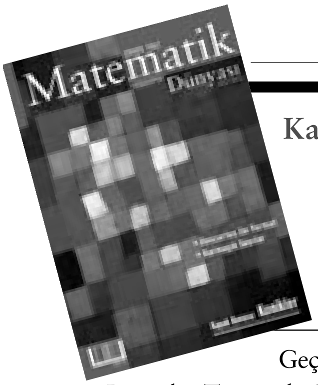


Kapak Konusu: Poncelet Teoremleri

Elips'te Poncelet Teoremleri'nin Sonuçları

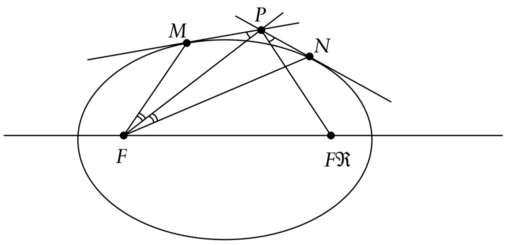
Andrei Ratiu* / *ratiu@bilgi.edu.tr*

Geçen sayımızda, elipsler üzerine Poncelet Teoremleri adıyla bilinen oldukça şaşırtıcı bir sonuç kanıtlamıştık:

Elips İçin Poncelet Teoremleri [MD-2005-II, sayfa 51]. *M ve N, elips üzerinde iki nokta, P de bu noktalardaki teğetlerin kesişim noktası olsun. F ve Fℜelipsin odaklarını simgelesin. Bu durumda*

1. $m(MPF) = m(NPF\Re$

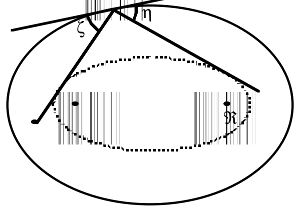
2. $m(MFP) = m(PFN)$.



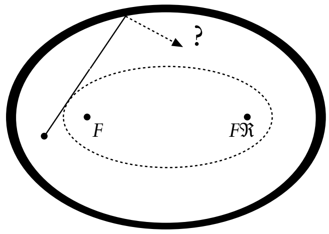
Poncelet Teoremi'nin en az Poncelet Teoremleri kadar şaşırtıcı sonuçları vardır. Bu yazımızda bunlardan birkaçından sözedeceğiz.

Aşağıdaki sonucu geçen sayıda kanıtlamıştık, ama bu yazıda da kullanacağımızdan anımsatmakta yarar var.

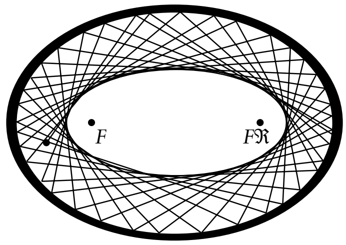
Sonuç 1 [MD-2005-II, sayfa 53]. *Aynı odak noktaları olan iki elips alalım. Asal uzunluğu daha küçük olana küçük, diğerine büyük elips diyelim. Küçük elipsin bir teğeti büyük elipsi A noktasında kessin. A noktasından küçük elipse diğer teğeti çekelim. O zaman aşağıdaki şekildeki* ζ *ve* η *açıları birbirine eşittir.*



Geçen sayıda bu teoremi eliptik bir bilardo masasında yorumlamıştık. Eliptik bir bilardo masası alalım. Bu bilardo masasının içine bilardo masasıyla aynı odak noktalarına sahip bir elips çizelim.



Şimdi topu küçük elipse teğet bir yörüngede gidecek şekilde fırlatalım. Yukardaki sonuca göre top masanın bantına çarptıktan sonra banta çarptıktan sonra gene aynı elipse teğet olarak yoluna devam eder. Ve bu böyle aşağıdaki şekildeki gibi sonsuza kadar sonsuza kadar sürer gider.



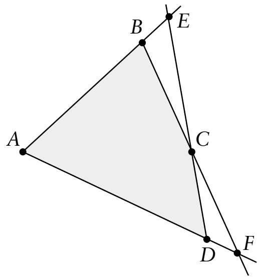
Tabii top sadece sonlu kez banta çarptıktan sonra başladığı noktaya geri dönebilir, bu mümkündür, yani sonlu bir yörüngeye sahip olabilir.

Aynı odak noktalarına sahip elipslere ***odaktaş elipsler*** diyelim. Poncelet Teoremleri odaktaş elipslerin birçok özelliğini ortaya koyar. Ama önce çok daha basit bir sonuç bulalım:

Teorem (M. Urquhart). *ABCD, dışbükey bir dörtgen olsun. AB ve CD ile AD ve BC karşılıklı kenarları sırasıyla E ve F noktalarında kesişsinler. O zaman* $|AB| + |BC| = |AD| + |DC|$ *eşitliği için yeter ve gerek koşul* $|AE| + |EC| = |AF| + |FC|$ *eşitliğidir.*

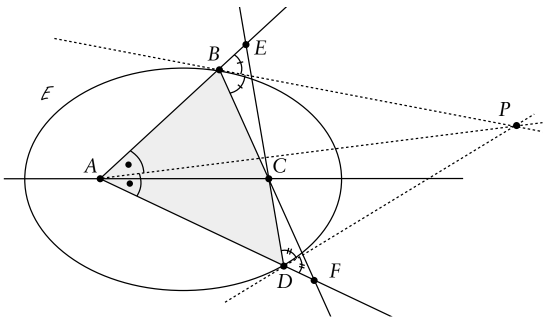
Bu teorem "düzlem geometrisinin en basit teoremi" olarak adlandırılır çünkü doğruluğunu an-

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.



lamak için neredeyse hiç geometri bilgisine ihtiyaç yoktur. Gene de bu teorem 20'nci yüzyılın birinci yarısında bulunabilmiştir.

Urquhart Teoremi'nin Kanıtı. $|AB| + |BC| = |AD| + |DC| = 2a$ olsun. $\mathcal{E}$, odak noktaları A ve C olan ve sabiti $2a$ olan elips olsun. O zaman, yukardaki eşitlikten dolayı, B ve D noktaları da $\mathcal{E}$ elipsinin üstündedir. Elipse B ve D noktalarından teğetlerini çizelim.

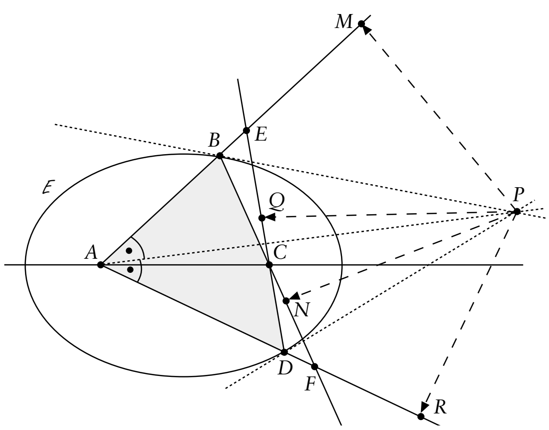


Eğer bu iki teğet paralel olsalardı, o zaman B ve D noktaları elipsin merkezine göre simetrik olacaklardı ve $ABCD$ dörtgeni bir paralelkenar olacaktı, ki bu da E ve F kesişim noktalarının varlığıyla çelişecekti. Demek ki bu iki teğet bir P noktasında kesişirler.

Poncelet Teoremi'ne göre AP doğrusu DAB açısının açıortayıdır. Ayrıca B'den geçen teğet EBC açısını ve D'den geçen teğet FDC açısını eşit iki parçaya böler. Demek ki P, bu iki açıortayın kesişimi olduğundan, eşit iki parçaya bölünen açıların kenarlarına eşit mesafededir, yani

$$d(P, DE) = d(P, AF) = d(P, AB) = d(P, BF).$$

Bir başka ifadeyle, P merkezli ve dörtgenin AB, BC, CD ve DA kenarlarına sırasıyla M, N, Q ve R noktalarında teğet bir C çemberi vardır.



Bu arada, P en az 6 değişik açının açıortaylarının kesişimidir. Bu 6 açıyı görebiliyor musunuz?

Böylece

$$\begin{aligned}|AE| + |EC| &= |AE| + |EQ| + |QC|\\ &= |AE| + |EM| + |QC| = |AM| + |CQ|\\ &= |AR| + |CN| = |AF| + |FR| + |CN|\\ &= |AF| + |FN| + |NC| = |AF| + |FC|\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. "Gerekliği" kanıtladık. "Yeterliğin" de kanıtı benzerdir; okura bırakıyoruz. □

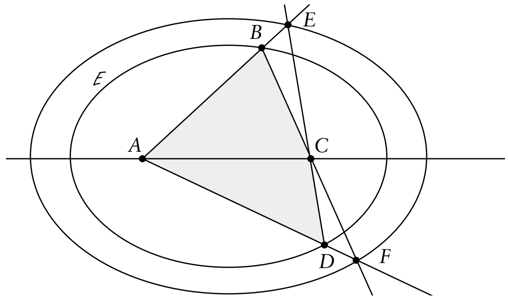
Kendini Kesen Dörtgenlerin Durumu

Ya dörtgen kendi kendini keserse ne olur? Bu durumda da Urquhart Teoremi'nin bir benzeri geçerlidir.

Theorem. *Kendini kesen bir dörtgenin iki karşılıklı köşesi, odak noktaları diğer iki karşılıklı köşe olan bir $\mathcal{E}$ elipsinin üstündeyse, o zaman dörtgenin karşılıklı kenarlarının kesişimi, $\mathcal{E}$ elipsiyle odaktaş olan bir $\mathcal{H}$ hiperbolü üzerindedir.*

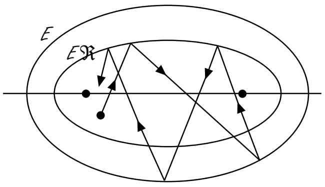
Urquhart Teoremi'ni odaktaş elipslerle ilgili bir teorem haline sokabiliriz:

Sonuç. *Eğer kendini kesmeyen bir dörtgenin iki karşılıklı köşesi, odak noktaları diğer iki karşılıklı köşe olan bir $\mathcal{E}$ elipsinin üstündeyse, o zaman dörtgenin karşılıklı kenarlarının kesişimi $\mathcal{E}$ elipsiyle odaktaş olan bir başka elips üzerindedir.*

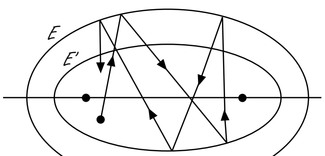


Urquhart Teoremi'ni eliptik bilardo masasına da yorumlayabiliriz. Şöyle: Anlatacağımız şu hayali “çifte bilardo” oyununu oynayalım. Odaktaş iki elipsimiz olsun. Dış elipse $\mathcal{E}$, iç elipse $\mathcal{E}'$ diyelim. Topumuz başlangıçta $\mathcal{E}'$ iç elipsinin içinde bir yerde olsun. Topa belli bir istikamette vurduğumuzda, topumuz elipslerin önce birinin sonra diğerinin iç duvarlarına sırayla çarpıp dursun...

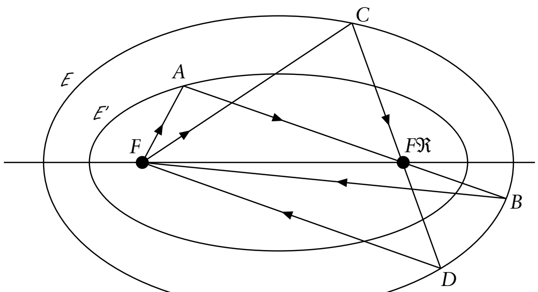
Örneğin topun önce $\mathcal{E}'$ iç elipsine çarpıp geri dönebilir. Bu durumda top, geri döndüğünde $\mathcal{E}'$ elipsini geçip $\mathcal{E}$ elipsine doğru yola devam eder ve $\mathcal{E}$'nin duvarına çarpıp geri döner, ardından $\mathcal{E}'$ elipsinin içine girip onun diğer duvarına çarpıp geri döner ve bu böyle sürekli devam eder. Topun ilk önce iç elipsin duvarına çarparak gittiği yola ($\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}$)-***yörüngesi*** diyeceğiz.



Diğer bir seçenek de topun ilk vuruşta $\mathcal{E}'$ elipsini geçip $\mathcal{E}$'nin duvarına çarpması. Bu durumda top tekrar $\mathcal{E}'$ elipsine doğru yönelir, elipsin içine girer ve diğer duvarına çarpıp geri döner. Sonra, şekildeki gibi $\mathcal{E}$'nin duvarına çarpar vs. Buna da ($\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$)-***yörüngesi*** diyeceğiz.



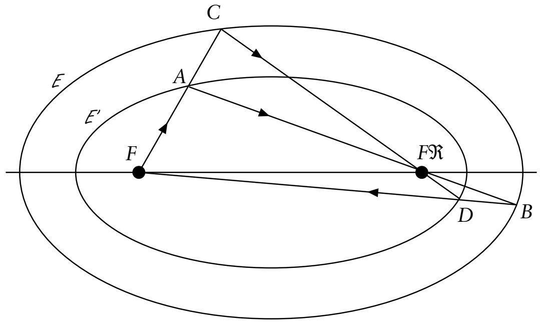
Eğer topun ilk yeri bir odak noktasıysa, o zaman her iki yörünge de diğer odak noktasından geçer, sonra tekrar birinci odak noktasından geçer ve



bir sonraki sütundaki şekildeki gibi yörüngenin cinsine göre top ya FAB ya da FCD üçgenini dolaşır durur.

Bir başka şaşırtıcı ve beklenmedik sonuç kanıtlayacağız şimdi.

Theorem. *$\mathcal{E}$ ve $\mathcal{E}'$ iki odaktaş elips olsun. $\mathcal{E}'$ iç elips olsun. Odaklara F ve F′ diyelim. Bir ($\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}$)-yörüngesi F′den başlasın ve FAB üçgenini izlesin. Aynı biçimde bir ($\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$)-yörüngesi F′den başlasın ve FCD üçgenini izlesin. Eğer F, A, C noktaları doğrusalsa F, B, D noktaları da doğrusaldır. Ayrıca her iki üçgenin de çevreleri aynıdır.*

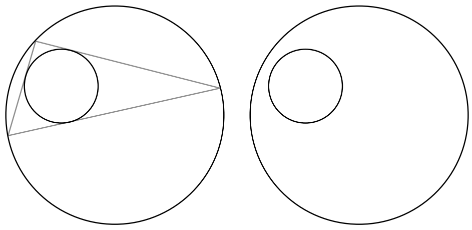


Kanıt: $FAF'D$ dörtgeninde $FA + AF' = FD + DF'$ eşitliği geçerlidir. FD ve AF' karşı kenarlarının kesişimi B' olsun. Urquhart Teoremi'nden dolayı, $FC + CF' = FB' + B'F'$. Demek ki B' noktası $\mathcal{E}$ elipsinin üstündedir. Dolayısıyla AF' doğrusu $\mathcal{E}$ elipsini B ve B' noktalarında kesiyor. Ama odak noktasından çıkan bir ışın bir elipsi en fazla bir noktada keser. Demek ki $B = B'$ ve F, B ve D noktaları doğrusaldır. Ayrıca

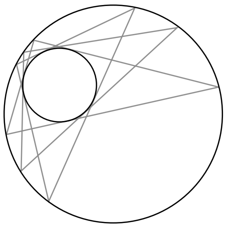
$$\begin{aligned} FA + AB + BF &= FA + AF' + F'B + BF \\ &= FD + DF' + F'C + CF \\ &= FC + CF' + F'D + DF \\ &= FC + CD + DF. \end{aligned}$$

□

Elipslerin bir başka beklenmedik özelliğini kanıtlamadan önce bir soru soralım. Kurşun kalemle herhangi bir üçgen çizin. Sonra üçgenin çevrel (dış) çemberini ve iç teğet çemberini mürekkepli kalemle çizin. Sonra kurşun kalemle çizdiğiniz üçgeni silip bu üçgeni tekrar bulmaya çalışın.

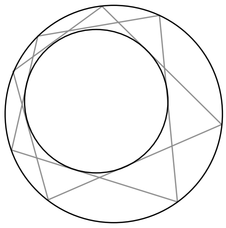


Yapmanız gereken belli. Büyük çemberin bir noktasından başlayıp küçük çembere bir teğet çizeceksiniz, bu teğetin büyük çembere değdiği diğer noktadan küçük çembere bir teğet daha çizeceksiniz, sonra bu ikinci teğetin büyük çembere değdiği diğer noktadan küçük çembere üçüncü bir teğet

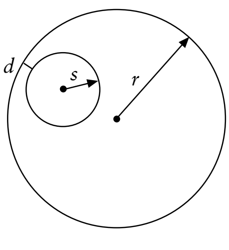


daha çizeceksiniz ve bu üçüncü teğetin başladığınız ilk noktaya erişeceğini umacaksınız. Eğer doğru çizerseniz, çizime ilk başladığınız nokta ne olursa olsun üç adımda başladığınız noktaya geri döneceksiniz. Bunu ummuş muydunuz? Yani bir değil sonsuz tane çözüm vardır. Demek ki kurşun kalemle çizilmiş üçgenin bir noktasını bilmiyorsanız bulamazsınız.

Şimdi aynı şeyi üçgen yerine bir dörtgenle yapın. Ama bu sefer dörtgeni ve çemberleri çizmek üçgendeki kadar kolay olmayacak, aramak zorunda kalacaksınız. Diyelim böyle bir dörtgen ve bu dörtgenin içinde bir en büyük çember ve dışında bir en büyük çember buldunuz. Büyük çemberin hangi noktasından başlarsanız başlayın teğet çizerek dört adımda başladığınız noktaya gelirsiniz.

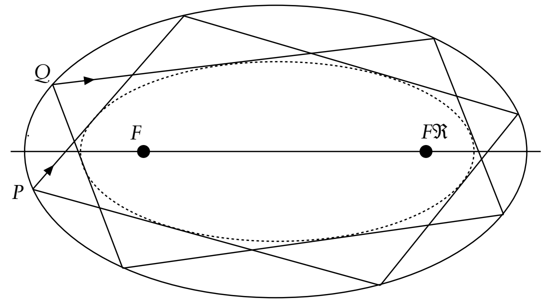


Ödüllü Soru: *Üç kenarı küçük çembere teğet ve üç köşesi büyük çember üstünde bir üçgenin olabilmesi için, çemberlerin r ve s yarıçaplarıyla çemberlerin birbirlerine olan d uzaklığı arasındaki nasıl bir cebirsel ilişki olmalıdır?*



Yukarda fısıldamaya çalıştığımız özellik sadece çemberler için değil elipsler için de doğrudur. "Şaşırtıcı" hafif bir deyim!

Poncelet Kapanış Teoremi ya da Poncelet Porizma'sı[1]**.** *E ve Eℜ biri diğerinin içinde iki odaktaş elips olsun. EℜE'nin içinde olsun. E elipsini bir bilardo masası olarak görelim. Dış elipsin üstünde ya da içinde bir nokta olsun. Bilardo topunu bu P noktasına koyarak Eℜ elipsine teğet olacak biçimde fırlatalım. Eğer top n kez banta çarptıktan sonra gene başladığı P noktasına geliyorsa (top hep Eℜ elipsine teğet doğrulardan oluşan bir yörünge izler, bunu biliyoruz) o zaman bu özellik sadece P noktası için değil, dış elipsin her noktası için geçerlidir.*

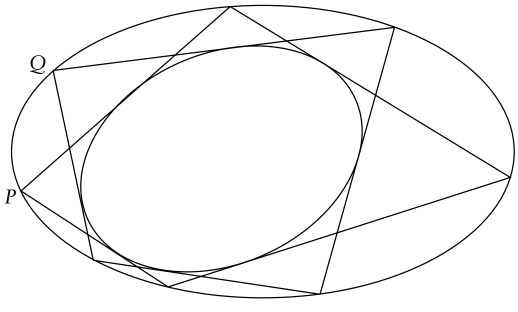


Bu teoremi en iyi anlamanın yolu odak noktalarının bir olduğu $F = F$ℜ özel durumuna bakmak. Bu özel durumda odaktaş elipsler aslında ortak merkezli iki çemberdir. Çemberin simetrisinden dolayı teorem bu durumda oldukça bariz. Elipsler için ise hiç bariz değil.

Poncelet Porizması'nın kanıtı hiç de kolay değildir. Ne yazık ki burada bu teoremi kanıtlayamayacağız.

Yukarda yazdığımız teoremden çok daha genel ve çok daha şaşırtıcı bir teorem doğru. Biri diğerinin içinde **herhangi** iki elips alalım. "Herhangi"nin üstüne basıyoruz, elipsler odaktaş olmak zorunda olmadıkları gibi aynı eksenlere bile sahip olmak zorunda değiller. sadece biri diğerinin içinde olmalı.

Dış elipsin içinde ama iç elipsin dışında herhangi bir P noktası alalım. P'den iç elipse bir teğet çizelim. Bu teğet dış elipsi P_1 adını vereceğimiz ikinci bir noktada keser. Bu sefer P'den başlayarak yaptığımızı P_1'den başlayarak yapalım. P_1'den iç elipse bir teğet çizelim ve bu teğet dış elipsi bir de ayrıca P_2 noktasında kessin. Bunu böyle devam ettirelim. Diyelim n adımda P'ye geri geldik, yani $P_n = P$ oldu. O zaman bu özellik sadece P noktası için değil, dış elipsin içinde ama iç elipsin dışında alınan herhangi bir nokta için de geçerlidir, yörüngeler hep n adımda başlangıç noktasına gelirler. ♦



* Porizma (İng. porisma): "Bir çözüm varsa sonsuz sayıda çözüm vardır" gibi teoremler için kullanılan ve bugün modası geçmiş olan bir sözcük.