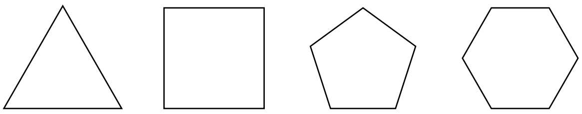
# Geometri Köşesi

Mustafa Yağcı
*yagcimustafa@yahoo.com*

## Düzgün $n$-gen Çizmek

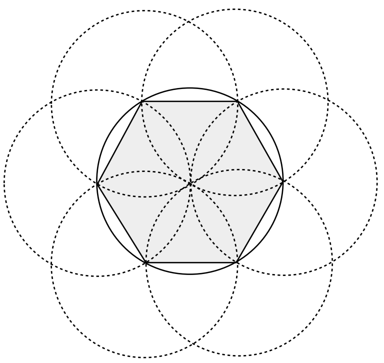
**I. Giriş.** Eşkenar üçgen ve kare düzgün $n$-genlerdir. Düzgün beşgen, altıgen, yedigen ve genel olarak düzgün $n$-genler de vardır. Bunlar, her kenarı aynı uzunlukta olan ve köşe açıları birbirine eşit olan $n$-genlerdir.



Düzgün 3-gen  Düzgün 4-gen  Düzgün 5-gen  Düzgün 6-gen

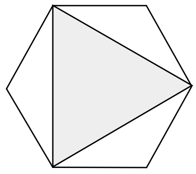
Öklid, bundan ta 2300 yıl önce düzgün bir $n$-geni $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$ ve $n = 15$ için çizmeyi biliyordu. Yani cetvel ve pergelle çizmeyi biliyordu demek istiyoruz. Cetvel de çentiksiz (yani santimetresiz, işaretsiz) olmalıydı. Yoksa çentikli cetvelle çizmek kolay.

Eline pergeli geçiren ve canı sıkılan hemen hemen herkesin yaptığı ilk şey düzgün altıgen çizmektir: Önce kâğıdın ortasına bir çember çizilir (ana çember), sonra merkezi ana çemberin üstünde olan aynı yarıçaplı bir çember daha çizilir, sonra

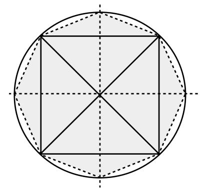


bu çemberle ana çemberin kesiştiği iki noktadan biri merkez alınarak bir çember daha çizilir ve böylece devam edilerek ana çemberin etrafına toplam 6 çember çizilir; altıncı çemberin birinci çemberin merkezinden geçmesi dudaklarda belli belirsiz bir tebessümün yayılmasına neden olabilir. Bu altı çemberin ana çemberi kestiği noktalar düzgün bir altıgenin köşeleridir...

Düzgün altıgen çizdikten sonra düzgün 3-gen (yani eşkenar üçgen) de çeşitli biçimlerde çizilebilir, örneğin sağ üst köşedeki gibi.



Öklid, eğer bir düzgün $n$-gen çizebilirse, açıların açıortaylarını alarak düzgün $2n$-gen çizebileceğini de biliyordu. Sözgelimi, bir kareden hareketle düzgün bir sekizgen çizilebilir (bkz. yandaki şekil.) Ya da bir düzgün altıgenden hareketle düzgün 12-gen, 24-gen vb çizilebilir.



Düzgün 3-gen ve 6-gen çizmeyi gördük. Düzgün dörtgen, yani kare çizmek de kolaydır.

Matematik camiası, Öklid'den sonraki 2000 yıl boyunca sadece

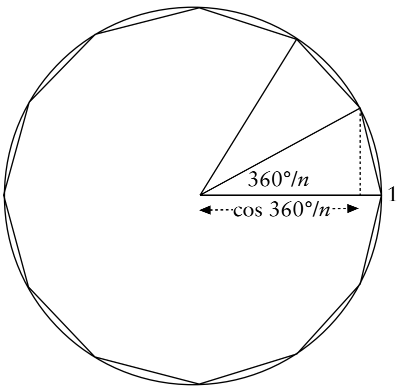
$$n = 2^k,\ 2^k \times 3,\ 2^k \times 5,\ 2^k \times 3 \times 5$$

için düzgün $n$-genlerin çizilebileceğini ve diğerlerinin mümkün olmadığını sandı. Mümkünse bile çizen çıkmamıştı. Ta ki, Carl Friedrich Gauss 1796'da, daha henüz 19 yaşındayken, düzgün bir 17-geni sadece cetvel ve pergel kullanarak çizmeyi başarana dek! Gauss bu buluşundan o kadar memnundu ki, mezarına düzgün bir 17-gen çizilmesini vasiyet etmiştir.

Carl Friedrich Gauss

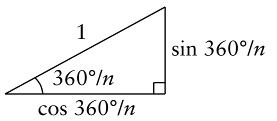
Bu yazımızda Gauss'un bulduğu bu yöntemi, günümüz modern cebirinin diline çevirerek sunacağız ve düzgün 5-gen ve 17-gen çizeceğiz, daha doğrusu bunların çizilebileceğini göstereceğiz.

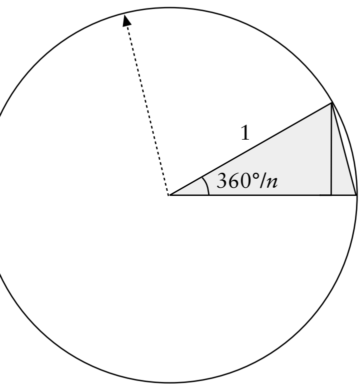
**II. Düzgün $n$-gen Çizmek.** Düzgün $n$-genin merkezini köşeleriyle birleştiren doğrular birbirleriyle $360°/n$'lik açılar yaparlar. Dolayısıyla, düzgün $n$-genin yarıçapını birim uzaklık olarak kabul edersek, o zaman bir çapın komşu çapın üstüne olan izdüşümü bir sonraki sayfadaki şekilde gösterildiği gibi $\cos 360°/n$'dir. Demek ki, düzgün bir $n$-geni pergel ve cetvelle çizebilirsek, o zaman $\cos 360°/n$




uzunluğunu da pergel ve cetvelle elde edebiliriz.

Bunun tersi de doğrudur: Eğer birim uzunluktan hareketle pergel ve cetvelle cos $360°/n$ uzunluğunu çizebilirsek, o zaman hipotenüsü 1 ve diğer kenarlarından biri cos $360°/n$ olan dik üçgeni pergel ve cetvelle inşa edebiliriz. Şimdi aşağıdaki şekildeki çemberi çizerek, düzgün $n$-genin önemli bir parçasını (gri üçgen) inşa etmiş oluruz. Gri



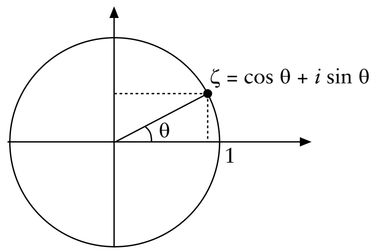




üçgeni çember çevresince tekrarlarsak, $n$ adımda pergel ve cetvelle düzgün $n$-geni elde etmiş oluruz.

Demek ki düzgün $n$-geni çizebilmek için tek sorun, birim uzunluktan hareketle cos $360°/n$ (ya da sin $360°/n$) uzunluğunu elde etmektir. Bunu yaptığımızda düzgün $n$-geni de pergel ve cetvelle çizebiliriz. Böylece, geometrik bir problem, biraz daha cebirsel tadı olan bir problem haline geldi.

**III. Düzgün 5-gen Çizmek.** Bir önceki paragraftaki düşünceyi $n = 5$'e uygulayalım. $360/5 = 72$ olduğundan, cos 72°'yi bulup pergel ve cetvelle bu uzunlukta bir doğru parçası çizmeliyiz. Bunun için karmaşık sayılardan yararlanacağız.

Sayfa 64-73'teki Karmaşık Sayılar yazısında, reel kartezyen düzlemin noktalarının nasıl karmaşık sayılarla ifade edileceğini gördük. Bunun için, bildiğimiz $(a, b)$ noktası yerine $z = a + bi$ karmaşık sayısı yazmak yeterli. Böylece, birim çember üzerindeki bir $\zeta$ noktası, pozitif reel eksenle pozitif yönde θ°'lik açı yapıyorsa,




$$\zeta = \cos\theta + i \sin\theta$$

yazarız. Bunun yanısıra De Moivre Formülü'nden (bkz. sayfa 73), her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\zeta^n = (\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

eşitliğini de biliyoruz. Dolayısıyla, örneğin,

$$\zeta^5 = \cos 5\theta + i \sin 5\theta$$

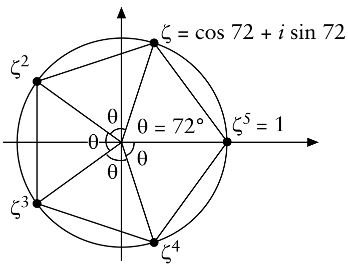
olur. Eğer burada $\theta = 360^o/5 = 72^o$ alırsak, o zaman $5\theta = 360^o$ olur ve $\zeta^5 = \cos 5\theta + i \sin 5\theta = \cos 360° + i \sin 360° = 1$ eşitliğini elde ederiz. Demek ki $\zeta^5 = 1$ ve $\zeta$ karmaşık sayısı

$$x^5 = 1$$

denkleminin bir köküdür. Bundan, $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$ sayılarının da $x^5 = 1$ denkleminin kökü olduğu çıkar, örneğin, $(\zeta^2)^5 = (\zeta^5)^2 = 1^2 = 1$.

> Beşinci dereceden olduğundan, $x^5 = 1$ denkleminin $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$ sayılarından başka da kökü olamaz ($n$-inci dereceden bir polinomun bir bölüm halkasında en fazla $n$ tane kökü olabilir. (MD-2004-II, sayfa 29, Sonuç 4.)

Görüldüğü üzere, $x^5 = 1$ denkleminin kökleri çevrel çemberi birim çember olan bir düzgün beşgenin köşeleri olacaktır. Demek ki $\zeta$ karmaşık sayısını (ya da cos 72°'yi) pergel ve cetvelle çizebilirsek, Öklid gibi biz de düzgün 5-gen çizebileceğiz.




$\zeta$ karmaşık sayısı $x^5 = 1$ denkleminin bir köküdür ama aynı $\zeta$ aynı zamanda dördüncü dereceden gerçel bir polinomun da köküdür:

$$0 = \zeta^5 - 1 = (\zeta - 1)(\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1);$$

ama $\zeta \neq 1$; dolayısıyla,

$$\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0. \quad (1)$$

Demek ki, $\zeta$, sadece $x^5 - 1 = 0$ polinomunun değil, ayrıca $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ polinomunun da bir köküdür. Bunu aklımızda tutalım, bir iki paragraf sonra kullanacağız.

Bir önceki sayfadaki son şekilden $\zeta + \zeta^4$ sayısının gerçel bir sayı olduğu anlaşılıyor, çünkü $\zeta$ ve $\zeta^4$ sayıları $x$ eksenine göre simetrikler ve karmaşık kısımları birbirini götürürler. Şekle güvenmeyip bunu cebirsel olarak kanıtlayabiliriz ($\theta = 72°$ ve $4\theta = 5\theta - \theta = 360° - \theta$ eşitliklerini anımsayın):

$$\begin{aligned}\zeta^4 &= \cos 4\theta + i \sin 4\theta \\ &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta.\end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$\zeta + \zeta^4 = 2\cos\theta = 2\cos 72°.$$

Aynı eşitliği aşağıdaki gri alanda da biraz daha bilgiç sayılabilecek bir biçimde kanıtladık.

Demek ki, $\zeta + \zeta^4$ sayısını hesaplayabilirsek, o zaman 2cos 72°'yi, dolayısıyla cos 72° de hesaplamış olacağız. (Hesapladıktan sonra da eğer mümkünse inşa etmek gerekecek.) Şimdi amacımız $\zeta + \zeta^4$ sayısını hesaplamak. Bu sayıya $a$ diyelim:

$$a = \zeta + \zeta^4.$$

Şimdi $a$'nın karesini hesaplayalım:

$$a^2 = (\zeta + \zeta^4)^2 = \zeta^2 + 2\zeta^5 + \zeta^8 = \zeta^2 + 2 + \zeta^3,$$

çünkü $\zeta^5 = 1$. Demek ki,

$$\begin{aligned}a^2 + a &= \zeta + \zeta^4 + \zeta^2 + 2 + \zeta^3 \\ &= (1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4) + 1 = 1\end{aligned}$$

Sayfa 68'deki gri karede, eğer bir $\alpha$ karmaşık sayısı bir gerçel polinomun köküyse, eşleniği olan $\overline{\alpha}$ karmaşık sayısının da aynı polinomun kökü olduğunu görmüştük. Demek ki $x^5 = 1$ denkleminin kökleri olan $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$ karmaşık sayılarının eşlenikleri gene kendi aralarındadır. 1'in eşleniği elbette gene 1. Ama $\zeta$'nın eşleniği geri kalanlardan hangisi?

Bir karmaşık sayıyla eşleniğinin $x$ eksenine göre simetrik olduklarını görmüştük. (Yani biri $a + bi$ ise diğeri $a - bi$'dir. Bkz. sayfa 67.) Dolayısıyla bir önceki sayfadaki şekilden,

$$\overline{\zeta} = \zeta^4$$

bulunur. Bunun gibi,

$$\overline{\zeta^2} = \zeta^3.$$

$\overline{\zeta}$ sayısını bir de şekilden bağımsız bulalım: $\zeta\overline{\zeta} = N(\zeta) = 1$; demek ki $\overline{\zeta} = \zeta^{-1} = \zeta^4$. Birim çember üzerindeki bir karmaşık sayının eşleniğinin o karmaşık sayının tersi olduğunu kanıtladık. (Bkz. sayfa 70, Alıştırma 2.)

Dolayısıyla $\zeta + \zeta^4$ ve $\zeta^2 + \zeta^3$ sayıları gerçel sayılar olmalı. (Bir karmaşık sayıyla eşleniğinin toplamı her zaman bir gerçel sayıdır.)

(son eşitlikte (1)'i kullandık) ve

$$a^2 + a - 1 = 0.$$

Buradan $a$'yı bulabiliriz, ikinci dereceden bir denklemi çözmek zor değildir:

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ama $a = \zeta + \zeta^4 = 2\cos 72° > 0$. Böylece $a$'yı, yani 2cos 72°'yi hesaplamış olduk:

$$\cos 72° = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

**Soru:** Yukarda bulduğumuz cos 72° sonucunu sadece ve sadece düzlem geometrisi kullanarak bulabilir misiniz?

Şimdi bu sayıyı (daha doğrusu bu sayıyla ifade edilen uzunluğu) cetvel ve pergelle çizmek kalıyor. $\sqrt{5}$ uzunluğunu çizebilmek yeterli. $\sqrt{5}$, dik açının kenarlarının 1 ve 2 olduğu dik üçgenin hipotenüsüdür, dolayısıyla cetvel ve pergelle çizilir.

**IV. Düzgün 17-gen.** Şimdi dikkatimizi düzgün 17-gene çevirelim. Düzgün beşgende kullandığımız yöntemin çok benzerini kullanacağız.

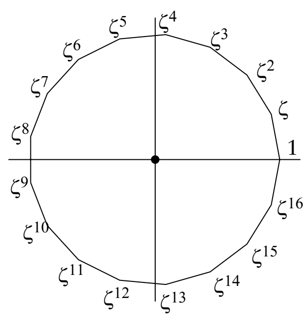
$$\zeta = \cos(360°/17) + i\sin(360°/17)$$

olsun. Bir önceki bölümde olduğu gibi $\zeta$'yı köklerle ifade edeceğiz. $\zeta$'yı bulduktan sonra da $\zeta$'nın çizilebilirliğini tartışacağız.

Elbette $\zeta^{17} = 1$ ve $\zeta$ birim çember üstündedir. Daha önce olduğu gibi (bkz. (1) formülünün kanıtı)

$$\zeta^{16} + \zeta^{15} + \ldots + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0$$

eşitliği geçerlidir. 16'ncı dereceden bir denklemi çözmek kolay olmadığından mümkünse denklemin derecesini azaltmalıyız. Ama polinomun katsayılarının Q'de ya da Z'de olmasında ısrar edersek bu mümkün değildir (bkz. yan sayfanın sonundaki gri alan, aynı kanıt burada da geçerlidir. O kanıtta sadece 5'in asallığı kullanılıyor, aynı kanıt 5 yerine 17'ye de uyarlanabilir.) Ancak denklemin katsayılarını tamsayılar dışından almaya razı olarak denklemin derecesini küçültebiliriz.




Zaten pergel ve cetvelle çizimde çemberlerin ve doğruların kesişimleri alındığından, çizimin her adımında ancak ikinci dereceden denklemler çözebiliriz. Biz de öyle yapacağız. Yukardaki 16'ncı dereceden denklemi ikinci dereceden denklemler çöze çöze yavaş yavaş çözeceğiz.

Birim çember üzerinde olduklarından, her $\zeta^n$ sayısının eşleniği o sayının tersidir, yani $\overline{\zeta}^n = \zeta^{-n} = \zeta^{17-n}$. Bundan böyle, $\overline{\zeta}^n$ yerine $\zeta^{-n}$ yazalım. Yukardaki formülden, $\zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta^5 + \zeta^6 + \zeta^7 + \zeta^8 + \zeta^{-8} + \zeta^{-7} + \zeta^{-6} + \zeta^{-5} + \zeta^{-4} + \zeta^{-3} + \zeta^{-2} + \zeta^{-1} = -1$ çıkar. Bu eşitliği bir kenara not edelim.

$a = \zeta + \zeta^{-1}$

$b = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^{-3} + \zeta^{-5}$

$c = \zeta + \zeta^4 + \zeta^{-1} + \zeta^{-4}$

$d = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^8 + \zeta^{-1} + \zeta^{-2} + \zeta^{-4} + \zeta^{-8}$

olsun. Sırayla $d$'yi, $c$'yi, $b$'yi ve $a$'yı bulacağız. Her seferinde ikinci dereceden denklem çözdüğümüze okur dikkat etmelidir (başka şansımız yok!) Bu sayıların gerçel sayı olduklarına da ayrıca dikkatinizi çekerim, sonuçta her birinde bazı karmaşık sayıları ve bunların eşleniklerini topluyoruz. Ayrıca $b$ dışında bunların her biri pozitif bir gerçel sayıdır, çünkü toplanan sayıların her biri $y$ ekseninin sağında yer almaktadır, yani gerçel kısımları pozitiftir.

Önce $d$'yi bulalım.

$$d' = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6 + \zeta^7 + \zeta^{-3} + \zeta^{-5} + \zeta^{-6} + \zeta^{-7}$$

olsun. Hemen $d + d' = -1$ eşitliğini buluruz. $dd'$ çarpımını da bulabilirsek, $d$'yi bulabiliriz. Üşenmeden $d$ ile $d'$ sayılarını çarpalım. Sonuç $-4$ çıkar. Köklerinin toplamı ve çarpımı bilinen ikinci dereceden denklemleri yazmasını biliyoruz. O halde

$$d^2 + d - 4 = 0$$

olmalı. Bu denklemi çözersek

$$d = (-1 \pm \sqrt{17})/2$$

buluruz. Ama $d > 0$. Demek ki

$$d = (-1 + \sqrt{17})/2.$$

Aynı şekilde,

$$d' = (-1 - \sqrt{17})/2.$$

$d$ ve $d'$ sayılarının mutlak değerlerinin pergel ve cetvelle çizilebilir uzunluklar olduklarına dikkatinizi çekerim. Bu önemli. Her adımda çizilebilir sayılar bulacağız.

Şimdi sıra $c$'yi bulmaya geldi.

$$c' = \zeta^2 + \zeta^8 + \zeta^{-2} + \zeta^{-8}$$

olsun. Demek ki $c + c' = d$ ve $d$'yi biliyoruz. Eğer $cc'$ çarpımını da bulabilirsek, $c$'yi bulmuş olacağız. $cc' = -1$ çıkıyor. O halde

$$c^2 - dc - 1 = 0$$

ve bunu ikinci dereceden bir denklem olarak addederek ve $c > 0$ eşitsizliğini kullanarak,

$$c = \frac{d + \sqrt{d^2 + 4}}{2}$$

buluruz. $d$ pergel ve cetvelle inşa edilebilir olduğundan, $c$ de pergel ve cetvelle inşa edilebilir.

Sıra $b$'ye geldi.

$$b' = \zeta^6 + \zeta^7 + \zeta^{-6} + \zeta^{-7}$$

olsun. $b + b' = c'$ eşitliği kolay. $bb' = -1$ eşitliği de hesap yapınca çıkıyor. O halde $b$,

$$x^2 - c'x - 1 = 0$$

denklemin köklerinden biridir. Böylece, $c'$ (cetvel ve pergelle) inşa edilebilir olduğundan, aynen yukardaki gibi, $b$'nin mutlak değerinin de inşa edilebilir bir uzunluk olduğu anlaşılır.

Son olarak $a$'yı bulacağız.

$$a' = \zeta^4 + \zeta^{-4}$$

olsun. Demek ki $a + a' = c$ ve $c$, inşa edildiğini bildiğimiz bir sayı. Kolay bir hesapla,

$$aa' = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^{-3} + \zeta^{-5} = b$$

buluruz ve $b$ de inşa edilebilir. Demek ki $a$,

$$x^2 - bx + c = 0$$

denkleminin pozitif köküdür. Buradan da anlaşılıyor ki, $a$, inşası mümkün bir sayıdır, bundan dolayı düzgün 17–gen de çizilebilir. ♥

$\zeta$, elbette derecesi 2 olan

$$(x-\zeta)(x-\zeta^4) = x^2 - (\zeta+\zeta^4)x + \zeta^5$$
$$= x^2 - 2x\cos 72^\circ + 1 = x^2 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}x + 1$$

**gerçel** polinomunun köküdür. Ama $\zeta$'yı sıfırlayan her $f \in \mathbb{Q}[x]$, $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ polinomunun çarpımıdır. Bunu kanıtlayalım. Önce $p(x)$'in indirgenemez olduğunu gösterelim. $p(x) = (x^5 - 1)/(x - 1)$ olduğundan, $y = x - 1$ yazarak, $p(y) = ((y+1)^5 - 1)/y = y^4 + 5y^3 + 10y^2 + 10y + 5$ buluruz. Eisenstein kriterine göre (MD-2004-II, sayfa 42 ve 50), $p(y)$ polinomu $\mathbb{Q}$ üzerine indirgenemezdir. Dolayısıyla $p(x)$ de $\mathbb{Q}$ üzerine indirgenemezdir (neden?) Eğer $f$, $p$'nin bir çarpımı değilse, o zaman $fg + ph = 1$ eşitliğini sağlayan $g, h \in \mathbb{Q}[x]$ vardır (Bezout, MD-2004-II, sayfa 42.) Bu eşitliği $\zeta$'ya uygularsak $0 = 1$ çelişkisine varırız.

**Kaynakça**

Robin Hartshorne, **Companion to Euclid**, AMS, Berkeley Center for Pure and Applied Mathematics, 1997.