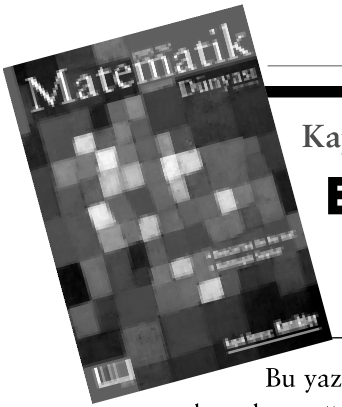


Kapak Konusu: Konikler

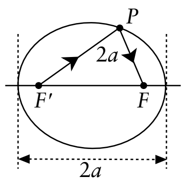
Elipsin Doğrultman Çemberleri, Teğetleri, Poncelet Teoremleri ve Diğer Şeyleri

Selçuk Demir* / *sdemir@bilgi.edu.tr* - Andrei Ratiu* / *ratiu@bilgi.edu.tr*

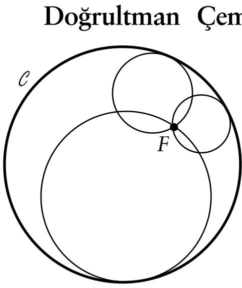
Bu yazıda elips için birçok ilginç teorem kanıtlayacağız. Bunların en ünlüsü ***Poncelet teoremleri*** adını taşıyan teoremlerdir.

Hiperbol ve parabol için de Poncelet teoremlerinin benzerleri vardır. Bunlar bir sonraki yazıda kanıtlanacak; bu yazıda özellikle sadece elipse odaklanacağız.

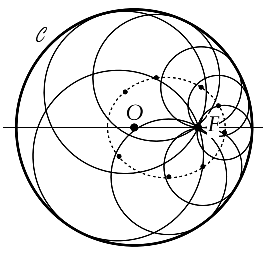
Kanıtlarımız cebirsel değil, geometrik olacak. “Sentetik geometri” adıyla bilinen milat öncesinden kalma yöntemi kullanacağız. Dolayısıyla elipsin cebirsel değil, geometrik tanımını yeğleyeceğiz: Bu yazıda, elips, verilen iki F ve F' noktasına olan uzaklıklarının toplamı sabit olan noktaların geometrik yeri anlamına kullanılacak. Bu sabit sayıyı $2a$ olarak yazacağız. $2a$ sayısına elipsin ***asal uzunluğu*** adı verilir.



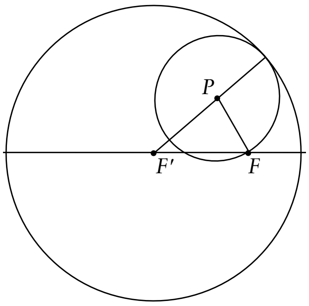
Doğrultman Çemberi. Düzlemde sabit bir $\mathcal{C}$ çemberi ve bir F noktası alalım. F’den geçen ve $\mathcal{C}$’ye teğet sonsuz tane çember vardır. Tüm bu çemberlerin merkezleri nasıl bir küme oluştururlar? Eğer nokta çemberin içindeyse yanıt aşağıda.



Teorem 1. *Düzlemde sabit bir $\mathcal{C}$ çemberi ve bu çemberin içinde sabit bir F noktası verilmiş olsun. $\mathcal{C}$’ye teğet olan ve F’den geçen çemberlerin merkezleri bir elips oluşturur. Bu elipsin bir odağı F noktası, diğeri de $\mathcal{C}$’nin merkezidir. Ayrıca bu elipsin asal uzunluğu $\mathcal{C}$’nin yarıçapı kadardır.*



Kanıt: $\mathcal{C}$’nin merkezi F' ve yarıçapı $2a$ olsun. P, çemberin içinde herhangi bir nokta olsun. P merkezli ve F'’den geçen bir çember ele alalım. (Bkz. yandaki şekil.) Bu iki çember ancak içten teğet olabileceklerinden, teğet olabilmeleri için gerek ve yeter koşul, merkezler arasındaki uzaklığın yarıçapların farkına eşit olmasıdır, yani

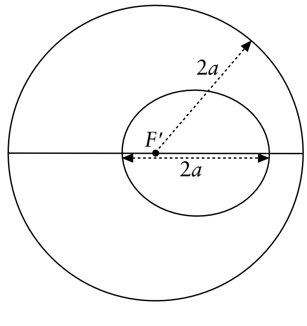


$$|PF'| = 2a - |PF|,$$

ya da

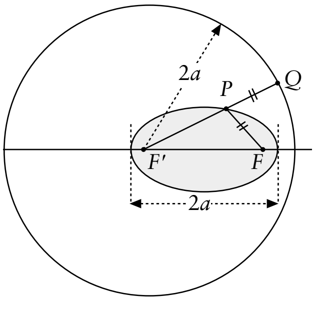
$$|PF'| + |PF| = 2a$$

koşuludur. Demek ki aradığımız geometrik yer, F ve F' odak noktalı ve asal uzunluğu $2a$ olan elipsmiş. □



Ayrıca, F ve F' noktaları ve $2a > |FF'|$ gelişigüzel alınabileceğinden, her elips bu şekilde elde edilir.

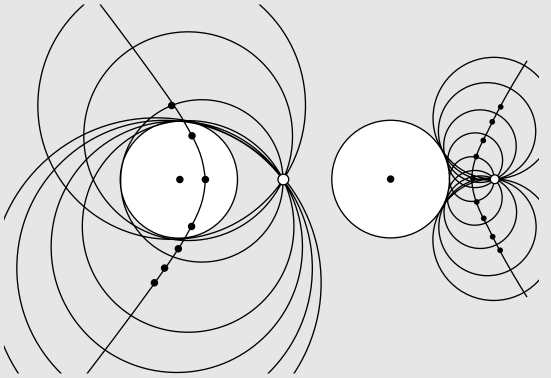
Teoremde verilen çembere, geometrik yer olarak bulunan elipsin ***doğrultman çemberi*** adı verilir. Daha açık bir deyişle, bir elipsin odaklarından birine merkezlenmiş ve yarıçapı elipsin $2a$ asal uzunluğu olan çemberlere elipsin ***doğrultman çemberleri*** denir. Demek ki her elipsin iki doğrultman çemberi vardır; her ikisinin de yarıçapı $2a$’dır ve her biri bir odak noktasında merkezlenmiştir.



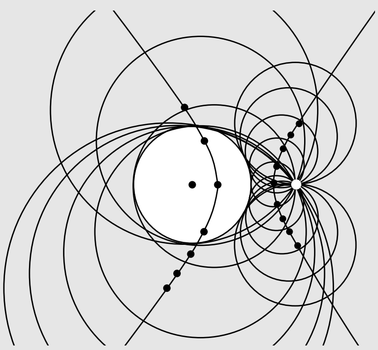
Elips verildiğinde doğrultman çemberini geometrik yer olarak elde etmek kolaydır: Elipsin odak noktaları F ve F' olsun. P, elips üstünde her-

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri.

Teorem 1'de verilen nokta çemberin dışındaysa ne elde ederiz? O zaman, verilen çembere teğet olan iki türlü çember vardır: Verilen çemberi içerenler ve içermeyenler. İçermeyenler aşağıda sağdaki resimdeki gibi geometrik bir yer oluştururlar. İçerenlerse soldaki gibi. Birinci geometrik



yer bir hiperbolün bir koludur, ikincisiyse diğer kolu (yandaki şekildeki gibi.) Bu dediklerimizin kanıtı aynen Teorem 1'in kanıtı gibidir ve okura bırakılmıştır.

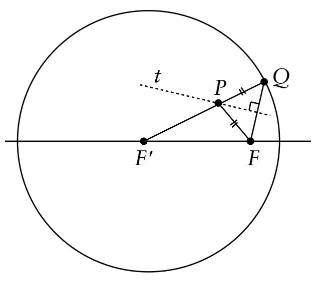


Teorem. *Verilen bir çembere teğet olan ve bu çember dışında verilmiş bir noktadan geçen çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri bir hiperboldür. Her hiperbol de bu şekilde elde edilir.*

hangi bir nokta olsun. $F'P$ doğru parçasını P'den itibaren elipsin dışına doğru $|PF|$ kadar uzatalım ve bu noktaya Q diyelim. O zaman,

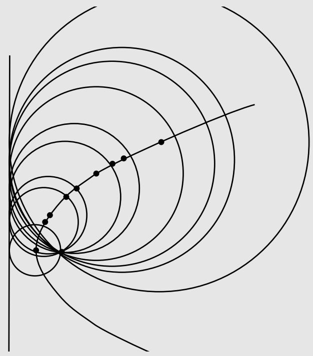
$$|F'Q| = |F'P| + |PQ| = |F'P| + |PF| = 2a.$$

Böylece elde edilen Q noktalarının kümesi F' merkezli ve $2a$ yarıçaplı çemberdir, yani F' merkezli doğrultman çemberidir. P merkezli ve F odak noktasından geçen çember elbette büyük çembere (içten) teğettir.



Parabolde Ne Oluyor?

Hiperbol ve elipslerin bu biçimde elde edilip de parabollerin bu şekilde elde edilmedikleri tuhaf gelebilir... Ama paraboller de bir anlamda bu şekilde elde edilirler: Çember yerine doğru alalım (bir doğru, bir anlamda, yarıçapı sonsuz olan bir çemberdir.) Verilmiş bir noktadan geçen ve verilmiş bir doğruya teğet olan çemberlerin merkezi bir parabol oluşturur. Bunun kanıtı oldukça kolaydır. Çemberlere teğet olan doğruyu doğrultman, çemberlerin ortak noktasını odak noktası olarak düşünürsek, oranı 1 olan bir konik, yani bir parabol elde edeceğimiz aşikârdır.



Teorem. *Verilen bir doğruya teğet olan ve bu doğru dışında verilmiş bir noktadan geçen çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri bir paraboldür. Verilen doğru parabolün doğrultmanı ve verilen nokta parabolün odak noktasıdır. Her parabol de bu şekilde elde edilir.*

Alıştırma. Verilen bir parabole ve bu parabolün doğrultmanına teğet olan çemberlerin merkezinin geometrik yerini bulun.

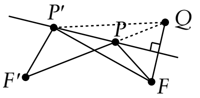
Aynı şekil üzerinde düşünmeye devam edelim. PQF ikizkenar bir üçgen olduğundan, P'den QF'ye inilen dik, QF'nin ortadikmesidir.

Bunun tersi de doğrudur: Q, doğrultman çemberi üstünde herhangi bir nokta olsun. QF'nin t ortadikmesiyle QF' doğrusunun kesişimi elipsin üstündedir. Nitekim t ortadikmesinin her noktasının Q'ye ve F'ye uzaklıkları eşittir. Dolayısıyla eğer t ile QF' doğrusunun kesişim noktasına P dersek, $|PF| = |PQ|$ ve

$$|F'P| + |PF| = |F'P| + |PQ| = |F'Q| = 2a.$$

Dolayısıyla P noktası elipsin üstündedir.

P noktasının t ortadikmesine göre önemli bir özelliği de şu: F' noktasından F noktasına t'ye değerek giden en kısa yol P noktasından geçer, yani $F'P$ ve PF doğru parçalarından oluşan $F'PF$ yolu-



dur. Nitekim eğer P', ortadikme üstünde herhangi bir noktaysa, o zaman,

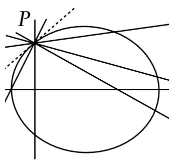
$$|F'P'| + |P'F| = |F'P'| + |P'Q| > |F'Q| = 2a$$

eşitsizliği geçerlidir. Bundan çok ilginç bir şey çıkar: Ortadikme elipse tek bir noktada değer... Nitekim, biraz önce kanıtladığımız gibi, ortadikme üstünde olan her P' noktası için, $|F'P'| + |FP'| > 2a$.

Eğer elipsin bir teğetini, elipsi tek bir noktada kesen bir doğru olarak tanımlarsak, o zaman yukardaki t ortadikmesinin elipse P noktasında teğet olduğunu görürüz.

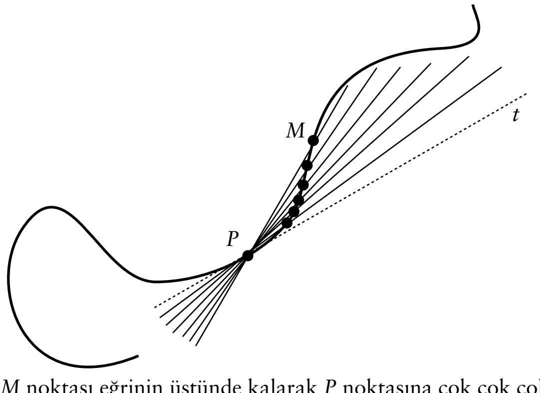
Her ne kadar elipse tek noktada değen doğru gerçekten elipsin teğetiyse de, "teğet"in tanımı böyle değildir. Örneğin, parabole tek noktada değen her doğru parabolün teğeti değildir.

Teğet Kavramı. İkinci yazımızda, tek bir doğru dışında, bir elipsin belli bir P noktasından geçen her doğrunun elipsi iki değişik noktada kestiğini kanıtlamıştık (sayfa 26). Ayrıca elipsi tek noktada kesen ve P'den geçen bu yegâne doğrunun elipse P'de teğet olan doğru olduğunu da fısıldamıştık.



Bırakın kanıtlamayı, böyle bir savı iddia edebilmek için bile "teğet"in ne demek olduğunu bilmeliyiz. Terimleri tanımlanmamış bir önermeyi kanıtlamak bir hayli zor olmalı...

Teğet kavramını tanımlayalım... Herhangi bir eğri alalım. (Bizim ilgilendiğimiz durumda eğri bir elips.) Eğrinin üstünde sabit bir P noktası alalım. Eğrinin üstünde ayrıca bir de oynak bir M noktası alalım. PM doğru parçasını, yani kirişini çekelim. Şimdi oynak M noktası sabit P noktasına çok çok çok yaklaştıkça, ama eğrinin üstünde kalarak P noktasına çok çok çok yaklaştıkça PM doğru parçasının aldığı hallere bakalım. Yukardaki resim zihin açabilir. M noktası P noktasına çok çok çok yaklaşırken, PM kiriş doğruları bir t doğrusuna çok çok çok yaklaşabilir, o kadar ki, M noktası nerdeyse P noktası olduğunda, PM doğrusu da nerdeyse t doğrusu olabilir. Her zaman böyle bir t doğrusu olmayabilir, ama olduğunda bu t doğrusuna eğrinin P'de ***teğeti*** adı verilir.



M noktası eğrinin üstünde kalarak P noktasına çok çok çok yaklaştığında, MP kiriş doğruları bir t doğrusuna çok çok çok yaklaşıyorsa, o zaman t doğrusuna ***teğet doğru*** denir (eğriye P'de teğet doğru.)

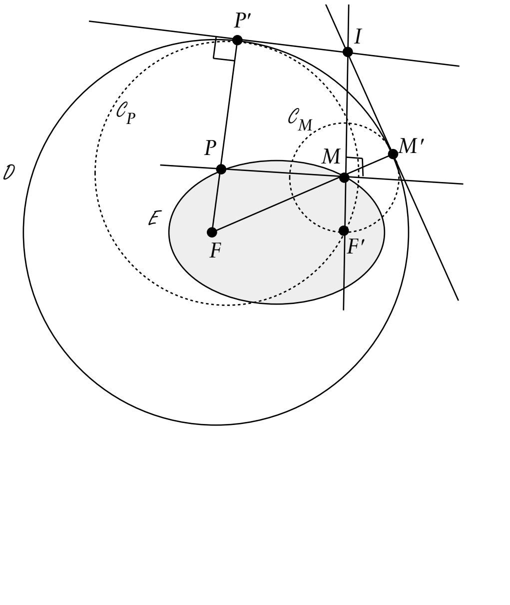
Bu tanımın anlamlı olabilmesi için "çok çok çok yaklaşmanın" (ki buna matematikte yakınsamak denir) tanımlanması gerekir. Ama bunu yapmayacağız. Hem konuyu çok dağıtmış oluruz, hem de aşağıda yaptıklarımız o kadar doğal olacak ki, bu tanım meselesini açmasaydık hemen hemen kimse böyle bir sorunun farkına varmayacaktı...

Sonuç olarak teğetler kirişlerin limitidir. Bunu aklımızda tutup devam edelim.

Önce elipsin kirişlerini inceleyelim. Kirişleri inceledikten sonra kirişlerin limitte ne hale geldiklerine bakacağız.

Kirişler. Odak noktaları F ve F' olan bir $\mathcal{E}$ elipsi alalım. Elipsin üstünde herhangi iki P ve M noktası alalım. Bu bölümde PM kirişi üzerine önemli bir geometrik bilgi edineceğiz ve böylece M noktası elipsin üstünde kayarak P'ye yakınsadığında, yani PM kirişi P'den geçen teğete dönüştüğünde, bu teğetin geometrik özelliğini bulmuş olacağız.

Aşağıdaki şekilden izleyelim. Elipsin F merkezli $\mathcal{D}$ doğrultman çemberini çizelim. Doğrultman çemberi üzerinde P'ye tekabül eden noktaya P' diyelim; yani P', $\mathcal{D}$ ile FP doğrusunun kesişim noktası olsun. Doğrultman çemberinin tanımından dolayı, P merkezli ve $|PF'|$ yarıçaplı $\mathcal{C}_P$ çemberi $\mathcal{D}$ çemberine P' noktasından teğettir. Nasıl P noktasından hareketle $P' \in \mathcal{D}$ noktasını ve $\mathcal{C}_P$ çemberini bul-



muşsak, M noktasından hareketle $M' \in \mathcal{D}$ noktasını ve $\mathcal{C}_M$ çemberini bulalım. P' ve M' noktalarından $\mathcal{D}$ doğrultman çemberine olan teğetleri çizelim ve bu teğetleri bir I noktasında kesiştirelim. P' noktasından geçen teğet doğru $\mathcal{C}_P$ çemberine de teğettir, çünkü $\mathcal{C}_P$ ve $\mathcal{D}$ çemberleri P' noktasından birbirine teğettir. Aynı şekilde M' noktasından geçen teğet doğru $\mathcal{C}_M$ çemberine de teğettir. Dolayısıyla I'nin $\mathcal{C}_P$, $\mathcal{C}_M$ ve $\mathcal{D}$ çemberlerine göre gücü (bkz. sayfa 40-44) eşittir:

$$\pi(I, \mathcal{C}_P) = |IP'|^2 = \pi(I, \mathcal{D}) = |IM'|^2 = \pi(I, \mathcal{C}_M).$$

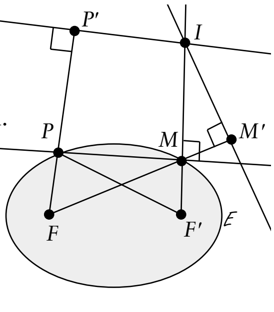
Ayrıca,

$$\pi(F', \mathcal{C}_P) = 0 = \pi(F', \mathcal{C}_M),$$

çünkü $F' \in \mathcal{C}_P$ ve $F' \in \mathcal{C}_M$. Demek ki I ve F' noktaları $\mathcal{C}_P$ ve $\mathcal{C}_M$ çemberlerinin eşgüç doğrusunun üstünde. Ama sayfa 42'deki Teorem 2'de eşgüç doğrusunun çemberlerin merkezlerini birleştiren doğruya dik olduğunu görmüştük. Demek ki $IF' \perp PM$.

Aşağıdaki resimde, yardımcı çemberleri atarak, bulduğumuzu özetledik.

Veriler: $\mathcal{E}$, F ve F' odak noktalı elips. $P \in \mathcal{E}$.
$|PP'| = |PF'|$ ve FPP' doğrusal.
$|MM'| = |MF'|$ ve FMM' doğrusal.
M' noktasından geçen ve FMM' doğrusuna dik olan doğru, P' noktasından geçen ve FPP' doğrusuna dik olan doğruyu I noktasında keser.
Sonuç: IF' doğrusu PM kirişine diktir.

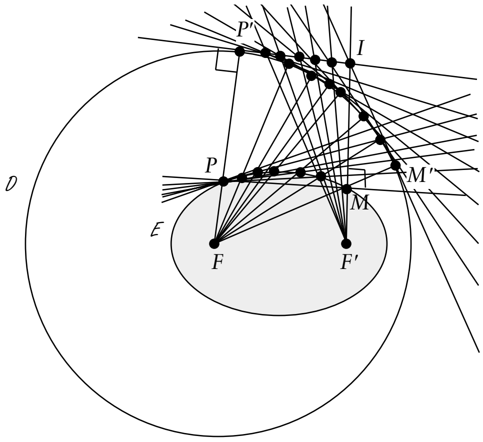


Teğet. Şimdi M noktasını $\mathcal{E}$ elipsinin üstünde kaydırarak P noktasına çok çok çok yaklaştıralım, yani PM kirişini P'den geçen teğete yakınsatalım. Yan sütunun tepesindeki şekilden takip edin. (Bu bir yarı şakadır!)

M noktası elips üzerinde kayarak P noktasına yakınsadığında, $\mathcal{C}_M$ çemberi $\mathcal{C}_P$ çemberine yakınsar. $\mathcal{C}_M$ çemberi $\mathcal{C}_P$ çemberine yakınsadığında, M' noktası P' noktasına yakınsar. Ayrıca I noktası da ($\mathcal{D}$ çemberine P' noktasından geçen teğet üstünde kalarak) P' noktasına yakınsar.

M noktası elips üzerinde kayarak P noktasına yakınsadığında, I noktası P' noktasına yakınsar ama F' odak noktasına bişeycikler olmaz, o olduğu yerde durur, çünkü elipsi yerinden oynatmıyoruz.

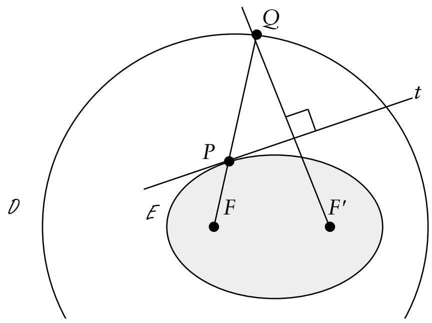
Demek ki M noktası elips üzerinde kayarak P noktasına yakınsadığında, IF' doğrusu $P'F'$ doğrusuna dönüşür ve yol boyunca $IF' \perp PM$ ilişkisi korunur. Demek ki, eğer t, PM doğrusunun limitini, yani elipse P noktasından geçen teğeti simgelerse, limitte $P'F' \perp t$ ilişkisini elde ederiz. Müthiş bir teorem kanıtladık (yukardaki şekilden takip edebilirsiniz):



Teorem 2. *P, odak noktaları F ve F' olan elips üstünde bir nokta olsun. Q, F merkezli doğrultman çemberi üstünde P'ye tekabül eden nokta olsun. O zaman, QF' doğru parçasının orta dikmesi elipse P'de teğettir.*

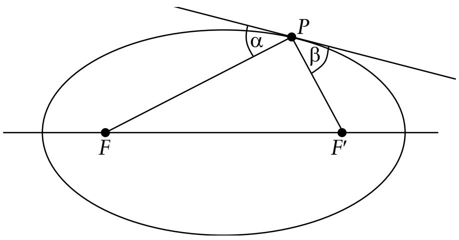
Bunun tersi de doğrudur: Eğer bir t doğrusu elipse teğetse ve Q, F' noktasının t'ye göre simetriği ise, o zaman Q noktası F merkezli doğrultman çemberi üstündedir ve t elipse $t \cap FQ$ noktasında teğettir.

Böylece bir elipse teğetler kolayca çizilir. F merkezli doğrultman çemberinin bir P' noktası diğer odak noktası F' ile birleştirilir ve $P'F'$ doğru parçasının orta dikmesi alınır.

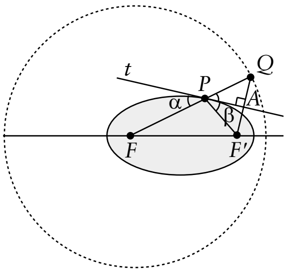


Giriş yazımızda (sayfa 15) eliptik bir bilardo masasında odak noktalarından birinde bulunan ve herhangi bir yöne doğru atılan topun, masanın kenarına çarptıktan sonra (elbette topa falso vermemek koşuluyla) diğer odak noktasından geçeceğini söylemiştik. Aşağıdaki teorem bunu matematiksel olarak kanıtlıyor.

Teorem 3 (Elipsin Optik Özelliği). *P, odak noktaları F ve F' olan $\mathcal{E}$ elipsinin üstünde herhangi bir nokta ve t bu noktadan geçen herhangi bir doğru olsun. α ve β aşağıdaki şekildeki açılar olsun. O zaman t'nin elipse teğet olması için gerek ve yeter koşul $\alpha = \beta$ eşitliğidir.*



Kanıt: Önce t'nin elipse P noktasında teğet olduğunu varsayalım. Q, F merkezli doğrultman çemberi üstünde P'ye tekabül eden nokta olsun.

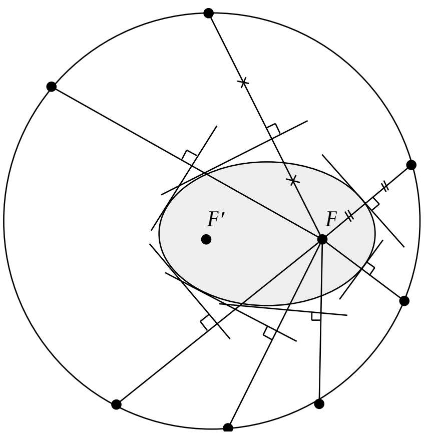


t'nin QF' doğru parçasının ortadikmesi olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, $\beta = m(APQ) = \alpha$.

Şimdi $\alpha = \beta$ eşitliğini varsayalım. FP'yi F merkezli doğrultman çemberine kadar uzatalım. Kesişim noktasına Q diyelim. (Bkz. yandaki şekil.) Elbette $m(F'PA) = \alpha = m(APQ)$. Ayrıca $|PQ| = |PF'|$ olduğundan, t doğrusu QF' doğru parçasının orta dikmesidir, demek ki elipse teğettir. □

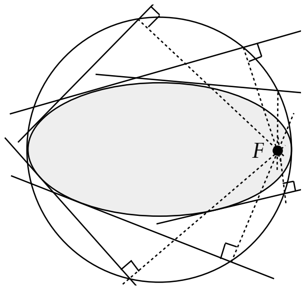
Poncelet teoremlerinin kanıtına geçmeden önce çok güçlü olan Teorem 2'nin birkaç ilginç sonucunu daha ortaya çıkaralım.

Sonuç 4. *F odak noktasının elipsin teğetlerine göre simetrilerinin geometrik yeri F' merkezli doğrultman çemberidir.*

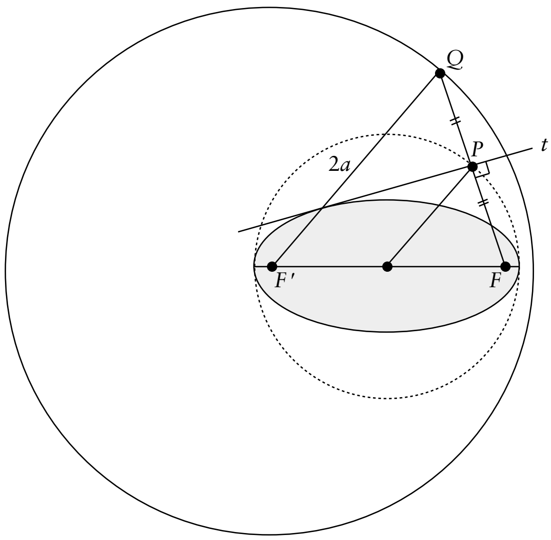


Bu kolaydı. (Ama gene de şaşırtıcıydı...)

Sonuç 5. *Odak noktalarının elipsin teğetlerinin üstüne olan izdüşümlerinin geometrik yeri, merkezi elipsin merkezi olan ve yarıçapı a olan çemberdir.*



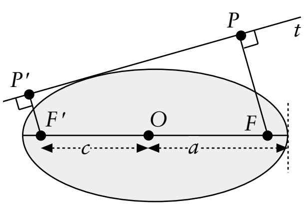
Kanıt: F merkezli doğrultman çemberini çizelim. t, elipse herhangi bir teğet olsun. P, F odak noktasının t'nin üstüne olan izdüşümü olsun. FP doğru parçasını doğrultman çemberini bir Q noktasında kesecek şekilde F'den P'ye doğru uzatalım.



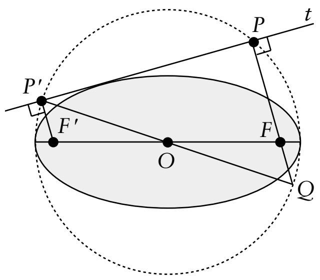
$|FP| = |PQ|$ eşitliğini biliyoruz. Şimdi F' odak noktasıyla Q noktasını birleştirelim. $|F'Q| = 2a$ eşitliğini de biliyoruz. Şimdi QFF' üçgenine bakalım. P'den QF' doğrusuna çekilen paralel doğru, FF' doğru parçasını tam ortadan böler, yani elipsin merkezi olan O noktasında keser. Ayrıca benzer üçgenlerden dolayı $|OP| = a$ eşitliği doğrudur. □

Yukardaki sonuç her iki odak noktası için de geçerlidir elbette. Merkezi elipsin merkezi, yarıçapı a olan çembere ***elipsin asal çemberi*** adı verilir.

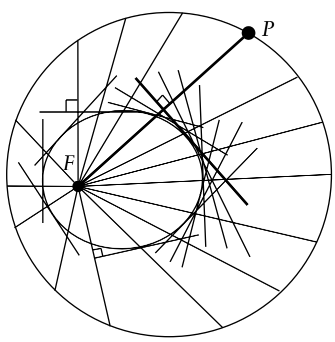
Sonuç 6. *Odak noktalarının elipsin teğetlerinin üstüne olan izdüşümlerinin uzunluklarının çarpımı $a^2 - c^2$ sayısına eşittir. Yani yandaki şekilde, $|PF| \cdot |P'F'| = a^2 - c^2$ eşitliği geçerlidir.*



Kanıt: O merkezli a yarıçaplı $\mathcal{C}$ çemberini çizelim. t, elipse herhangi bir teğet olsun. P ve P', sırasıyla F ve F' odak noktalarının t üzerine olan izdüşümleri olsun. P ve P' noktalarının $\mathcal{C}$ çemberi üstünde olduklarını bir önceki sonuçtan biliyoruz. PF doğrusunu $\mathcal{C}$ çemberini $Q \neq P$ noktasında kesecek kadar uzatalım. $P'PQ$ üçgeni dik üçgendir. Dolayısıyla $P'Q$ doğrusu O'dan geçmek zorundadır. Bundan da kolaylıkla $F'P'O$ ve FQO üçgenlerinin eşit oldukları çıkar. Demek ki $|PF|\cdot|P'F'| = |PF|\cdot|FQ| = |\pi(F, \mathcal{C})|$ (= F'nin $\mathcal{C}$ çemberine göre gücünün mutlak değeri, bkz. sayfa 40). Şimdi $\pi(F, \mathcal{C})$ sayısını hesaplayalım: $\pi(F, \mathcal{C}) = |OF|^2 - |OA|^2 = c^2 - a^2$. Sonucumuz kanıtlanmıştır. □



Sonuç 7. *Bir çember ve bu çember içinde sabit bir F noktası verilmiş olsun. P noktası çember üstünde dolaşırken AP doğrularının orta dikmeleri sabit bir elipse teğettirler, daha matematiksel deyişle, ortadikmelerin zarfı bir elipstir.*

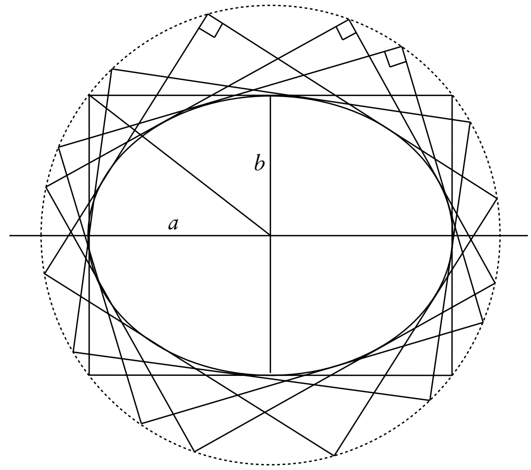


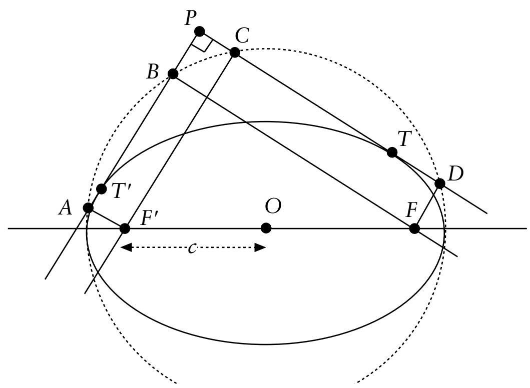
Bunun kanıtı bariz olmalı artık. Bu sonuçtan esinlenerek ve Sonuç 6'yı gözönünde bulundurarak şunu kanıtlayabiliriz: Aynı tarafında bulunan sabit iki noktaya olan uzaklıklarının çarpımı sabit olan değişken bir doğrunun zarfı, odakları bu sabit noktalar olan bir elipstir. (Tümce Nazmi İlker ve Nâzım Terzioğlu'nun **Konikler** adlı kitabından alınmıştır.)

Bir sonraki sonucu okumadan önce yan sütundaki ilk şekli dikkatlice inceleyin; sonucumuz o şeklin sırrını açıklamaktadır.

Sonuç 11. *İki kenarı da elipse teğet olan dik açıların köşelerinin geometrik yeri merkezi elipsin merkezi olan ve yarıçapı* $(a^2 + b^2)^{1/2}$ *olan çemberdir.* (*Buradaki a ve b, elipsin en uzun ve en kısa kiriş uzunluklarının yarısıdır.*)

Kanıt: Dik açı TPT' olsun. PT ve PT' teğetleri elipse T ve T' noktalarında değsinler. Odak noktalarının bu teğetlere göre izdüşümleri yukardaki şekildeki gibi A, B, C, D olsunlar. Bu izdüşümlerin asal çember üstünde olduklarını biliyoruz (Sonuç 5). Öte yandan, $|PD| = |FB|$ ve $|PC| = |AF'|$. Demek

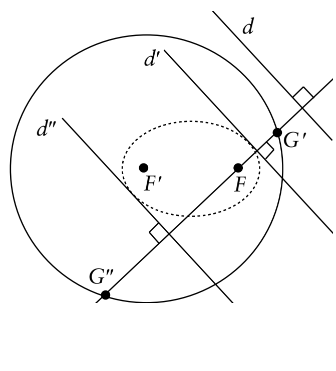




ki, sonuç 6'dan dolayı, $|PD|\cdot|PC| = |FB|\cdot|AF'| = a^2 - c^2 = b^2$ (Son eşitlik neden?) Ama en soldaki sayı P'nin asal çembere göre olan gücü, dolayısıyla $|PO|^2 - a^2$ sayısına eşit. Demek ki, $|PO|^2 - a^2 = b^2$ ve $|PO|^2 = a^2 + b^2$. □

Şimdi verilen bir elipse verilen bir doğrultuda nasıl bir teğet çizileceğini görelim. Elips, F ve F' odak noktaları ve $2a$ asal uzunluğuyla verilmiş olsun. Elips eğrisinin tümü değil de sadece odak noktaları ve asal uzunluğu var... Bu nokta önemli.

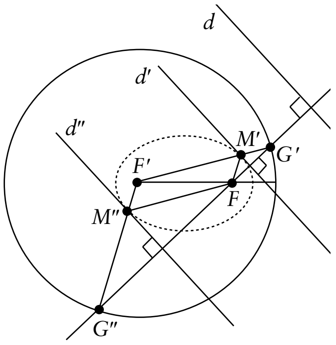
Verilen bir elipse verilen bir doğrultuya paralel bir teğet çizmek. Doğrultu d doğrusuyla verilmiş olsun. F' merkezli doğrultman çemberini çizelim. d doğrusuna F'den geçen dik doğruyu çizelim. Bu dik doğru doğrultman çemberini

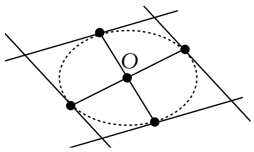


(yukardaki şekildeki gibi) G' ve G'' noktalarında kessin. FG' ve FG'' doğru parçalarının d' ve d'' ortadikmeleri elipse teğet ve d'ye paralel doğrular olmak zorundadırlar.

Teğetlerin elipse değim noktalarını da belirleyebiliriz. Bunun için $F'G'$ ve $F'G''$ doğrularını çizip d' ve d'' ortadikmeleriyle kesiştirmek yeterli.

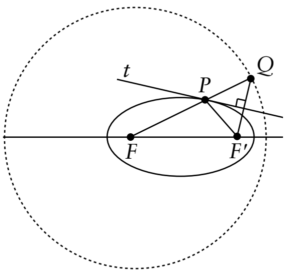
Bu noktalara M' ve M'' diyelim. $G''M''F$ ve $G''F'G'$ üçgenleri ikizkenar olduklarından $M''F$ ve $F'G'$ doğruları birbirlerine paraleldir. Benzer nedenden $M'F$ ve $F'G''$ doğruları da birbirlerine paraleldir. Demek ki $M''F'M'F$ bir paralelkenardır. Demek ki $M'M''$ doğrusu elipsin O merkezinden geçer. Bundan da şu sonuç çıkar:

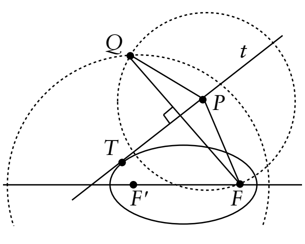




Sonuç 7. *İki paralel teğetin bir elipse değim noktaları elipsin merkezine göre simetriktir.*

Verilen bir elipse verilen bir noktadan geçen bir teğet çizmek. Elips üstünde bir nokta verilmişse bu noktadan elipse nasıl teğet çizeceğimizi biliyoruz. Bunu yanda bir kez daha gösterdik. Ya nokta elips üstünde değilse, o zaman nasıl çizeceğiz teğeti? Her şeyden önce noktanın elipsin dışında verilmiş olmalı elbet. Elipsin dışında verilmiş noktaya P diyelim. Bir an için probleme çözülmüş gözüyle bakalım. P'den geçen t teğeti (ki bu iki teğetten biridir) elipse T noktasında değsin. F'nin t'ye göre simetriği olan Q noktası F' merkezli doğrultman çemberi üzerindedir. P noktasının Q ve F noktalarına olan uzaklıkları eşit olacağından, Q noktası P merkezli ve $|PF|$ yarıçaplı çember üzerinde olmak zorundadır. Böylece Q noktasını buluruz. Gerisi oldukça kolay. QF doğru parçasının orta dikmesi P'den geçen teğettir.



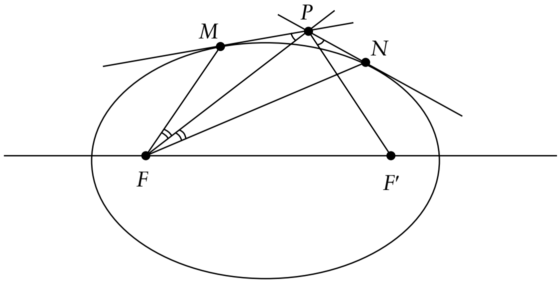


Bu kadar ilginç sonuç yeter. Şimdi meşhur Poncelet teoremlerine gelelim.

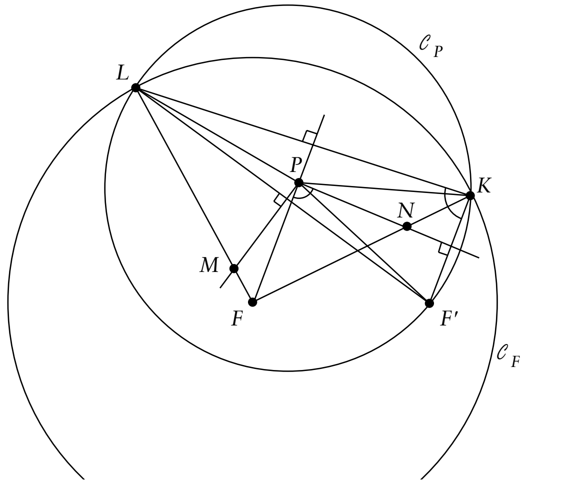
Elips İçin Poncelet Teoremleri. *M ve N, elips üzerinde iki nokta, P de bu noktalardaki teğetlerin kesişim noktası olsun. F ve F' elipsin odaklarını simgelesin. Bu durumda*

1. $m(MPF) = m(NPF')$.

2. $m(MFP) = m(PFN)$.



Kanıt: 1. F merkezli doğrultman çemberine $\mathcal{C}_F$ diyelim. FN, $\mathcal{C}_F$'yi K'de kessin. FM de $\mathcal{C}_F$'yi L'de kessin. PN teğetinin KF' doğru parçasının, PM teğetinin de LF' doğru parçasının ortadikmeleri olduklarını biliyoruz. Dolayısıyla $|PL| = |PF'| = |PK|$. P merkezli ve PF' yarıçaplı $\mathcal{C}_P$ çemberini çizelim. Bu çember $\mathcal{C}_F$'yi K ve L noktalarında keser. FP

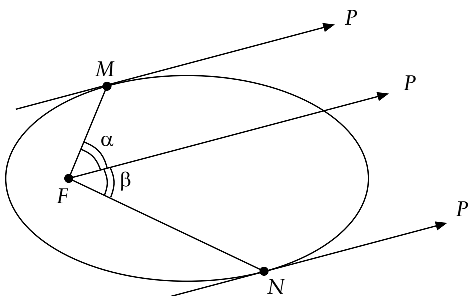


doğrusu $\mathcal{C}_P$ ve $\mathcal{C}_F$ çemberlerinin merkezlerinden geçen doğru olduğundan, bu çemberlerin KL ortak kirişine diktir. Ayrıca PN ve KF' doğruları da birbirlerine dikler. Demek ki $F'KL$ ve NPF açılarının kenarları dik ve dolayısıyla ölçüleri aynı. Öte yandan $\mathcal{C}_P$ çemberi K ve L noktalarından geçtiğinden, $F'PL$ açısının ölçüsü (açılar saatin ters yönünde gider) $F'KL$ açısının ölçüsünün yarısıdır. Ama PM doğrusu $F'PL$ açısının açıortayıdır. Demek ki $F'PM$ açısıyla FPN açısının ölçüleri aynıdır. Bundan istenen eşitlik çıkar.

2. FP doğrusu, KL doğru parçasının ortadikmesidir, dolayısıyla MFN açısının açıortayıdır. □

Poncelet Teoremleri'nde M'yi sabit tutup N'yi yavaş yavaş iki teğet paralel olacak şekilde elipsin üstünde kaydırırsak (ya da P'yi teğetlerin birinin üstünde sonsuza doğru kaydırırsak), P noktası sonsuza kaçar. O zaman birinci eşitlik $0 = 0$ olur ama ikinci eşitlik ilginç bir başka eşitliğe bürünür:

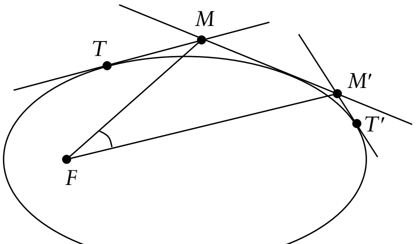
Sonuç 8 (Paralel teğetler için Poncelet Teoremi) *Eğer bir elipse iki paralel teğet çizilirse, o zaman aşağıdaki şekilde* $\alpha = \beta$*'dir.*



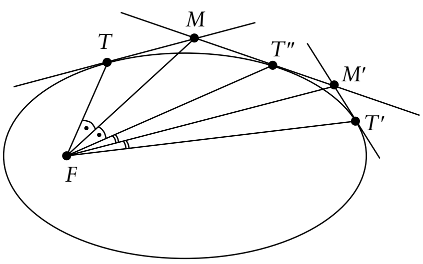
Bu sonucun geometrik (yani sentetik) kanıtını bulmayı okura bırakıyoruz.

Poncelet Teoremleri'nin birkaç ilginç uygulamasını daha görelim.

Sonuç 9. *Bir elipsin sabit iki teğetinin değişken bir teğet üzerinde ayırdığı doğru parçası her odaktan sabit bir açı altında görülür. Daha doğrusu, bir aşağıdaki şekilde,* $m(MFM') = m(TFT')/2$.



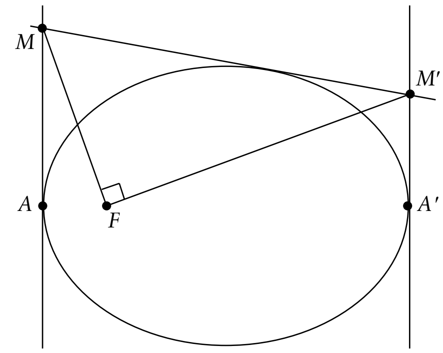
Kanıt: Sabir teğetler elipsi T ve T' noktalarında kessinler. Sabir teğetleri sırasıyla M ve M' noktalarında kesen bir teğet alalım. Bu teğetin elipse



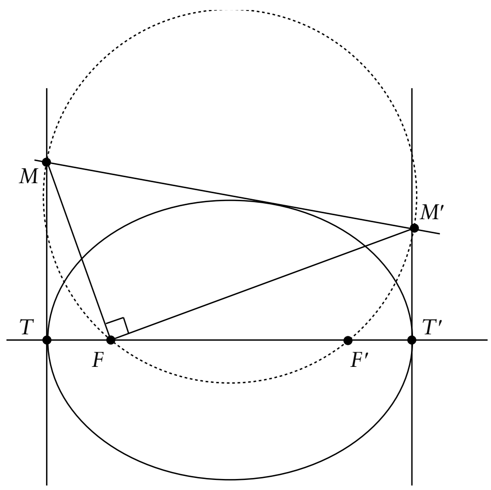
değim noktası T'' olsun. Poncelet Teoremi'ne göre (ya da eğer teğetler paralelse Sonuç 8'e göre),

$m(TFM) = m(MFT'')$ ve $m(T''FM') = m(M'FT')$.
Dolayısıyla $m(MFM') = m(TFT')/2$. □

Yukardaki iki sabit teğeti birbirine paralel ve değim noktaları asal eksenin A ve A' uçları olacak biçimde alırsak ne olur? O zaman, bir sonraki şekilde de gösterildiği gibi, $m(MFM') = m(TFT')/2 = 180°/2 = 90°$ elde ederiz. Demek ki MFM' bir diküçgen ve dolayısıyla M, M' ve F noktaları MM' çaplı çember üstündeler. F odak noktası için doğru olan diğer odak noktası için de doğrudur elbette: F' odak noktası da MM' çaplı çember üstündedir. Böylece bir sonraki sonucu kanıtlamış olduk.

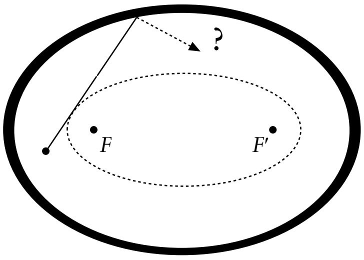


Sonuç 10. *Çapı, elipsin bir teğetinin asal ekseninin uçlarındaki teğetleri arasında kalan parça olan çember elipsin odaklarından geçer.*

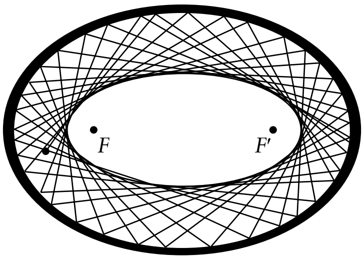


Son olarak çok esaslı bir sonuç kanıtlayalım.

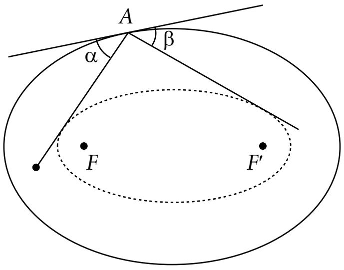
Eliptik bir bilardo masası alalım. Bu bilardo masasının içine bilardo masasıyla aynı odak noktalarına sahip bir elips çizelim. Şimdi topu küçük elipse teğet bir yörüngede gidecek şekilde (bir sonraki sayfadaki şekildeki gibi) fırlatalım. Top masanın bantına çarptıktan sonra hangi yörüngeyi izler?



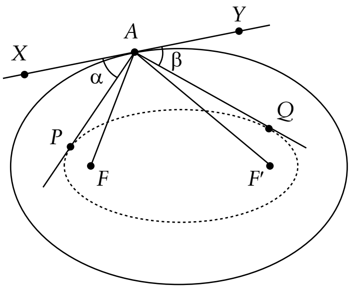
El cevap: Top banta çarptıktan sonra gene aynı elipse teğet olarak yoluna devam eder. Ve bu böyle sonsuza kadar sürer. Bu olguyu kanıtlayalım:



Sonuç 11. *Aynı odak noktaları olan iki elips alalım. Asal uzunluğu daha küçük olana küçük, diğerine büyük elips diyelim. Küçük elipsin bir teğeti büyük elipsi A noktasında kessin. A noktasından küçük elipse diğer teğeti çekelim. O zaman aşağıdaki şekildeki* α *ve* β *açıları birbirine eşittir.*



Kanıt: Aşağıdaki şekilden takip edelim. Poncelet Teoremi'ni AP ve AQ teğetlerine ve elipslerin optik özelliğini (Teorem 3) FA ve $F'A$ ışınlarına



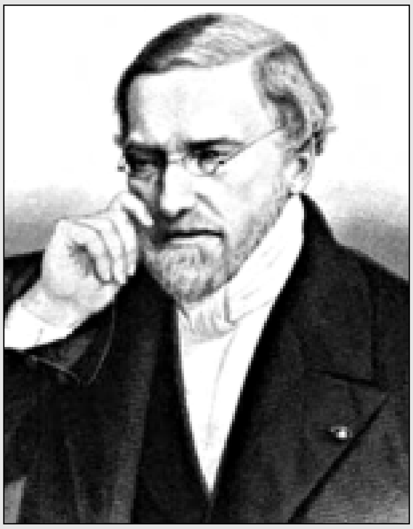
uygulayalım. Poncelet Teoremi'nden dolayı $m(PAF) = m(F'AQ)$. Elipslerin optik özelliğinden dolayı $m(XAF) = m(F'AY)$. İki eşitliğin arasındaki farkı alırsak $\alpha = \beta$ buluruz. □

Eğer Sonuç 11'de küçük elipsi, F ve F' odaklı elipsin dejenere bir durumu olan FF' doğru parçası olarak alırsak ($a = c$ ya da $b = 0$ durumu), o zaman "elipsin optik özelliği"ni yani Teorem 3'ü buluruz. Yani Sonuç 11, Teorem 3'ün genelleştirilmiş bir halidir.

Dolayısıyla bir elipsin içindeki bir top, elipsin odak noktaları arasından geçmeyecek şekilde atılırsa, topun yörüngesi aynı odak noktalara sahip bir başka elipsin teğetlerinden oluşur.

Sonuçlarımızın hepsi ve çok daha fazlası A. Nazmi İlker ve Nâzım Terzioğlu'nun Lise Fen Kolları için yazdıkları 1960 basımlı (üçüncü basım) **Konikler** adlı çok güzel kitapta vardır. Demek o zamanlar liselerde böyle konular da okutuluyormuş ve ülkenin en iyi matematikçileri liselilere hitap eden kitaplar yazıyorlarmış. Ortaya çıkan ürün hemen kendini farkettiriyor. Bu kitabın bir an önce dizgi hatalarından arındırılıp günümüz Türkçesine uyarlanarak piyasaya sunulması gerekir diye düşünüyoruz. ♥

Jean-Victor Poncelet
(1788-1867)



Fransız matematikçi, mekanikçi ve mühendis. Napoleon'un ordusuyla Rusya seferindeyken öldü sanılarak geride bırakılmış, Rusya'ya esir düşmüş ve 1813-1814 yıllarını esaret altında geçirmiştir. Ama bu da kendisine buluşlarını yazma zamanı vermiştir. Eğrilerin Projektif Özellikleri adlı yapıtını yazarak, Joseph Gergonne'dan bağımsız olarak keşfettiği projektif geometri dalını tanıtmıştır.