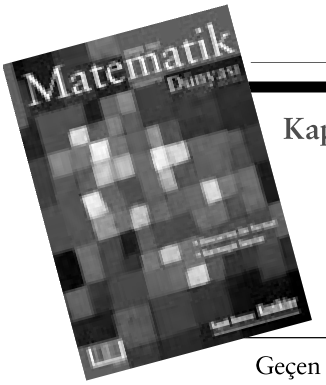


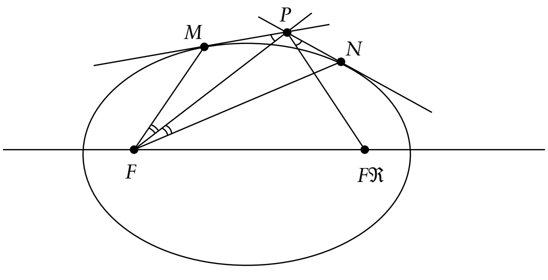
Kapak Konusu: Poncelet Teoremleri

Paraboller için Poncelet Teoremleri

Selçuk Demir* / *sdemir@bilgi.edu.tr*

Geçen sayıda elipsler için ünlü Poncelet Teoremleri'ni kanıtlamıştık [MD-2005-II, sayfa 51]. Bu ilginç teoremi anımsatalım:

Elips İçin Poncelet Teoremleri. *M ve N, elips üzerinde iki nokta, P de bu noktalardaki teğetlerin*



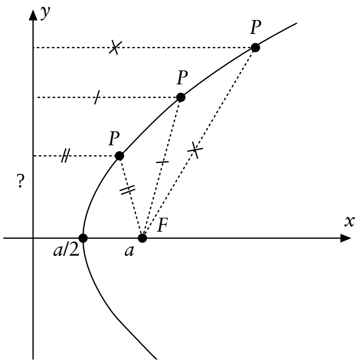
kesişim noktası olsun. F ve F$\mathfrak{R}$elipsin odaklarını simgelesin. Bu durumda

1. $m(MPF) = m(NPF\mathfrak{R}$
2. $m(MFP) = m(PFN)$.

Bu yazıda bu teoremin benzerini paraboller için kanıtlayacağız. Önce parabolden başlayalım.

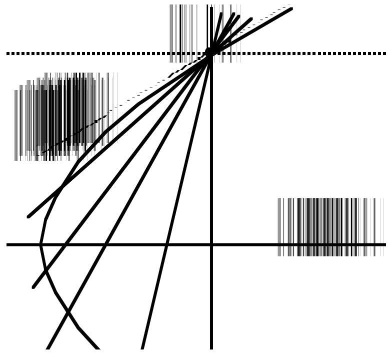
Parabol. Odak noktası F ve doğrultmanı d olan parabolü $\mathcal{P}(F, d)$ ile gösterelim. Demek ki,

$$\mathcal{P}(F, d) = \{P : d(P, d) = d(P, F)\}.$$



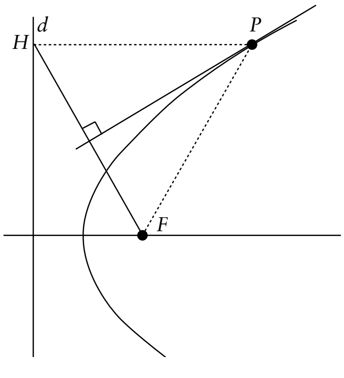
Dejenere durumla muhatap olmamak için F'nin d'nin üstünde olmadığını varsayacağız.

Geçen sayımızda [MD-2005-II, sayfa 24-25], iki doğru dışında, parabolü kesen her doğrunun parabolü iki değişik noktada kestiğini kanıtlamıştık. Bunlardan biri parabolün eksenine paraleldir, diğeri ise parabole teğettir. Biz bu yazıda işin biraz kolayına kaçıp teğeti şu anlamda kullanacağız: Eğer bir t doğrusu parabolü sadece P noktasında kesiyorsa **ve** parabolün eksenine paralel değilse, o zaman t doğrusuna parabole P'de ***teğet*** diyeceğiz.



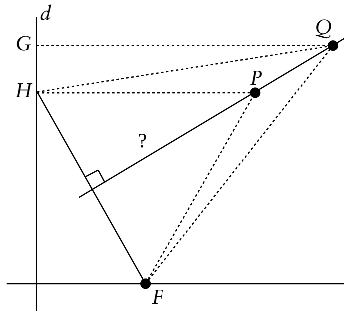
Teğetin asıl matematiksel tanımı bu değildir ama eğri parabol olduğunda, kabul ettiğimiz teğet kavramı gerçek teğet kavramıyla örtüşür. Bu iki kavramın denkliğinin kanıtını gerçek teğet kavramını anlayabilecek donanıma sahip olan, yani türev kavramını bilen okura bırakıyoruz.

Teorem. *P, $\mathcal{P}(F, d)$ parabolü üzerinde bir nokta, H de P'nin d üzerindeki izdüşümü olsun. Parabole P noktasında teğet doğru HF doğru parçasının orta dikmesidir.*



* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.

Kanıt: H, d doğrusu üzerinde herhangi bir nokta olsun. FH doğrusunun orta dikmesine ? diyelim. ?'nin parabole teğet olduğunu kanıtlayacağız.



Önce ?'nin parabolü kestiğini kanıtlayalım. H'den d'ye bir dikey çıkalım. Bu dikey ? doğrusunu P noktasında kessin. ? doğrusu HF'nin orta dikmesi olduğundan, $d(P, d) = d(P, H) = d(P, F)$ olmalı. Demek ki P noktası parabolün üstünde. Böylece ?'nin parabolü kestiğini kanıtladık.

Şimdi de ?'nin parabolü bir başka noktada kesmediğini kanıtlayalım. Diyelim ? doğrusu parabolü bir başka noktada kesiyor. Q, ?'nin ve parabolün üstünde ve P'den değişik bir nokta olsun. G de Q'nün d üzerine izdüşümü olsun. O zaman

$$QG = QF = QH > QG,$$

bir çelişki.

FH'nin ortadikmesi olan ? doğrusunun parabolü tek bir noktada kesitiğini kanıtladık. Yatay bir doğru olmadığından, bundan ?'nin parabole teğet olduğu çıkar.

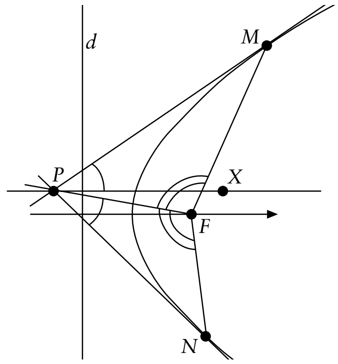
Şimdi parabolün üstünden herhangi bir P noktası alalım ve P'den parabole t teğetini çizelim. H, P'nin d'ye olan izdüşümü olsun. HF'nin ortadikmesinin parabole P noktasında teğet olduğunu bir önceki paragrafta gördük. Demek ki t bu ortadikmeymiş. □

Bu teorem sayesinde, parabolün verilen bir noktasından parabole teğet çizilebilir, bir doğrunun parabole teğet olup olmadığı anlaşılabilir, bir teğet verilmişse teğetin parabole değme noktası bulunabilir vs. Bunları okura bırakıyoruz.

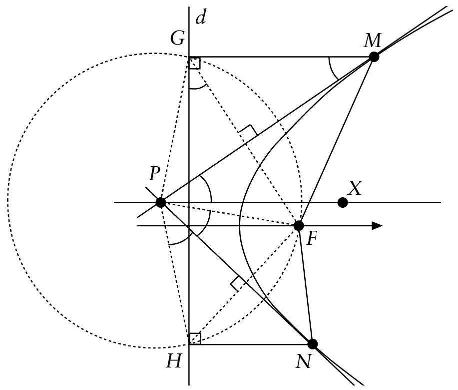
Şimdi parabol için Poncelet teoremlerini kanıtlayabiliriz.

Parabol İçin Poncelet Teoremi. M ve N, $\mathcal{P}(F, d)$ *parabolü üzerinde iki nokta olsun. Bu parabole M ve N noktalarından çizilen teğetler P noktasında kesişsin. PX doğrusu parabolün simetri eksenine paralel olsun. O zaman,*

1. $m(XPM) = m(FPN)$.
2. $m(PFM) = m(PFN)$.



Kanıt: 1. G ve H, sırasıyla, M ve N'nin d doğrultayına olan izdüşümleri olsun. Bir önceki önsavdan dolayı MP, FG'nin ve NP, FH'nin orta dikmesidir. Kanıtımızı dört adımda yapacağız:



a) XPM ve FGH açılarının kenarları dik olduğundan, $m(XPM) = m(FGH)$.

b) P, hem FG'nin hem de FH'nin orta dikmeleri üzerindedir. Demek ki H, F ve G noktaları P merkezli $|PF|$ yarıçaplı çember üzerindedirler. HPF açısı, FGH çevre açısının gördüğü yayı gören merkez açı olduğundan, $m(FGH) = m(HPF)/2$ [MD-2005-II, sayfa 40, Önsav 1].

c) PN doğrusu HPF açısının açıortayı olduğundan, $m(HPF)/2 = m(FPN)$.

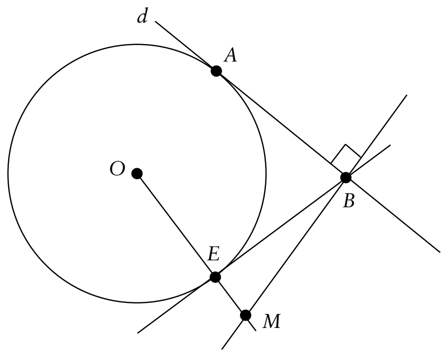
Bu üç adımdan, $m(XPM) = m(FPN)$ eşitliği çıkar: $m(XPM) = m(PMG) = m(FGH) = m(HPF)/2 = m(FPN)$.

2. Yukarda yapılanlardan yararlanarak aşağıdaki eşitlikleri teker teker kontrol edebiliriz: $m(PFM) = m(PGM) = m(PGH) + m(HGM) = m(PHG) + m(GHN) = m(PHN) = m(PFN)$. □

Alıştırmalar

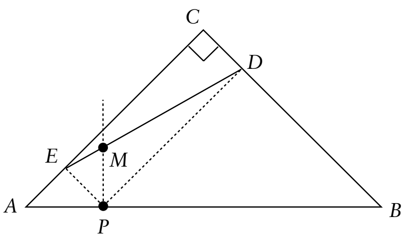
1. d doğrusu ve bu doğru üzerinde olmayan bir A noktası veriliyor. A'dan geçen ve d'yi doğrultman kabul eden parabollerin odaklarının geometrik yerini bulunuz.

2. O merkezli sabit bir C çemberi üzerinde alınan sabit bir A noktasında teğet olan bir d doğrusu çiziliyor. Bu d doğrusu üzerinde hareket eden bir B



noktası alınıyor. B'den C çemberine E noktasında teğet olan bir doğru çiziliyor. B noktasında d'ye dik olan doğru ile OE doğrusu bir M noktasında kesişiyor. Bu M noktalarının geometrik yerini bulunuz

3. C açısı dik olan ABC ikizkenar dik üçgeninin AB hipotenüsü üzerinde alınan bir P noktasının CA ve CB kenarları üzerındeki izdüşümleri E



ve D noktaları olsun. EPD açısının açıortayıyla ED doğrusunun kesişim noktası da M olsun. P noktası AB doğrusu üzerinde hareket ettiği takdirde M noktasının geometrik yerini bulunuz.

4. Odağı F, doğrultmanı d, ekseni FX olan bir parabol veriliyor. F odağından geçen kirişin uç noktaları M, M', FX ile FM arasındaki açı da ζ (mod 2ϕ) olduğuna göre,

a) MF ve MF' uzunluklarını parabolün p parametresi ve ζ açısının fonksiyonları olarak hesaplayınız. (p, odak ile doğrultman arasındaki uzaklığı gösteriyor).

b) MM' uzunluğunu bulunuz.

c) $1/MF + 1/MF'$ sayısının bir sabit olduğunu gösteriniz.

d) $MM' = 2d$ uzunluğu verildiğine göre M noktasını çizimle bulunuz.

5. Odağı F, doğrultmanı d olan parabole dış bölgesinde bulunan bir A noktasından çizilen teğetlerin parabole değme noktaları M ve M' olsun. A noktasından eksene çizilen paralel doğru MM' doğru parçasının orta noktasından geçer. Kanıtlayınız.

6. İki teğeti ve bunların değme noktaları verilen parabolü çiziniz. (Yani odak noktasını ve doğrultmanı bulunuz.)

7. Üç teğeti ve bunlardan birinin değme noktası verilen parabolü çiziniz. (Yani odak noktasını ve doğrultmanı bulunuz.)

8. Odağı F, doğrultmanı d olan parabole dışındaki bir noktadan iki teğet çiziliyor. A, A' bu teğetlerin değme noktaları ise:

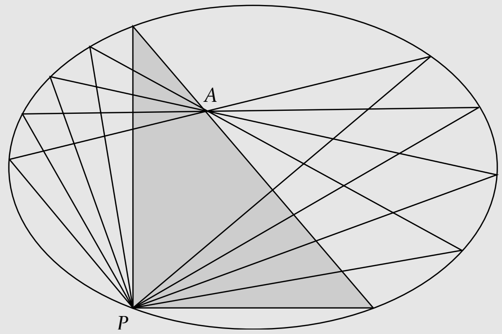
a) $PF \Delta PF = FA \Delta FA'$ olduğunu,

b) $PA \Delta PA \Delta AF' = PA' \Delta PA' \Delta AF$ olduğunu kanıtlayınız.

c) Parabolün bir değişken teğeti AP'yi Q, AP''yi Q' noktalarında kesiyor. Teğetin değme noktası M ile gösteriliyor ise, $FQ \Delta FQ' = PF \Delta FM$ olduğunu kanıtlayınız. ♦

Frefier Teoremi

Frefier Teoremi. *Herhangi bir konik alalım. Bu konik üstüne herhangi bir P noktası alalım. Dik açısı P'de olmak üzere çizilen üçgenlerin hipotenüsleri ortak bir A noktasından geçerler.*



Soru 1. Elips ve P noktası verilmiş. Dik açısı P'de olan ve elipsin içine sığan hipotenüsü/alanı/çevresi en büyük diküçgeni bulun.

Soru 2. Sadece elips verilmiş. Elipsin içine sığan hipotenüsü/alanı/çevresi en büyük olan diküçgeni bulun.

Soru 2. P elips üstünde dolanırken A'ların geometrik yerini bulun.