Doğuş Üniversitesi Matematik Kulübü Matematik Bireysel Yarışması 2005

Soru ve Yanıtlar

1. *Maliyeti üzerinden yüzde 25 kârla satılan bir malın satış fiyatından yüzde onluk bir indirim yapılırsa yüzde kaç kâr edilmiş olur?*

Çözüm: Bu malın maliyetinin 100 YTL olduğunu düşünelim, yüzde 25 kârla bu mal 125 YTL'ye satılacaktır. Bu fiyat üzerinden yüzde 10 indirim yapıldığında, mal 12,5 YTL indirimle 125 – 12,5 = 112,5 YTL'ye satılacaktır. Böylece % 12,5 kar edilmiş olur.

2. *Hangi* $x \geq 0$ *tamsayıları için*

$$\frac{x^2 - x + 4}{x+1}$$

kesrinin değeri bir tamsayı olur?

Çözüm: Denklemden,

$$\frac{x^2 - x + 4}{x+1} = x - 2 + \frac{6}{x+1}$$

elde edilir. Bu durumda aranan pozitif tamsayı değerleri $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ ve $x = 5$ olur.

3. *Bir odanın boyutları* 8, 15 *ve* 17 *birim olarak veriliyor. Odanın birbirine en uzak iki noktası arasındaki uzaklık kaç birimdir?*

Çözüm: Pisagor Teoremi'ni iki kez uygularsak,

$$\sqrt{(8)^2 + (15)^2 + (17)^2} = \sqrt{64 + 225 + 289}$$
$$= \sqrt{2 \times 289} = 17\sqrt{2}$$

buluruz.

4. sin 7620° *değeri nedir?*

Çözüm: $\sin 7620° = \sin(21 \cdot 360° + 60°) = \sin 60° = \sqrt{3}/2$.

5. *Hacmi yüzölçümüne (sayıca) eşit olan kürenin yarıçapı nedir?*

Çözüm: Hacim $4\pi r^3/3$ ve yüzölçümü $4\pi r^2$ olduğundan, $4\pi r^3/3 = 4\pi r^2$ ve buradan da $r = 3$ bulunur.

6. $P(x)$ *polinomu* $x - 1$*'e bölünebilmekte ve* $P(x - 2)$ *polinomunun katsayılar toplamı* –4 *olarak verilmektedir.* $P(x)$ *polinomunun* $x^2 - 1$ *ile bölümünden kalan ne olur?*

Çözüm: Verilenlerden, bir $Q(X)$ polinomu için, $P(x) = (x - 1)Q(x)$ ve

$$-4 = P(1 - 2) = P(-1) = -2Q(1)$$

bulunur. Böylece $Q(-1) = 2$ elde edilir. O halde bir $R(X)$ polinomu için, $Q(x) = (x + 1)R(x) + 2$ şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$P(x) = (x - 1)Q(x) = (x - 1)[(x + 1)R(x) + 2]$$
$$= (x^2 - 1)R(x) + 2(x - 1)$$

çıkar. Kalan $2(x - 1)$'dir.

7. *Tersten okunuşu kendisine eşit olan* 101, 2332, 55555 *gibi sayılara* ***palindrom*** *denir. Dokuz basamaklı kaç palindrom vardır?*

Çözüm: İstenilen özelliklere sahip 9 rakamlı sayı ilk 5 rakamı tarafından belirlenir. İlk rakam için 9 seçenek, ilk rakamdan sonra gelen 4 rakamın her biri için 10 seçenek vardır. Böylece $9 \times 10^4 = 90.000$ tane 9 basamaklı palindrom sayı vardır.

8. *Rakamlarının çarpımı 5'e bölünebilen kaç tane üç basamaklı sayı vardır?*

Çözüm: Üç basamaklı 900 sayı vardır. Bunlardan $8 \times 8 \times 8 = 512$ tanesinde sıfır ya da beş rakamı bulunmaz. Demek ki istenilen sayı 900 – 512 = 388.

9. *Hangi k gerçel sayıları için*

$$\sqrt{k-13} \text{ ve } \sqrt{k+62}$$

sayıları tamsayı olur?

Çözüm: a ve b pozitif tamsayılar olmak üzere

$$\sqrt{k-13} = a \text{ ve } \sqrt{k+62} = b$$

olsun. Buradan $k = a^2 + 13 = b^2 - 62$ çıkar. Böylece $b^2 - a^2 = 75$ olacağından, $(b - a)(b + a) = 75$ eşitliğinde 75 sayısını çarpanlarına ayırarak 1×75, 3×25 ve 5×15 ayrışımlarından a için 37, 11, 5 ve k için 1382, 134 ve 38 bulunur.

10. $\log_{2n} 216 = \log_n (27\sqrt{2})$ *ise* n^5 *nedir?*

Çözüm: $\log_{2n}(216) = \log_n(27\sqrt{2}) = a$ eşitliklerinden $216 = (2n)^a$ ve $27\sqrt{2} = n^a$ bulunur. Bu iki eşitlik kullanılarak da $2^a = 216/(27\sqrt{2}) = 2^{5/2}$ elde edilir. Bulunan $a = 5/2$ değeri yerine konulduğunda $27\sqrt{2} = n^{5/2}$, buradan da $n^5 = 2 \times 3^6$ bulunur.

11. *$6xy + 4x - 3y = 35$ denklemini sağlayan tüm x, y tamsayılarını bulunuz.*

Çözüm: Denklem $6xy + 4x = 35 + 3y$ şeklinde yazıldığında, eşitliğin sol tarafı çift sayı olacağından y tek sayı olmalıdır. $y = 2n + 1$ alalım, o halde $6x(2n + 1) + 4x = 38 + 6n$, buradan da

$$x = \frac{3n+19}{6n+5} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{33}{6n+5}\right)$$

bulunur. Böylece x'in tamsayı olmasını sağlayan n değerleri $n = 1$ ve $n = -1$ olur. $n = 1$ için $x = 2$ ve $y = 3$ bulunur; $n = -1$ için ise $x = -16$ ve $y = -1$ bulunur.

12. *$a + b + c = 24$, $a^2 + b^2 + c^2 = 210$ ve $abc = 440$ eşitliklerini sağlayan a, b, c tamsayılarını kök kabul eden üçüncü dereceden polinom nedir?*

Çözüm: $ab + bc + ca$ simetrik terimini değerini bilinen simetrik terimler cinsinden yazıp hesaplayalım:

$ab + bc + ca = ((a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2))/2 = 183.$

a, b, c sayıları $x^3 - 24x^2 + 183x - 440$ polinomunun kökleridir.

13. *Aşağıdaki sistemde*

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 5 \\ 3x + 2y + z &= 11 \\ (x + 2y)^2 - z^2 &= 15 \end{aligned}$$

x'in değeri nedir?

Çözüm: Üçüncü eşitliği çarpanlarına ayıralım:

$$(x + 2y - z)(x + 2y + z) = 15$$

buluruz. Ayrıca bir de birinci eşitliği kullandığımızda $x + 2y + z = 3$ buluruz. Bu ve ikinci eşitlik $x = 4$ verir.

14. *x ve y sayılarının*

$$x^2 + y^2 = 7 \text{ ve } x^3 + y^3 = 10$$

eşitliklerini sağladığı bilindiğine göre, $x + y$ toplamının alabileceği en büyük değeri nedir?

Çözüm: $(x + y)^3$ terimini olabildiğince değerleri bilinen $x^2 + y^2$ ve $x^3 + y^3$ terimleri cinsinden yazalım:

$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \\ &= 10 + 3(x + y)[(x+y)^2 - x^2 - y^2]/2 \\ &= 10 + 3(x + y)[(x+y)^2 - 7]/2. \end{aligned}$$

Eğer $u = x + y$ dersek, yukardaki eşitlik bize

$$u^3 - 21u + 20 = 0$$

denklemini verir. Bu denklemin kökleri de -5, 1, 4 olarak bulunur. Demek ki $u = x + y$'nin alabileceği en büyük değer 4'tür.

15. *$A627B$ beş basamaklı sayısı 56'ya bölündüğünde kalan 4 ise $A + B$ kaçtır?*

Çözüm: Verilenden,

$$A627B = 10^4A + 6270 + B \equiv 4 \pmod{56}$$

bulunur. Ama

$$10^4 \equiv 32 \pmod{56} \text{ ve } 6270 \equiv -2 \pmod{56}$$

olduğundan $32A + B \equiv 6 \pmod{56}$, yani bir k tamsayısı için $32A + B = 56k + 6$ çıkar. Buradan,

$$B \equiv 6 \pmod 8$$

ve $B = 6$ çıkar. Demek ki $32A = 56k$, $4A = 7k$, $A = 7$ bulunur. Dolayısıyla $A + B = 6 + 7 = 13$.

16. *$6\cos^2 x - 3\cos 2x + \cos 3x = 3$ eşitliğinin $[0, \pi]$ aralığındaki çözümünü bulunuz.*

Çözüm: Yarımaçı formülü kullanılarak $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ değerini yerine yazdığımızda $\cos 3x = 0$ eşitliği elde edilir. Buradan da $x = (2k + 1)\pi/6$ bulunur. $[0, \pi]$ aralığında çözüm istendiğinden, çözüm kümesi $\{\pi/2, \pi/6, 5\pi/6\}$ olur.

17. *a, b pozitif tamsayıları $2a^2 = 3b^3$ eşitliğini sağlıyorsa en küçük $a + b$ değeri nedir?*

Çözüm: En küçük çözüm $a = 2^x3^y$ ve $b = 2^u3^v$ şeklinde yazılabilmeli. Bu değerler eşitlikte yerine konulduğunda $2^{2x + 1 - 3u} = 2^{3v + 1 - 2y}$ elde edilir; buradan da $3u = 2x + 1$ ve $2y = 3v + 1$ eşitlikleri bulunur. Aranan toplamın en küçük değeri de $x = 1$, $y = 2$, $u = 1$, $v = 1$ için bulunur ve toplam $a + b = 18 + 6 = 24$ olur.

18. *6 kişilik bir gurupta, herkes, kendi dışındaki 5 kişinin yaşlarını toplarsa bu toplamların oluşturduğu küme $\{78, 79, 80, 81, 82\}$ oluyor. Bu gurupta aynı yaşta olan iki kişinin yaşları kaçtır?*

Çözüm: Guruptaki kişilerin yaşlarına a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 diyelim. a_6 diğerlerinden birine eşit olsun. Eğer

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

ve

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

diyecek olursak

$$\begin{aligned} a - a_1 &= 78, \\ a - a_2 &= 79, \\ a - a_3 &= 80, \\ a - a_4 &= 81, \\ a - a_5 &= 82, \\ a - a_6 &= A \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$6a - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) = 5a = 400 + A$$

çıkar. Demek ki A, 5'e bölünür.

$$A \in \{78, 79, 80, 81, 82\}$$

olduğundan $A = 80$ ve dolayısıyla $a = 480/5 = 96$ ve $a_6 = 96 - 80 = 16$ olur.

19. *x_1 ve x_2 sayıları $ax^2 + bx - a = 0$ denkleminin kökleridir. Kökleri $ax_1 + b$ ve $ax_2 + b$ olan ikinci dereceden denklem nedir?*

Çözüm: $x_1 + x_2 = -b/a$ ve $x_1x_2 = -1$ olduğundan

$$(ax_1 + b)(ax_2 + b) = a^2x_1x_2 + ab(x_1 + x_2) + b^2 = -a^2$$

ve

$$(ax_1 + b) + (ax_2 + b) = a(-b/a) + 2b = b$$

olur. Böylece aranan ikinci dereden denklem

$$x^2 - bx - a^2 = 0$$

bulunur.

20. *Üç pozitif tamsayının çarpımları toplamlarının 6 katıdır ve bu çarpım N sayısına eşittir. Bu sayılardan biri diğer ikisinin toplamına eşitse bütün olası N değerlerinin toplamı nedir?*

Çözüm: Sayılar x, y, $x + y$ olsun. O halde

$$xy(x + y) = N = 12(x + y)$$

olmalıdır. Böylece $xy = 12$ bulunur, buradan da aranan üçlüler $(x, y, x + y) = (1, 12, 13), (2, 6, 8)$ ya da $(3, 4, 7)$ olur. Dolayısıyla $N = xyz = 156$, 96 ya da 84 ve toplam olarak $156 + 96 + 84 = 336$ bulunur.

21. *$P(7, 12, 10)$, $Q(8, 8, 1)$ ve $R(11, 3, 9)$ noktaları bir kübün köşeleriyse, bu kübün yüzel alanı nedir?*

Çözüm: Noktalar arasındaki uzunluklara bakıldığında $|PQ| = |QR| = |PR| = \sqrt{98}$ bulunur. Eğer kübün bir kenarının uzunluğu a ise, kübün köşeleri bir eşkenar üçgen oluşturacağından $a\sqrt{2} = \sqrt{98}$, buradan $a = 7$, böylece de yüzey alan $6a^2 = 294$ olur.

22. $(1 - 1/2^2)(1 - 1/3^2) \dots (1 - 1/n^2) = 51/101$ *ise n kaçtır?*

Çözüm: Soldaki toplamı hesaplayalım. Sadeleştirmelerle,

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{(n-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{1.3}{2^2}\,\frac{2.4}{3^2}\,\frac{3.5}{4^2}\dots\frac{(n-2).(n)}{(n-1)^2}\,\frac{(n-1).(n+1)}{n^2}$$

$$=\frac{n+1}{2n}$$

bulunur. Buradan da $n = 101$ çıkar.

23. *$0 < a < b < c < d$ tamsayıları için a, b, c aritmetik dizi ve b, c, d geometrik dizi oluşturuyor. $d - a = 30$ olduğuna göre $a + b + c + d$'yi bulun.*

Çözüm: Verilenlerden sayılar,

$$a = b - r,\ c = b + r \text{ ve } bd = c^2$$

olduğundan $(b + r)^2 = b(30 + b - r)$ eşitliği sağlanır. Böylece $r^2 = 3b(10 - r)$ bulunur. Son eşitlikte hem r'nin hem de b'nin 3'ün katı olduğu görülür. Tek çözüm olarak $r = 9$, $b = 27$ çıkar. Yanıt: $18 + 27 + 36 + 48 = 129$'dur.

24. *x ve y sayı tabanı olmak üzere*

$$\sqrt[3]{(1331)_x} + \sqrt[4]{(14641)_y} = 16$$

olduğuna göre, bu eşitliği sağlayan (x, y) pozitif tamsayı ikilileri nelerdir?

Çözüm: Sayı tabanının tanımından dolayı

$$(1331)_x = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$$

ve

$$(14641)_y = y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 = (y + 1)^4$$

olduğundan

$$\sqrt[3]{(1331)_x} + \sqrt[4]{(14641)_y} = x+1+y+1=16$$

yani $x + y = 14$ eşitliğini elde ederiz. $x > 3$ ve $y > 6$ olması gerektiğinden, aranan ikililer (4, 10), (5, 9), (6, 8), (7, 7) olarak bulunur.

25. 2000 *basamaklı*

$$x = \underbrace{11\ldots1}_{1000\text{ tane}}\underbrace{55\ldots5}_{999\text{ tane}}6$$

sayısı için $\sqrt{x}$ kaç basamaklıdır?

Çözüm: Yazması kolay olsun diye $1000 = n$ tanımını yapıp hesaplayalım:

$$x = 6 + 5(10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1})$$
$$+ (10^n + 10^{n+1} + \dots + 10^{2n-1})$$
$$= 1 + 5(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1})$$
$$+ 10^n(1+10+ \dots +10^{2n-1})(10^n+10^{n+1}+ \dots +10^{2n-1})$$
$$= 1 + 5(10^n - 1)/9 + 10^n(10^n - 1)/9$$
$$= (10^n + 2)^2/9.$$

Buradan da $\sqrt{x} = (10^n + 2)/3$ elde edilir. böylece $\sqrt{x}$ sayısının $n = 1000$ basamaklı olduğu görülür.

26. $\left(\dots\left(\left(\left(7^7\right)^7\right)^7\right)^7\dots\right)^7$ *yazılışında* 2005 *tane 7 kullanılmıştır. Buna göre işlemin sonucunun birler basamağı kaçtır?*

Çözüm: 7'nin güçlerini modülo 10 hesaplayalım:

$7^2 = 49 \equiv -1 \pmod{10}$,
$(7^2)^3 \times 7 = 7^7 \equiv -7 \pmod{10}$,
$(7^7)^7 = (7)^7 = 7^7 \equiv 7 \pmod{10}$.

O halde verilen ifadede ki 7 sayısı tekse, işlemin sonucunun birler basamağı 7, çiftse -7 olur. İfadede 2005 tane 7 olduğundan sonuç 7'dir.

27. $x^2 - 10x - 14 = 2\sqrt{x^2 - 10x + 1}$ *eşitliğini sağlayan tüm x gerçel sayılarının toplamı kaçtır?*

Çözüm: $a = x^2 - 10x + 1$ diyelim. Bu durumda $a - 15 = 2\sqrt{a}$. Buradan da

$$a^2 - 34a + 225 = 0$$

bulunur. Son denklemin kökleri olan $a = 25$ ve $a = 9$ değerleri $a = x^2 - 10x + 1$ denkleminde yerine konulduğunda

$$x^2 - 10x - 24 = 0 \text{ ve } x^2 - 10x - 8 = 0$$

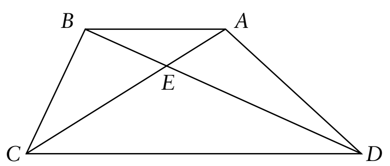
elde edilir. Kolayca görüleceği üzere, birinci denklemden elde edilen kökler soruda verilen denklemi sağlarlar. (Sol taraf 10'a eşittir örneğin.) İkinciden gelen kökler için ise $x^2 - 10x = 8$ olacağından, verilen denklemde yerine konulduğunda $8 - 14 = 2\sqrt{9}$ bulunacağından bunlar alınmayacaktır. İstenilen toplam birincinin kökler toplamı olan 10'dur.

28) $4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - (x^2 + y^2 + z^2)^2$ çok *değişkenli polinomunu birinci dereceden çarpanlara ayırınız.*

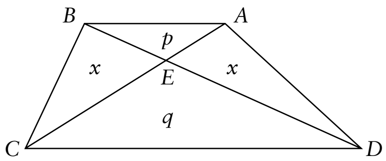
Çözüm: Doğrudan hesap yapalım:

$$\begin{aligned}
&4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - (x^2 + y^2 + z^2)^2\\
&= 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - (x^4 + y^4 + z^4)\\
&= 2x^2(y^2 + z^2) + 2y^2z^2 - x^4 - y^4 - z^4\\
&= 2y^2z^2 - (x^2 - (y^2 + z^2))^2 + (y^2 + z^2)^2 - y^4 - z^4\\
&= 4y^2z^2 - (x^2 - (y^2 + z^2))^2\\
&= (2yz - x^2 + y^2 + z^2)\,(2yz + x^2 - y^2 - z^2)\\
&= ((y + z)^2 - x^2)(x^2 - (y - z)^2)\\
&= (y + z - x)(y + z + x)(x - y + z)(x + y - z).
\end{aligned}$$

29) *ABCD bir yamuk*, $(AB \parallel CD)$, *köşegenlerin kesiştiği nokta E*, $A(ABCD) = 25$ br^2 *ve* $A(AEB) - A(DEC) = 5$ br^2 *ise* $A(BEC)$ *kaç birim karedir?*



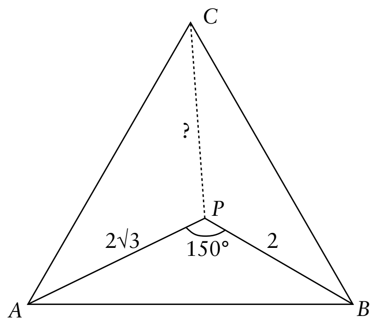
Çözüm: p, q ve x aşağıdaki resimde gösterilen alanlar olsun. $A(ADB) = A(ABC)$ olduğundan $A(ADE) = A(BCE) = x$ olur. Ayrıca, ABE ve BCE üçgenlerinin B'den yükseklikleri aynı olduğundan,



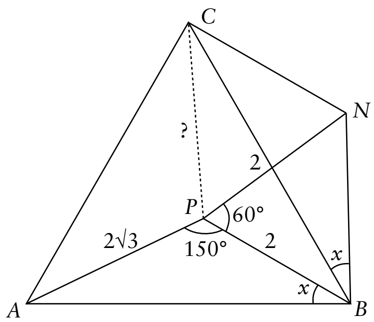
$x/p = |AE|/|EC| = q/x$, bundan da bilinen $x^2 = pq$ ve $A(ABCD) = (\sqrt{p} + \sqrt{q})^2$ sonuçları çıkar. Demek ki $\sqrt{q} + \sqrt{p} = \sqrt{25} = 5$ ve $q - p = (\sqrt{q})^2 - (\sqrt{p})^2 = 5$ den $\sqrt{q} = 3$ ve $\sqrt{p} = 2$ ve $x = \sqrt{pq}$ bulunur.

30. *Aşağıdaki şekilde ABC bir eşkenar üçgen*, $m(APB) = 150°$, $|AP| = 2\sqrt{3}$ *br.*, $|BP| = 2$ *br. Bu verilere göre* $|PC|$ *kaç birimdir?*

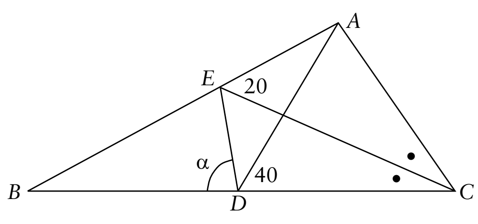
Çözüm: Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi $m(BPN) = 60°$ ve $|PN| = 2$ olacak biçimde BC'nin P'nin bulunduğu tarafta değil de diğer tarafında bir



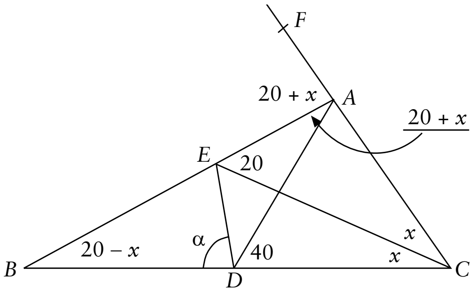
N noktası bulalım. BPN ikizkenar olduğundan ve $m(BPN) = 60°$ olduğundan, BPN aslında eşkenar bir üçgendir. Dolayısıyla $m(PBN) = 60°$. Bundan da $m(CBN) = m(PBN) - m(PBC) = 60° - m(PBC) = m(ABC) - m(PBC) = m(ABP)$ çıkar. Bu açıya x diyelim. Şekilde görüldüğü gibi K.A.K teoremi uyarınca APB ve CNB üçgenleri eş üçgenlerdir. O zaman $m(CNB) = 150°$ ve $|NC| = 2\sqrt{3}$'tür. O halde $m(CNP) = 90°$ olur ve Pisagor bağıntısından $|PC| = 4$ br bulunur.



31. *Aşağıdaki şekilde ABC üçgeninde* $[CE]$ *açıortay*, $m(ADC) = 40°$, $m(CEA) = 20°$. *Bu verilere göre* $m(EDB) = \alpha$ *kaç derecedir?*

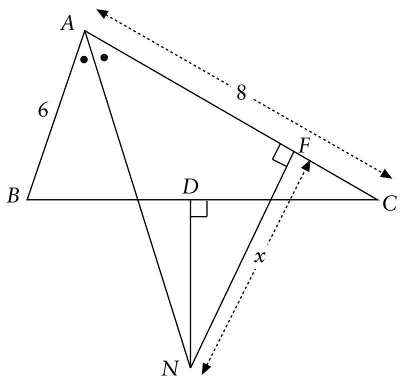


Çözüm: ABC üçgeninde $[CE]$ açıortay ve $m(ECA) = m(BCE) = x$ dersek, $m(EAF) = 20 + x$, $m(EBC) = 20 - x$ ve $m(BAD) = 20 + x$ olur. Sonuç olarak $[BA]$, ADC'nin dış açıortayı, $[CE]$ ise iç açı-

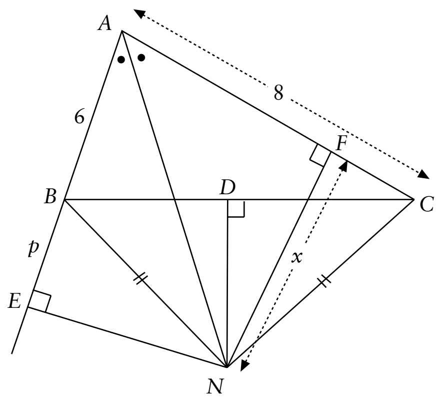


ortayıdır. Bunlar E noktasında kesiştiklerinden, $[ED]$, ADC'nin dış açıortayı olur. Buna göre $\alpha = (180° - 40°)/2 = 70°$ bulunur.

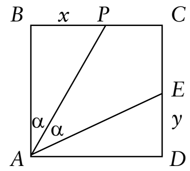
32. *Aşağıdaki şekilde* $|AB| = 6$ *cm*, $|AC| = 8$ *cm*, $|BD| = |DC|$, $[AN]$ *açıortay*, $[ND] \perp [BC]$, $[NF] \perp [AC]$. *Bu verilere göre* $|AF| = x$ *kaç cm'dir?*



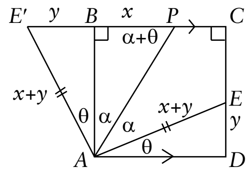
Çözüm: Aşağıdaki şekildeki gibi $[NE] \perp [AB]$ olsun. A.K.A eşlik teoreminden dolayı $AEN \approx AFN$ olduğundan, $|AE| = |AF| = x$ ve $|EN| = |FN|$'dir. Ayrıca $[DN]$ orta dikme olduğundan $|NB| = |NC|$'dir. Pisagor teoremi uyarınca $p = |BE| = |FC|$ bulunur. Buradan da $x = 6 + p$ çıkar ve $x + p = 8$ eşitliğinden $|AF| = x = 7$ bulunur.



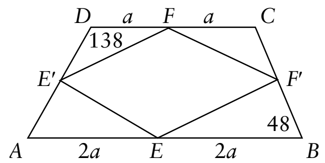
33. *ABCD karesinde* $P \in [BC]$, $E \in CD$, $m(BAP) = m(PAE) = \alpha$, $|PB| = x$, $|DE| = y$. *Bu verilere göre* $|AE|$*'nin* x *ve* y *cinsinden değeri nedir?*



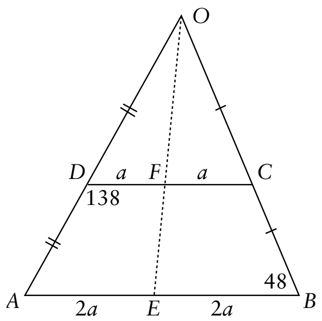
Çözüm: $\theta = m(EAD)$ olsun. ADE üçgenini A noktası etrafında pozitif yönde $2\alpha + \theta$ yani $90°$ döndürürsek E'nin gideceği E' noktası için $m(E'AP) = m(E'PA) = \alpha + \theta$ olur ve bundan da $x + y = |E'P| = |E'A| = |AE|$ çıkar.



34. *Aşağıdaki şekilde ABCD bir yamuk*, $AB \parallel CD$, $m(B) = 48°$, $m(D) = 138°$, $|AB| = 2|DC| = 4a$, $|AE| = |EB|$, $|DF| = |FC|$. *Eğer* E' *ile* F' *sırasıyla* $[AD]$ *ve* $[BC]$*'nin orta noktalarıysa* $E'EF'F$ *paralelkenarının kenarlarının karelerinin toplamı kaçtır?*

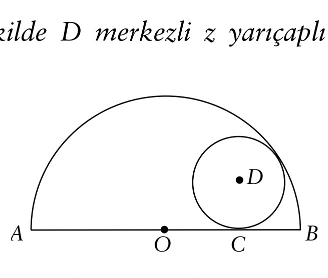


Çözüm: AD ve BC doğrularını uzatıp O'da kesiştirelim. $m(A) = 42°$ olduğundan, $m(AOB) = 90°$ olur. $|DC| = |AB|/2$ olduğundan D ve C orta noktalar olacaktır. Ayrıca OFE doğrusaldır ve $DF = FC$ olduğundan, $|OF| = a$, $|OE| = 2a$ çıkar. $[AD]$'nin E' ve $[BC]$'nin F' orta noktaları içinse $EF'FE'$ bir paralel kenar olup köşegen uzunlukları $e = |E'F'| = (2a + 4a)/2 = 3a$, $f = |EF| = a$ olduğundan, kenarlarının karelerinin toplamı

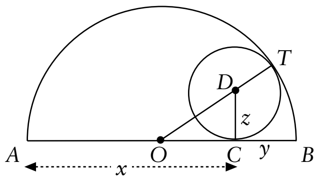


$|EF'|^2 + |F'F|^2 + |FE'|^2 + |E'E|^2 = 2(|EF'|^2 + |F'F|^2) = e^2 + f^2 = 10a^2$ bulunur.

35. *Aşağıdaki şekilde D merkezli z yarıçaplı çember AB doğrusuna ve O merkezli [AB] çaplı çembere teğettir.* $|AC| = x$, $|CB| = y$ *ise x, y ve z arasındaki bağıntıyı yazınız.*



Çözüm 35: OD'yi uzatalım ve çemberi D tarafında kestiği noktaya T diyelim. Ayrıca $|AC| = x$,



$|CB| = y$ ve $|DC| = z$ olsun. Demek ki

$|OB| = (x + y)/2$,

$|OC| = (x - y)/2$.

Teğet çemberlerde O, D, T doğrusal olduğundan,

$|OD| = (x + y)/2 - z$,

$|OC| = (x + y)/2 - y = (x - y)/2$

olacaktır. Tüm bunlardan ve $|OD|^2 = |DC|^2 + |OC|^2$ bağıntısından,

$$((x + y)/2 - z)^2 = z^2 + (x - y)^2/4$$

elde edilir. Demek ki $z(x + y) = xy$ ve $1/z = 1/x + 1/y$.

36. *Üç basamaklı ve 5'e kalansız bölünen tüm pozitif tek tamsayıların toplamını bulunuz.*

Çözüm: Aranan sayılar, (AB) iki basamaklı olmak üzere $(AB5)$ biçimindedir. (AB)'lerin toplamı $99\times100/2 - 9\times10/2 = 4.905$ ve 5'lerin toplamı $90 \times 5 = 450$ olduğundan sonuç $49.050 + 450 = 49.500$'dir.

37. *x, y, z gerçel sayılar olmak üzere*

$$2x^2 + 5y^2 + 10z^2 - 2xy - 4yz - 6zx + 3$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Çözüm: Verilen ifade

$$(x - y)^2 + (x - 3z)^2 + (2y - z)^2 + 3$$

şeklinde yazılabilir. Bütün x, y, z değerleri için

$$(x - y)^2 + (x - 3z)^2 + (2y - z)^2 + 3 \geq 3$$

olduğundan istenilen en küçük değer, $x = y = z = 0$ için, 3 olarak bulunur.

38. $49/18$ *kesri ondalık sayma düzeninde* $(x)_6$ *yazıldığında x ne olur?*

Çözüm: $49/18 = 98/36 = (2\times6^2 + 4\times6 + 2)/6^2 = 2 + 4/6 + 2/6^2$ olduğundan, $49/18 = (2{,}42)_6$ bulunur.

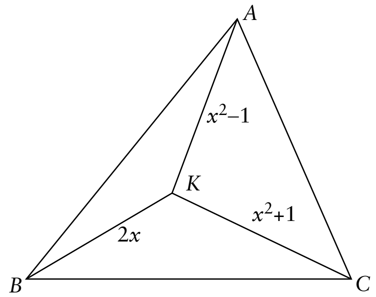
39. *Kenarları* $\sqrt{13}$, $2\sqrt{5}$, $2\sqrt{13}$ *ve* $3\sqrt{5}$ *birim olan bir kirişler dörtgeninin çevrel çemberinin yarıçapı kaç birimdir?*

Çözüm:

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

formülünden $R = \sqrt{65}/2$ bulunur.

40. *Aşağıdaki şekilde, ABC eşkenar üçgen,* $|AK| = x^2 - 1$ *br.*, $|KB| = 2x$ *br.*, $|KC| = x^2 + 1$ *br. Bu verilere göre* $m(AKB)$ *kaç derecedir?*



Çözüm: $(x^2 - 1)^2 + (2x)^2 = (x^2 + 1)^2$ eşitliğini kullanacağız.

$\alpha = m(KBC)$ ve $\beta = m(ABK)$ diyecek olursak $\alpha + \beta = 60°$ olur. B köşesinden $|NB| = 2x$ ve $m(ABN) = \alpha$ olacak şekilde $[NB]$ çizelim. Bu durumda BNK eşkenar üçgen olur ve $|NK| = 2x$ br olur. ABC eşkenar üçgen olduğuna göre K.A.K teoreminden KBC ve NBA üçgenleri eş üçgenlerdir. O halde $|AN| = |KC| = x^2 + 1$'dir. $(x^2 - 1)^2 + (2x)^2 = (x^2 + 1)^2$ eşitliğinden dolayı ANK üçgeninde Pisagor bağıntısı geçerlidir, yani ANK diküçgendir ve $m(AKN) = 90°$'dir. Dolayısıyla $m(AKB) = 90° + 60° = 150°$'dir. ♥