Cahit Arf Matematik Günleri I - 2002

Çıkarma ve Kare Alma Altında Kapalı Sayı Kümeleri

Tanımlar: $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ olarak, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ olarak tanımlanmıştır. $*$, gerçel sayılarda tanımlanmış (toplama, çıkarma, çarpma gibi) ikili bir işlem olsun. A bir gerçel sayılar kümesiyse ve her $a, b \in A$ için, $a * b \in A$ ise, o zaman "A, $*$ altında kapalı" denir. Eğer her $a \in A$ için, $a^2 \in A$ ise "*A* ***kare alma altında kapalı***" denir. Eğer A'nın her $a \neq 0$ sayısı için, a^{-1} de A'daysa, A kümesine "***tersini alma altında kapalı***" denir.

Aşağıdaki teoremi (kanıtlamadan) kullanmaya ihtiyacınız olabilir:

Teorem. *Eğer* $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ *ve*

$$a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \ ...\ + a_n\pi^n = 0$$

ise, o zaman $a_0 = a_1 = a_2 = \ ...\ = a_n = 0$*'dır.*

1. *Çıkarma altında kapalı olan bir reel sayılar kümesinin toplama altında da kapalı olduğunu gösterin.*

Kanıt: Sonuç, $x + y = x - ((x - x) - y)$ eşitliğinden çıkar.

2. *Çıkarma ve kare alma altında kapalı olan ve her öğesinin yarısını da içeren bir gerçel sayılar kümesinin çarpma altında da kapalı olduğunu gösterin.*

Kanıt: $xy = \dfrac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{2}$ eşitliğinden ve bir önceki sorudan hemen çıkar.

3. *Çıkarma ve kare alma altında kapalı olan ve 1/2'yi de içeren bir gerçel sayılar kümesinin çarpma altında da kapalı olduğunu gösterin.*

Kanıt: 1/2 kümede olduğundan, karesi 1/4 de kümede. Ayrıca aşağıdaki eşitliğe dikkatinizi çekeriz:

$$x/2 = (x + 1/4)^2 - x^2 - (1/4)^2.$$

Demek ki küme ikiye bölme altında kapalı. Şimdi ikinci sorudan istediğimiz çıkar.

4. *Çıkarma ve kare alma altında kapalı olan ama çarpma altında kapalı olmayan bir gerçel sayı kümesi bulun.*

Yanıtlardan biri: $A = \{a_1\pi + a_2\pi^2 + 2a_3\pi^3 + a_4\pi^4 + ... + a_n\pi^n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a_i \in \mathbb{Z}\}$ olsun. A'nın çıkarma ve kare alma altında kapalı olduğunu görmek oldukça kolay. Ama $\pi, \pi^2 \in A$ ve $\pi\pi^2 = \pi^3 \notin A$. ($\pi^3$ sayısının A'da olmadığı başta verilen teoremden çıkar.)

5. *Çıkarma ve tersini alma altında kapalı olan ve 1/2'yi içeren bir gerçel sayılar kümesinin çarpma altında da kapalı olduğunu gösterin.*

Kanıt: Önce $1/2 + 1/2 = 1$'in kümede olduğuna dikkatinizi çekeriz. Şimdi

$$((y - (1 + y^{-1})^{-1})^{-1} - y^{-1})^{-1} = y^2$$

eşitliğini ve üçüncü soruyu kullanın.

6. *Çıkarma ve kare alma altında kapalı olan bir kesirli sayı kümesinin çarpma altında da kapalı olduğunu gösterin.*

Yanıt: A, çıkarma ve kare alma altında kapalı olan bir kesirli sayılar kümesi olsun. $u, v \in A$ olsun. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ için $u = a/b$ ve $v = c/d$ olsun. Ve e, ad ve bc sayılarının en büyük ortak böleni olsun. Şimdi

$$u = a/b = (e/bd)(ad/e) \in (e/bd)\mathbb{Z}$$

ve

$$v = c/d = (e/bd)(bc/e) \in (e/bd)\mathbb{Z}.$$

Demek ki $uv \in (e^2/b^2d^2)\mathbb{Z}$. Dolayısıyla uv sayısının A'da olduğunu kanıtlamak için, e^2/b^2d^2 sayısının A'da olduğunu kanıtlamalıyız. Bunun için de e/bd sayısının A'da olduğunu göstermek yeterli. $e = \text{ebob}(ad, bc)$ olduğundan, öyle x ve y tamsayıları vardır ki $adx + bcy = e$. Demek ki

$$e/bd = (adx + bcy)/bd = (a/b)x + (c/d)y = ux + vy$$

ve bu son sayı da A'dadır. Demek ki e/bd de A'da.

7. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ *(ya da* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$*) kümesinin bir altkümesi çıkarma ve kare alma altında kapalıysa çarpma altında da kapalı mıdır?*

Yanıt: Bu sorunun yanıtını yarışmadan önce biz de bilmiyorduk. Yarışmadan sonra yanıtın $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ için olumlu olduğunu lise düzeyini aşan bir soyut cebir bilgisi kullanarak kanıtladık. Bilkent Üniversitesi Matematik Bölümü üçüncü sınıf öğrencisi Serhat Doğan $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ için yanıtın olumlu olduğunu lise düzeyinde bir kanıtla gösterdi. Böylece soru $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ için de lise düzeyinde yanıtlanmış oldu. Bundan sonraki yazıda Serhat Doğan'ın kanıtını bulacaksınız. ♥