka simetri ekseni olmadığı anlaşılır. Eğer asimptotlar birbirine dikse, yani $a = b$ ise, asimptotların kendileri de ($y = x$ ve $y = -x$ doğruları) potansiyel simetri eksenleri olarak karşımıza çıkarlar. Bu iki doğrunun doğurduğu simetriler x ve y eksenlerini değiş tokuş ettiğinden, bunların simetri eksenleri olamayacağını anlamak zor değil. □

Teorem. *Bir hiperbolün iki tane odak noktası ve doğrultman çifti vardır ve her ikisi için de oran aynı ve 1'den büyüktür. Eğer hiperbol $a > b$ sayıları için $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ denklemiyle verilmişse bu çiftlerden biri*

$$F\left(\sqrt{a^2+b^2}, 0\right)$$

noktası (odak noktası) ve

$$d : x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

doğrusudur (doğrultman). Diğer çift bunların y *eksenine göre simetriğidir. Oran,*

$$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

dır. Bir başka deyişle, $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ denklemini sağlayan (x, y) noktalar kümesi,

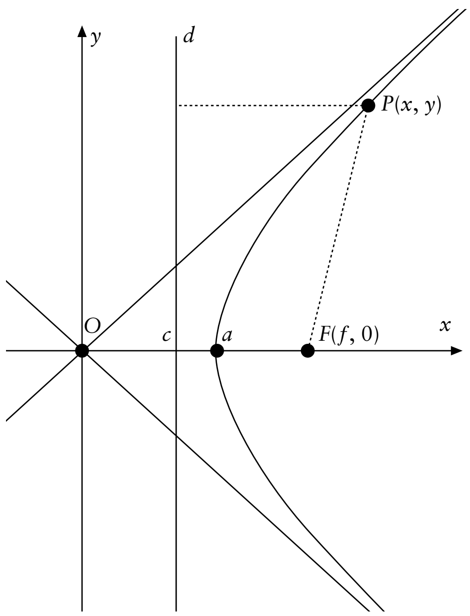
$$\{P : |PF| = e \cdot d(P, l)\}$$

kümesidir.

Kanıt: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ denklemiyle verilen hiperbole odaklanmak yeterli. Daha önce elips ve parabol için iki kez yaptığımız gibi, önce hiperbolün bir F odak noktası ve bir l doğrultmanının olduğunu varsayıp F'yi ve l'yi bulacağız. Oran hakkında herhangi bir varsayımda bulunmayacağız (ancak daha önce yapılanlardan, eğer elips ve parabolün hiperbol olmadığını biliyorsak, oranın 1'den büyük olması gerektiği anlaşılır.) Daha sonra bu bulunan odak noktası ve doğrultman adaylarının gerçekten odak noktası ve doğrultman olduğunu kanıtlayacağız.

Daha önce iki kez gördüğümüz gibi F'den geçen ve d'ye dik olan doğru, koniğin, yani hiperbolün bir simetri eksenidir. Yukardaki önsava göre bu simetri ekseni ya x ya da y eksenidir, yani F ya x ya da y eksenindedir ve d ya dikeydir ya da yatay. Ama d yatay olsa hiperbolü keser ve o zaman da hiperbolün sadece bir noktası olur... Demek ki d dikey ve F noktası x ekseni üzerinde.

F noktasının koordinatları $(f, 0)$ olsun. d doğrusu da $x = c$ denklemiyle verilmiş olsun. Gerekirse y eksenine göre simetriğini alarak $c \geq 0$ eşitsizliğini varsayabiliriz.



Şimdi hiperbol üzerinde herhangi bir $P(x, y)$ noktası alalım.

$$\sqrt{(x-f)^2+y^2} = d(P,F) = e\cdot d(P,d) = e\,|\,x-c\,|$$

denklemini elde ederiz. Bu eşitliğin her iki tarafının da karesini alırsak,

$$(x - f)^2 + y^2 = e^2(x - c)^2$$

eşitliğini elde ederiz. Ayrıca, y^2 yerine $b^2(x^2/a^2 - 1)$ yazarsak,

$$(x - f)^2 + b^2(x^2/a^2 - 1) = e^2(x - c)^2$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin sonsuz tane çözümü olduğu için,

$$(X - f)^2 + b^2(X^2/a^2 - 1) - e^2(X - c)^2$$

polinomu 0 polinomudur, yani üç katsayısı da 0'dır:

$$1 + b^2/a^2 - e^2 = 0$$
$$-2f + 2ce^2 = 0$$
$$f^2 - b^2 - e^2c^2 = 0.$$

Birinci denklemden e bulunur:

$$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

İkinci denklemden

$$f = ce^2 = c(1 + b^2/a^2) = c(a^2 + b^2)/a^2$$

buluruz. e'nin ve f'nin bu değerlerini üçüncü denkleme taşıyarak,

$$c^2(1 + b^2/a^2)^2 - b^2 - (1 + b^2/a^2)c^2 = 0$$

buluruz. Bunu sadeleştirip c'yi tecrit edersek, (az bişey hesap yapmak gerekiyor)

$$c = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

bulunur. Bundan ve daha önce bulduğumuz $f = c(a^2 + b^2)/a^2$ eşitliğinden f çıkar:

$$f = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Demek ki odak noktası, doğrultman ve oran varsa, bunlar yukarda bulduğumuz gibi olmalı. Şimdi de yukarda bulduklarımızın gerçekten hiperbolün odak noktası, doğrultmanı ve oranı olduğunu kanıtlayalım.

Hiperbolün üstünde herhangi bir (x, y) noktası alalım. Demek ki $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ eşitliği sağlanıyor. Şimdi (x, y)'nin F noktasına ve d doğrusuna olan uzunluklarını hesaplayalım. Bakalım bunların oranı yukarda bulduğumuz e mi? Aşağıdaki,

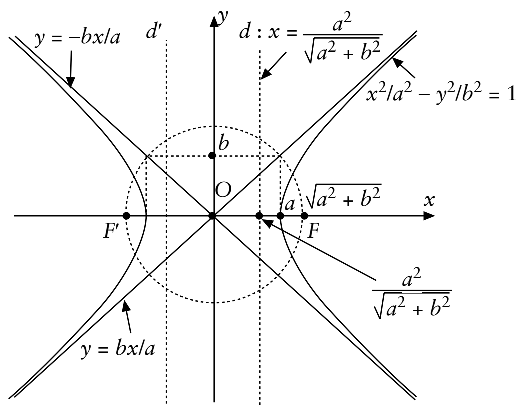
$$\frac{d(P,F)}{d(P,d)} = \frac{\sqrt{\left(x-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+y^2}}{\left|x-\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|} = \frac{\sqrt{\left(x-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+b^2\left(\dfrac{x^2}{a^2}-1\right)}}{\left|x-\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|}$$

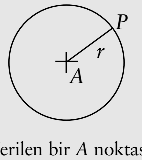
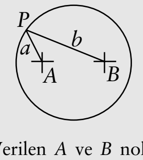
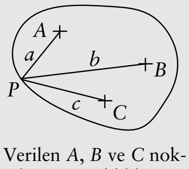
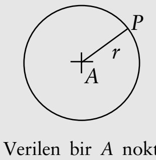
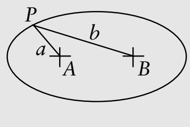
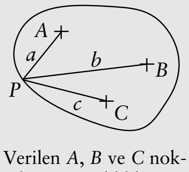
oranının

$$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Her iki tarafın da karesini alırsak, kolay bir hesapla eşitliğin gerçekleştiği görülür. Bu da kanıtımızı tamamlar. □

Son olarak, $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ hiperbolünün daha dikkatli bir resmini çizelim. ♥



Çember	**Gene çember**	**Ya bu ne?**	**Çember**	**Elips**	**Ya bu ne?**
					
Verilen bir A noktasına uzaklığının karesi sabit (r^2) olan noktalar (P) kümesi bir **çember**dir.	Verilen A ve B noktalarına uzaklıklarının karelerinin (a^2 ve b^2) toplamı sabit (r^2) olan noktalar (P) kümesi de bir **çember**dir.	Verilen A, B ve C noktalarına uzaklıklarının (a^2, b^2 ve c^2) toplamı sabit (r^2) olan noktalar (P) kümesi nedir?	Verilen bir A noktasına uzaklığı sabit (r) olan noktalar (P) kümesi bir **çember**dir.	Verilen A ve B noktalarına uzaklıklarının (a ve b) toplamı sabit (r) olan noktalar (P) kümesi bir **elips**tir.	Verilen A, B ve C noktalarına uzaklıklarının (a, b ve c) toplamı sabit (r) olan noktalar (P) kümesi nedir? Adı var mıdır? Böyle bir eğrinin "sivri" bir noktası olabilir mi?