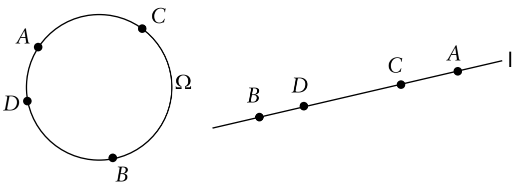
Hilbert Mesafesi

Cahit Arf Matematik Günleri IV - 2005

İkinci Gün Soruları, 16 Nisan 2005

Andrei Ratiu* / *ratiu@bilgi.edu.tr*

R^2 *Öklid düzleminde aynı* l *doğrusu veya aynı* Ω *çemberi üzerindeki olan dört farklı* A, B, C, D *noktası alalım.*



A, B, C, D noktalarının ***çapraz oranı****,*

$$(A,B,C,D)=\frac{d(A,C)}{d(A,D)}:\frac{d(B,C)}{d(B,D)}$$

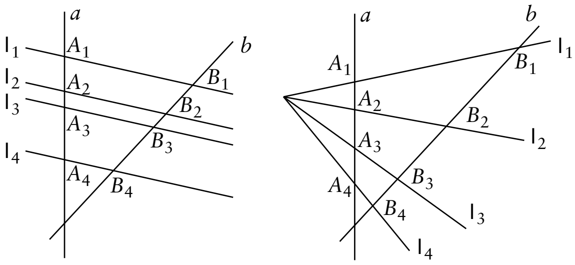
olarak tanımlanır. Bu tanımda $d(P, Q)$, P ile Q noktaları arasındaki Öklid uzaklığını simgelemektedir, yani $P = (a, b)$ ve $Q = (c, d)$ ise,

$$d(P,Q)=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}.$$

1. $(A, B, C, D) = (C, D, A, B) = (B, A, C, D)^{-1} = (A, B, D, C)^{-1}$ *eşitliklerini kanıtlayın.*

Yanıt: Bu çok kolay, her P ve Q noktası için $d(P, Q) = d(Q, P)$ eşitliğinden kaynaklanır.

2. l_1, l_2, l_3, l_4 *doğruları a doğrusunu* A_1, A_2, A_3, A_4 *noktalarında ve b doğrusunu* B_1, B_2, B_3, B_4 *noktalarında kessinler.*



2a) l_1, l_2, l_3, l_4 *doğruları paralelse*

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = (B_1, B_2, B_3, B_4)$$

eşitliğini gösterin.

Çözüm: Bu durumda, benzer üçgenlerden dolayı,

$$\frac{B_1B_3}{A_1A_3}=\frac{B_1B_4}{A_1A_4}=\frac{B_2B_3}{A_2A_3}=\frac{B_2B_4}{A_2A_4}$$

eşitlikleri vardır; Bundan da $(A_1, A_2, A_3, A_4) = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ eşitliği çıkar.

2b) l_1, l_2, l_3, l_4 *doğruları tek bir noktada kesişiyorlarsa* $(A_1, A_2, A_3, A_4) = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ *eşitliğini gösterin.*

Çözüm: A_i noktasının l_j doğrusuna uzaklığını $d(A_i, l_j)$ ile gösterelim. Bu durumda benzerlikten

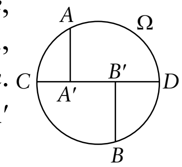
$$\frac{A_1A_3}{A_2A_3}=\frac{d(A_1,l_3)}{d(A_2,l_3)} \text{ ve } \frac{A_1A_4}{A_2A_4}=\frac{d(A_1,l_4)}{d(A_2,l_4)}$$

eşitlikleri çıkar. l_i ve l_j doğruları arasındaki açıyı λ_{ij} ile gösterirsek, yukardaki eşitliklerden,

$$(A_1,A_2,A_3,A_4)=\frac{d(A_1,l_3)}{d(A_2,l_3)}:\frac{d(A_1,l_4)}{d(A_2,l_4)}$$
$$=\frac{\sin\lambda_{13}}{\sin\lambda_{23}}:\frac{\sin\lambda_{14}}{\sin\lambda_{24}}.$$

çıkar. Aynı eşitlik (B_1, B_2, B_3, B_4) için de geçerli olduğundan, $(A_1, A_2, A_3, A_4) = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ eşitliği doğrudur.

3. *Bir Ω çemberi üzerinde, CD bir çap oluşturmak üzere, A, B, C ve D noktaları alınmış olsun. A'nın CD üzerindeki izdüşümü A' ve B'ninki ise B' olsun.*



$$(A, B, C, D)^2 = (A', B', C, D)$$

eşitliğini gösterin.

Çözüm: CD bir çap oluşturduğu için şu eşitlikleri biliyoruz:

$$AC^2 = A'C \cdot DC$$
$$AD^2 = A'D \cdot DC$$
$$BC^2 = B'C \cdot DC$$
$$BD^2 = B'D \cdot DC$$

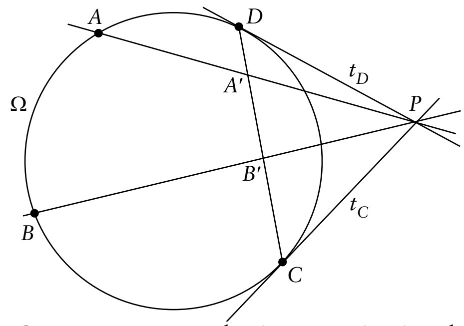
Buradan kolaylıkla $(A, B, C, D)^2 = (A', B', C, D)$ sonucunu çıkarabiliriz.

4. *Bir Ω çemberi üzerinde A, B, C, D noktaları alınmış olsun. t_C ve t_D doğruları (bu sırayla) C ve D noktalarından geçen iki teğet olsun. (Bir sonraki sayfadaki şekle bakın.) Bu teğetler P noktasında kesişssinler. A', AP ve CD doğrularının, B' ise BP ve CD doğru parçalarının kesişim noktaları olsun.*

$$(A, B, C, D)^2 = (A', B', C, D)$$

eşitliğini gösterin.

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü.



Çözüm: Eğer çemberin çevresi r ise, kolayca, $AC = 2r\sin(ACP)$ bulunur. Dolayısıyla,

$$AC^2 \cdot CP = AC \cdot CP \cdot 2r\sin(ACP)$$
$$= 4r\text{Alan}(ACP)$$
$$= AP \cdot CP \cdot 2r\sin(APC).$$

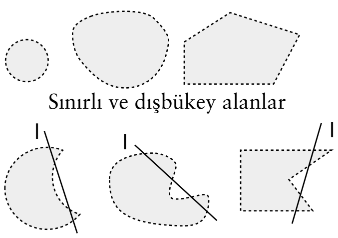
Benzer biçimde,

$$AD^2 \cdot DP = AP \cdot DP \cdot 2r\sin(APD)$$
$$BC^2 \cdot CP = BP \cdot CP \cdot 2r\sin(BPC)$$
$$BD^2 \cdot DP = BP \cdot DP \cdot 2r\sin(BPD)$$

eşitlikleri geçerlidir. Bu eşitlikleri göz önünde bulundurarak hesaplayalım:

$$(A,B,C,D)^2 = \frac{AC^2}{AD^2} : \frac{BC^2}{BD^2} = \frac{AC^2 \cdot CP}{AD^2 \cdot DP} : \frac{BC^2 \cdot CP}{BD^2 \cdot DP}$$
$$= \frac{AP \cdot CP \cdot \sin(APC)}{AP \cdot DP \cdot \sin(APD)} : \frac{BP \cdot CP \cdot \sin(BPC)}{BP \cdot DP \cdot \sin(BPD)}$$
$$= \frac{\sin(APC)}{\sin(APD)} : \frac{\sin(BPC)}{\sin(BPD)} = (A',B',C,D).$$

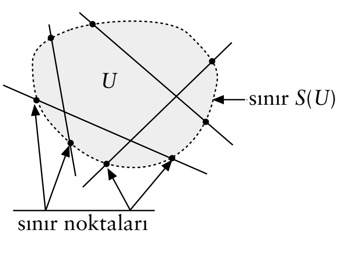
*$U \subseteq \mathbb{R}^2$ olsun. Eğer U sonlu yarıçaplı bir dairenin içindeyse U'ya **sınırlı** denir. Eğer her l doğrusu için, $l \cap U$ açık (yani sınır noktalarını içermeyen) bir doğru parçasıysa (**Not:** Boşküme de açık bir doğru parçasıdır) U'ya **dışbükey alan** denir.*



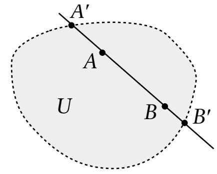
Sınırlı ve dışbükey alanlar

Sınırlı ama dışbükey olmayan alanlar

*Bundan böyle U, $\mathbb{R}^2$'nin sınırlı bir dışbükey alanını simgeleyecek. Her l doğrusu için $l \cap U$ doğru parçalarının sınır noktalarının kümesi $S(U)$ olsun. $S(U)$ kümesine U alanının **sınırı** adı verilir.*



A, $B \in U$ iki değişik nokta olsun. $S(U) \cap AB = \{A', B'\}$ olsun. (Burada AB, A ve B noktalarından geçen doğrudur.) Ayrıca bu noktaların şekilde görüldüğü gibi A', A, B, B' sırasıyla sıralandıklarını varsayalım. Şimdi $\rho_U(A, B)$ sayısını,



$$\rho_U(A, B) = \ln(A, B, B', A')$$

*olarak tanımlayalım. (**Not:** ln fonksiyonunun yani logaritmanın tanımını ve tüm özelliklerini bilmeniz gerekmiyor. Logaritma fonksiyonu hakkında bilmeniz gereken özellikler aşağıda özet olarak verilmiştir.) Ayrıca her $A \in U$ için $\rho_U(A, A) = 0$ olsun. Birazdan ρ_U fonksiyonunun U'nun iki noktası arasında bir çeşit mesafe ölçtüğünü kanıtlayacağız.*

Logaritma

- ln (ya da log) sadece pozitif sayılar için tanımlanmış bir fonksiyondur.
- $\ln 1 = 0$.
- Her pozitif x, y için, $\ln xy = \ln x + \ln y$.
- ln artan bir fonksiyondur, yani $0 < x < y$ için $\ln x < \ln y$ eşitsizliği geçerlidir.

5. *Aşağıdaki önermeleri kanıtlayın.*

5a. *Her A, $B \in U$ için $\rho_U(A, B) \geq 0$'dır.*

5b. *$\rho_U(A, B)$, ancak ve ancak $A = B$ olursa 0 olabilir.*

5c. *Her A, $B \in U$ için, $\rho_U(A, B) = \rho_U(B, A)$.*

5d. *Eğer B noktası A ve C noktalarının arasındaysa, $\rho_U(A, C) = \rho_U(A, B) + \rho_U(B, C)$.*

Çözüm: (a, b). Eğer A ve B, U'da iki farklı nokta ise $d(A, B') > d(B, B')$ ve $d(B, A') > d(A, A')$ dır. Dolayısıyla

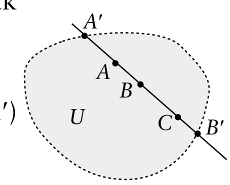
$$(A,B,B',A') = \frac{d(A,B)}{d(B,B')} : \frac{d(A,A')}{d(B,A')} > 1$$

ve $\rho_U(A, B) > 0$ olur. Ayrıca tanım gereği $\rho_U(A, A) = 0$.

c) Birinci sorudan dolayı,

$$\rho_U(A, B) = \ln(A, B, B', A')$$
$$= \ln(B, A, A', B') = \rho_U(B, A).$$

d) B noktasının A ve C noktaları arasında olduğunu göz önünde bulundurarak doğrudan hesaplayalım:



$$\rho_U(A, B) + \rho_U(B, C)$$
$$= \ln(A, B, B', A') + \ln(B, C, B', A')$$
$$= \ln((A, B, B', A') \cdot (B, C, B', A'))$$

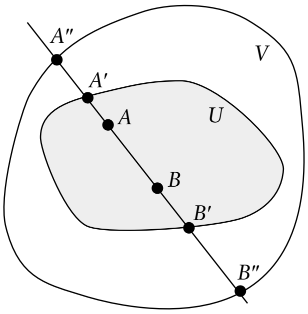
$$= \ln\left(\left(\frac{d(A,B')}{d(A,A')}:\frac{d(B,B')}{d(B,A')}\right)\cdot\left(\frac{d(B,B')}{d(B,A')}:\frac{d(C,B')}{d(C,A')}\right)\right)$$

$$= \ln\left(\frac{d(A,B')}{d(A,A')}:\frac{d(C,B')}{d(C,A')}\right) = \ln(A,C,B',A') = \rho_U(A,C).$$

6. *U ve V iki sınırlı dışbükey alan olsun. Eğer $U \subseteq V$ ise, her A, $B \in U$ için,*

$$\rho_V(A, B) \le \rho_U(A, B)$$

eşitsizliğini gösterin.



Çözüm: $AB \cap S(U) = \{A', B'\}$ ve $AB \cap S(V) = \{A'', B''\}$ yukardaki şekildeki gibi olsun. ln artan bir fonksiyon olduğundan, $(A, B, B', A') \ge (A, B, B'', A'')$ eşitsizliğini göstermemiz yeterli. Eğer

$$\delta_A = d(A', A'') \ge 0 \text{ ve } \delta_B = d(B', B'') \ge 0$$

ise,

$$(A,B,B'',A'') = \frac{d(A,B'')}{d(A,A'')}:\frac{d(B,B'')}{d(B,A'')} = \frac{d(A,B'')}{d(B,B'')}\,\frac{d(B,A'')}{d(A,A'')}$$

$$= \frac{d(A,B')+d(B',B'')}{d(B,B')+d(B',B'')}\,\frac{d(B,A')+d(A',A'')}{d(A,A')+d(A',A'')}$$

$$= \frac{d(A,B')+\delta_B}{d(B,B')+\delta_B}\,\frac{d(B,A')+\delta_A}{d(A,A')+\delta_A}$$

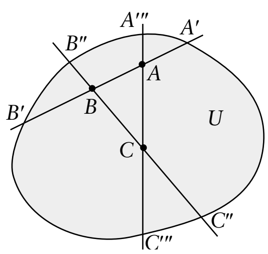
eşitlikleri ve $d(A, B') > d(B, B')$ ve $d(B, A') > d(A, A')$ eşitsizliklerinden dolayı, eğer $a \le b$ ve $\delta \ge 0$ ise,

$$\frac{a+\delta}{b+\delta} \le \frac{a}{b}$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterlidir. Ama bu son eşitsizliğin doğru olduğunu kanıtlamak çok kolay.

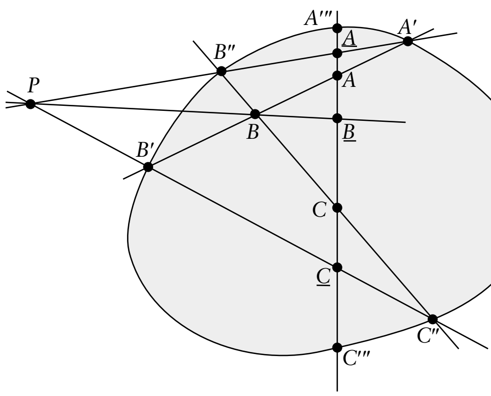
7. *U, sınırlı bir dışbükey alan ve A, B, $C \in U$ olsun. $\rho_U(A, C) \le \rho_U(A, B) + \rho_U(B, C)$ eşitsizliğini kanıtlayın.*

Kanıt: Önce sınır noktalarımızı belirleyelim:



$AB \cap S(U) = \{A', B'\}$,
$BC \cap S(U) = \{B'', C''\}$,
$AC \cap S(U) = \{A''', C'''\}$

yandaki şekildeki gibi olsun. $A'B''$ ve $B'C''$ doğruları arasında kalan U'nun



noktaları kümesine V diyelim. $A'B''$ ve $B'C''$ doğrularının kesişim noktasına P diyelim. PA', PB ve PC'' doğrularıyla AC doğrusunun kesişim noktalarına sırasıyla $\underline{A}$, $\underline{B}$ ve $\underline{C}$ diyelim. Bu durumda, 2b'den dolayı,

$$\rho_U(A, B) = \ln(A, B, B', A') = \ln(A, \underline{B}, \underline{C}, \underline{A})$$
$$= \rho_V(A, \underline{B})$$

ve

$$\rho_U(B, C) = \ln(B, C, C'', B'') = \ln(\underline{B}, C, \underline{C}, \underline{A})$$
$$= \rho_V(\underline{B}, C)$$

eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla, 5d ve 6'dan dolayı,

$$\rho_U(A, B) + \rho_U(B, C) = \rho_V(A, \underline{B}) + \rho_V(\underline{B}, C)$$
$$= \rho_V(A, C) \ge \rho_U(A, C).$$

Hilbert Mesafesi

X bir küme olsun. $d : X \times X \to \mathbb{R}$, şu özellikleri sağlayan bir fonksiyon olsun: Her x, y, $z \in X$ için,

a) $d(x, y) \ge 0$,
b) $d(x, y)$, ancak ve ancak $x = y$ ise 0'dır,
c) $d(x, y) = d(y, x)$,
d) $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$.

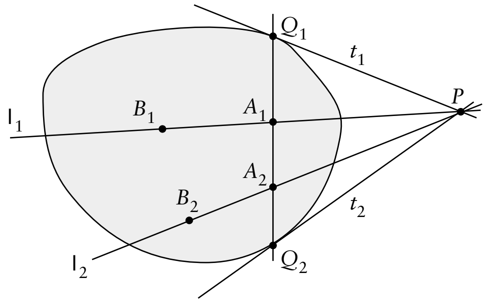
O zaman d'ye X üzerine ***mesafe*** adı verilir.

Eğer $U \subset \mathbb{R}^2$, sınırlı ve dışbükey bir alansa, yukardaki sorulardan, ρ_U fonksiyonun U üzerine bir mesafe olduğu çıkar. Bu mesafeye ***Hilbert mesafesi*** adı verilir.

8. [**İki Doğru Arasındaki Mesafe.**] *ℓ_1 ve ℓ_2, sınırlı bir dışbükey alan olan U'yla kesişen, paralel olmayan ama $U \cup S(U)$ kümesinde kesişmeyen iki doğru olsun. ℓ_1 ve ℓ_2 doğrularının kesişim noktasına P diyelim. t_1 ve t_2, P noktasından geçen ve $S(U)$ kümesini kesen ama U'yu kesmeyen iki farklı doğru olsun* (örneğin t_1 ve t_2 teğet olabilirler U'ya) *$Q_1 \in t_1 \cap S(U)$ ve $Q_2 \in t_2 \cap S(U)$ olsun. Q_1Q_2 doğrusu ℓ_1 ve ℓ_2 doğrularını sırasıyla A_1 ve A_2 nokta-*

larında kessin. Her $B_1 \in l_1 \cap U$ ve $B_2 \in l_2 \cap U$ için $\rho_U(A_1, A_2) \le \rho_U(B_1, B_2)$ eşitsizliğini kanıtlayın.

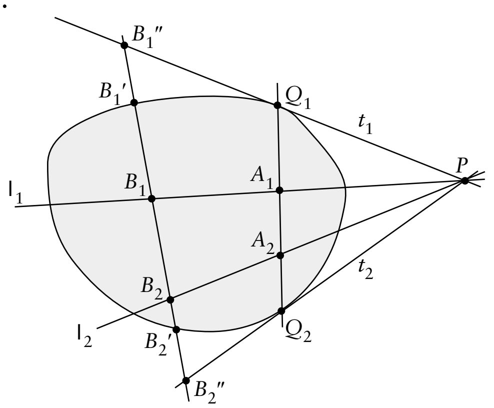
Kanıt: Aşağıdaki şekilden kanıtı izleyin. $B_1 \in l_1$ ve $B_2 \in l_2$, U'nun iki noktası olsun. Ayrıca B_1',



B_2', B_1'', B_2'' aşağıdaki şekildeki gibi olsun. V, t_1 ve t_2 doğruları tarafından sınırlanan ve U'yu ve B_1'', B_2'' noktalarını içeren herhangi bir sınırlı ve dışbükey alan olsun. 6 ve 2b'den dolayı

$\rho_U(B_1, B_2) \ge \rho_V(B_1, B_2) = \rho_V(A_1, A_2) = \rho_U(A_1, A_2)$

dir.



9. *U, l_1, l_2, A_1 ve A_2 yukardaki gibi olsun. $\rho_U(A_1, A_2)$ sayısına* l_1 ve l_2 *doğrularının* (ρ_U*'ya göre)* ***mesafesi*** *adı verilir.*

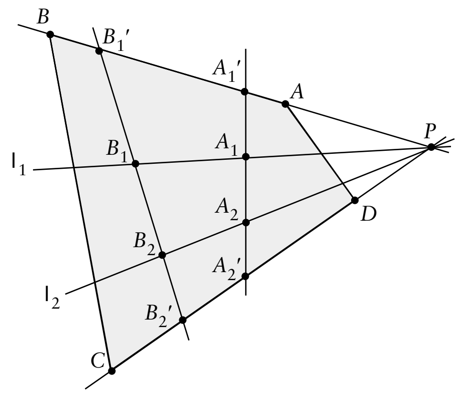
9a. *l_1 ve l_2 doğrularının A_1 ve A_2 noktalarından başka noktaları da aynı $\rho_U(A_1, A_2)$ mesafesini verebilirler. Böyle bir örnek verin.*

9b. *Eğer U bir daireyse, l_1 ve l_2'nin A_1 ve A_2 noktalarından başka noktalarının $\rho_U(A_1, A_2)$ mesafesini veremeyeceğini kanıtlayın, yani her $B_1 \in l_1$, $B_2 \in l_2$ için, eğer $B_1 \ne A_1$ ya da $B_2 \ne A_2$ ise*

$$\rho_U(A_1, A_2) < \rho_U(B_1, B_2)$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

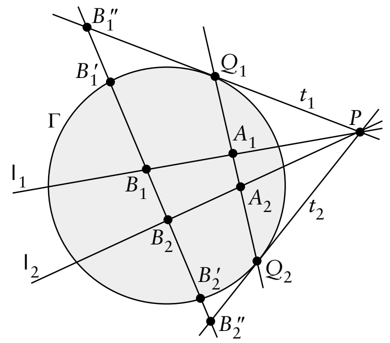
Çözüm. 9a. AB ve CD doğrularının P'de kesiştiği bir $ABCD$ dörtgeni alalım. U bu dörtgenin içi olsun. l_1 ve l_2, P'den geçen ve U'yu kesen iki doğru olsun. $A_1, B_1 \in l_1 \cap U$ ve $A_2, B_2 \in l_2 \cap U$ olsun. A_1A_2 ve B_1B_2 doğruları, AB ve CD doğrula-



rını yukardaki şekildeki gibi A_1', B_1', A_2', B_2' noktalarında kessin. 2b'ye göre,

$$\begin{aligned}\rho_U(A_1, A_2) &= \ln(A_1, A_2, A_2', A_1')\\ &= \ln(B_1, B_2, B_2', B_1') = \rho_U(B_1, B_2).\end{aligned}$$

9b. Γ, U dairesinin sınırı, yani çemberi olsun. P, $l_1 \cap l_2 \cap t_1 \cap t_2$ noktası olsun. B_1B_2 doğrusu t_1 ve t_2 teğetlerini B_1'' ve B_2'' noktalarında, Γ çemberini de B_1' ve B_2' noktalarında kessin.



Eğer $(B_1, B_2) \ne (A_1, A_2)$ ise o zaman ya $B_1' \ne B_1''$ ya da $B_2' \ne B_2''$. Çapraz oranın tanımından

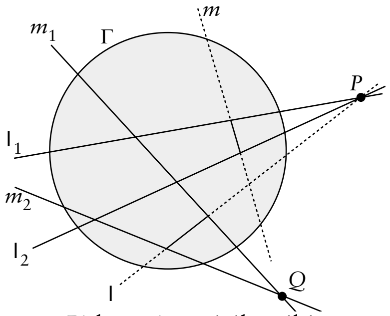
$$(B_1, B_2, B_2'', B_1'') < (B_1, B_2, B_2', B_1')$$

çıkar ve bundan ve 2b'den,

$$\begin{aligned}\rho_U(B_1, B_2) &= \ln(B_1, B_2, B_2', B_1')\\ &> \ln(B_1, B_2, B_2'', B_1'')\\ &= \ln(A_1, A_2, Q_2, Q_1) = \rho_U(A_1, A_2)\end{aligned}$$

çıkar.

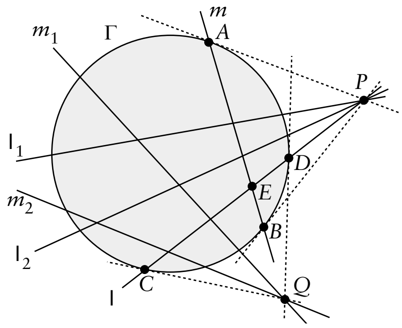
10. *Γ bir çember olsun. U, Γ çemberiyle sınırlanan dairenin içi olsun. P ve Q, Γ'nın dışında kalan alandan seçilmiş iki nokta olsun. l_1 ve l_2 doğruları P'den, m_1 ve m_2 doğruları da Q'den geçen ve U'dan noktalar içeren dört doğru olsun. l doğrusu m_1 ile m_2 arasındaki ρ_U mesafesini* (*bkz. problem* 8 *ve* 9*b*) *veren iki noktayı içeren doğru olsun. Aynı şekilde, m doğrusu l_1 ile l_2 arasındaki ρ_U mesafesini veren iki noktayı içeren doğru olsun. Eğer l doğrusu, P noktasından geçiyorsa, m doğrusunun Q noktasından geçmesi gerektiğini kanıtlayın.*



Çözüm: P'den Γ'ya çizilen iki teğet doğrusu, Γ'nın üstündeki A ve B noktalarından geçsin. Q'dan Γ'ya çizilen iki teğet doğrusu ise Γ'nın üstündeki C ve D noktalarından geçsin. Varsayımdan, 8'inci sorudan ve 9b'den dolayı CD doğrusunun l doğrusuna eşit olduğunu, yani P noktasından geçtiğini biliyoruz. AB ve CD doğrularının kesişim noktasına E diyelim. Bu durumda 1'inci ve 4'üncü soruyu kullanarak

$$(A, B, C, D)^2 = (C, D, A, B)^2 = (E, E, A, B) = 1$$

eşitliğini buluruz.



Şimdi QA ile CD'nin kesişim noktasına A' ve QB ile CD'nin kesişim noktasına ise B' diyelim. Bu durumda yine 4'üncü soruyu kullanarak

$$1 = (A, B, D, C)^2 = (A', B', D, C)$$

bulunur ki bu $A' = B'$ demektir. Bunun sonucu olarak Q noktasının AB üzerinde olması gerektiği ortaya çıkar.

11. *Yukarıdaki problemleri çözerken bulduğunuz farklı çapraz oran formüllerini listeleyiniz.*

Çözüm Önerisi. A_1, A_2, A_3, A_4 düzlemin bir doğrusunun dört noktası olsun. Bu doğru üstünde olmayan herhangi bir P noktası için, PA_1, PA_2, PA_3, PA_4 doğrularını ele alalım. 2b'yi çözerken, eğer $\lambda_{ij} = m(A_iPA_j)$ ise

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = \frac{d(A_1, PA_3)}{d(A_1, PA_4)} : \frac{d(A_2, PA_3)}{d(A_2, PA_4)}$$
$$= \frac{\sin\lambda_{13}}{\sin\lambda_{14}} : \frac{\sin\lambda_{23}}{\sin\lambda_{24}}.$$

eşitliklerini görmüştük. Ayrıca, kolayca görüleceği üzere,

$$\text{Alan}(A_iPA_j) = PA_i \cdot PA_j \cdot \sin \lambda_{ij}$$

olduğundan,

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = \frac{\text{Alan}(A_1PA_3)}{\text{Alan}(A_1PA_4)} : \frac{\text{Alan}(A_2PA_3)}{\text{Alan}(A_2PA_4)}.$$

♥

Cahit Arf Matematik Günleri 2005 Başarı Sıralaması

İLK 10

1	Mehmet Murat Sevim	İstanbul Atatürk Fen L.	85
2	Kerim Keskin	TEV İnanç Türkeş Ö. L./Gebze	74
3	Öykü Çobanoğlu	İzmir Ö. Fatih Fen L.	70
4	Halenur Kazaçeşme	Ö. Şehzade Mehmet L./Manisa	65
5	Türkü Çobanoğlu	İzmir Ö. Fatih Fen L.	61
6	Büşra Acar	İstanbul Atatürk Fen L.	60
7	Deniz Yörükoğlu	İstanbul Atatürk Fen L.	60
8	Ezgi Kantarcı	Robert Kolej	53
9	Yunus Şaşmaz	TEV İnanç Türkeş Ö. L./Gebze	52
10	Hasan Hüseyin Eruslu	Ö. Şehzade Mehmet L./Manisa	45
10	Şükrü Burç Eryılmaz	İzmir Ö. Fatih Fen L.	45
10	Onur Tidin	İzmir Ö. Fatih Fen L.	45

DİĞER BAŞARILI YARIŞMACILAR (Alfabetik Sırayla)

Ramazan Akdağ	İstanbul Atatürk Fen L.
Tansel Altınel	Ö. Sevgi Çiçeği Anafen Fen L.
Burak Arkan	Sakıp Sabancı Anadolu L.
Taylan Ayken	Ö. Üsküdar Amerikan L.
Fatih Balcı	Ö. Gökkuşağı L.
Emre Demirkaya	Galatasaray L.
Ali Efe	Ö. Sevgi Çiçeği Anafen Fen L.
Abdüsselam Genç	İstanbul Atatürk Fen L.
İlyas Gölcüklü	Ö. Kasımoğlu Fen L.
Burak Kürşad Günhan	Ö. Şehzade Mehmet L./Manisa
Hüseyin Atahan İnan	Ö. Gökkuşağı L.
Mahmut Kaya	Ö. Sevgi Çiçeği Anafen Fen L.
Gamze Kederoğlu	Ö. Sevgi Çiçeği Anafen Fen L.
Berk Can Kırçuval	Ö. Üsküdar Amerikan L.
Yunus Emre Memmi	Ö. Gökkuşağı L.
Mustafa Tahir Ocak	Ö. Sevgi Çiçeği Anafen Fen L.
Can Ozan Oğuz	Galatasaray L.
Merve Özen	Şehit Mehmet Gönenç L./Bandırma
Boran Saruhan	Galatasaray L.
Dilaver Velioğlu	TEV İnanç Türkeş Ö. L./Gebze