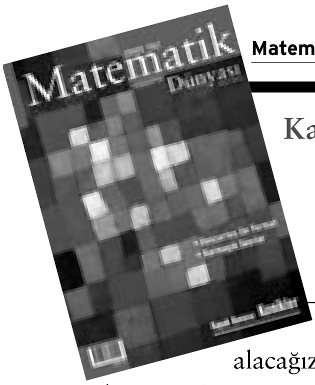


Kapak Konusu: Poncelet Teoremleri

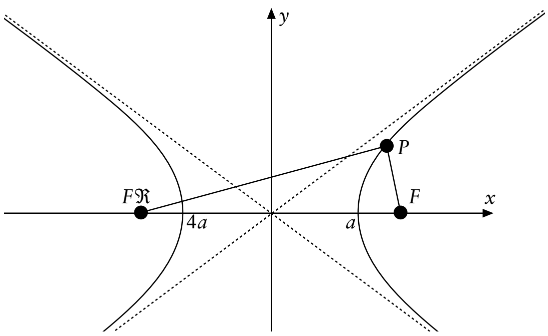
Hiperbolde Yolculuk

(ve Poncelet Teoremleri)

Bu yazıda hiperbolleri ele alacağız. Tek başına... Yazımızdaki her şey A. Nazmi İlker'le Nâzım Terzioğlu'nun yazdığı **Konikler** [Şirketi Mürettibiye Basımevi, İstanbul, üçüncü baskı, 1960] adlı kitabında mevcuttur ve hatta o kitaptan kendi dilimize ve aklımıza çevrilerek aktarılmıştır.

Geçen sayımızı okuyan okur [MD-2005-II, sayfa 45-53] aynı teoremlerin elipsler için de geçerli olduğunu (herhalde şaşırarak) görecektir. Ancak bu yazımız, çoğu zaman olduğu gibi, diğer tüm yazılardan bağımsızdır.

Meraklı okurun, bu yazıda hiperbol, geçen sayıda elips için kanıtlanan bu teoremlerin benzerlerini parabol için bulup kanıtlayacağını umuyoruz.



Geometrik tanımdan yola çıkıyoruz: Bir düzlemde, verilen sabit iki noktaya olan uzaklıklarının farkı sabit olan noktalar kümesine ***hiperbol*** denir. Daha açık olmak gerekirse, düzlemde iki değişik F ve F' noktaları verilmiş olsun. $||PF| - |PF'|| = 2a$ eşitliğini sağlayan P noktaları kümesine hiperbol denir. F ve F' noktalarına hiperbolün ***odak noktaları*** adı verilir.

Hiperbolleri geçen sayımızda çizmiştik. Eğer noktaları x eksenine O'ya göre simetrik olacak biçimde yerleştirirsek, hiperbol yukardaki gibidir.

Görüldüğü gibi hiperbolün iki kolu vardır. Yukardaki şekilde sol kolun P noktaları

$$|PF| - |PF'| = 2a$$

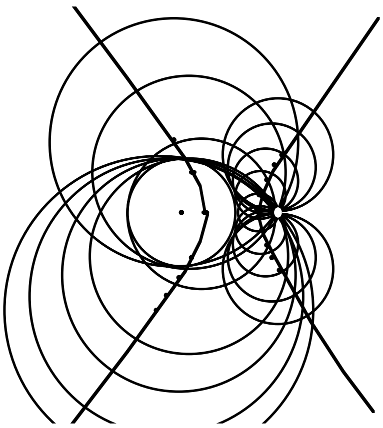
eşitliğini sağlarlar, sağ kolun noktaları ise

$$|PF'| - |PF| = 2a$$

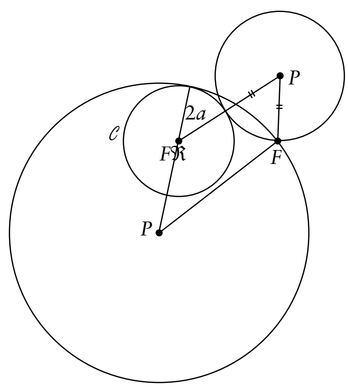
eşitliğini.

$|FF'|$ uzaklığına ***odak uzaklığı*** adı verilir. Eğer $|FF'| = 2c$ yazarsak, PFF' üçgeninin varlığı $c > a$ eşitsizliğini gerektirir.

Teorem. *Verilmiş bir çembere teğet olan ve bu çember dışında verilmiş bir noktadan geçen çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri bir hiperboldür. Ayrıca her hiperbol böyle elde edilir.*



Kanıt: Verilen çembere $\mathcal{C}$, noktaya F adlarını verelim. $\mathcal{C}$'nin merkezi F' ve yarıçapı $2a$ olsun. P, çemberin dışında herhangi bir nokta olsun. P merkezli ve F'den geçen bir çember ele alalım. Aşağıdaki şekilden de görüleceği üzere bu çember $\mathcal{C}$'ye iki değişik biçimde teğet olabilir: P'nin F' noktasına F'den daha yakın olup olmamasına göre $\mathcal{C}$ çemberin içinde ya da dışında kalır. Bu iki çemberin teğet olabilmeleri için gerek ve yeter koşul, duruma



göre

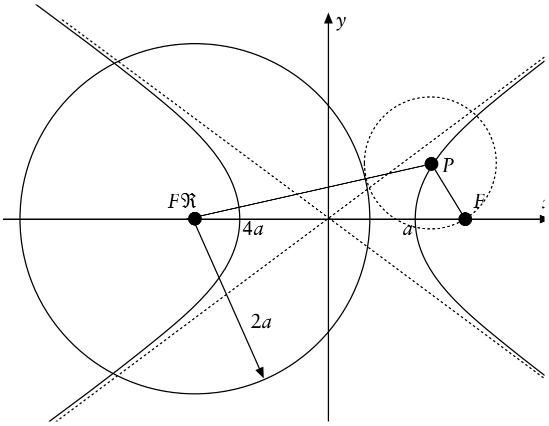
$$|PF'| - |PF| = 2a,$$

ya da

$$|PF| - |PF'| = 2a$$

koşuludur. Demek ki aradığımız geometrik yer, F ve F' odak noktalı ve asal uzunluğu $2a$ olan hiperbolmüş.

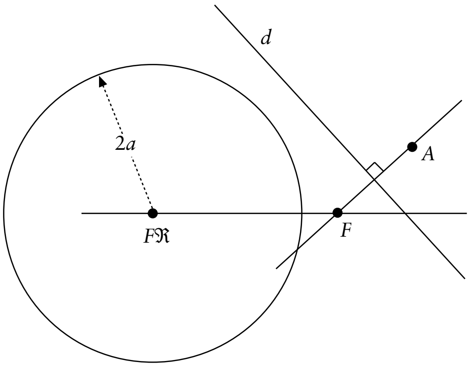
Eğer bir hiperbol verilmişse, bu hiperbolün odak merkezlerinden birinde (diyelim F' merkezlenmiş ve yarıçapı hiperbolün $2a$ sabiti olan çem-



berle diğer odak merkezinin (F) bu özelliği vardır elbette: F'den geçen ve sözkonusu çembere teğet her çemberin merkezi hiperbolün üstündedir. □

Merkezi odaklardan biri, yarıçapı hiperbolün $2a$ sabiti olan çembere ***doğrultman çemberi*** denir.

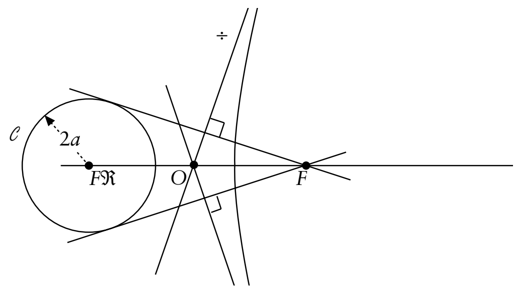
Odakları ve Odak Uzunluğu Belli Olan Bir Hiperbolle Bir Doğrunun Kesişimini Bulmak. Odaklara her zaman olduğu gibi F ve F' diyelim. Doğruya d diyelim. F' merkezli $\mathcal{C}$ doğrultman çemberini çizelim. Hiperbolle d doğrusunun kesişim noktaları, biraz önce gördüğümüz gibi, F'den geçen ve $\mathcal{C}$ çemberine teğet çemberlerin merkezleridir. Demek ki merkezi d doğrusu üstünde olan, F'den geçen ve



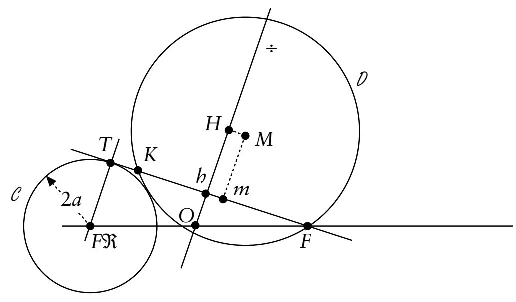
$\mathcal{C}$ çemberine teğet bir çember bulmalıyız. Böyle bir çember F'nin d'ye göre simetriği olan A noktasından da geçer. Demek ki A ve F noktalarından geçen ve $\mathcal{C}$ çemberine teğet bir çember bulmalıyız. Bunu geçen sayımızda (sayfa 44) yapmıştık.

Asimptotları Çizmek. Hiperbolün iki asimptotu olduğunu geçen sayımızda görmüştük. Bu asimptotları çizebiliriz. Çizelim. Savımız şu:

Teorem. *Merkezi odak noktalarından biri olan doğrultman çembere diğer odak noktasından çekilen teğete hiperbolün merkezinden geçen dik doğru hiperbolün asimptotlarından biridir.*



Kanıt: Hiperbolün odak noktalarına F ve F' diyelim. F' merkezli doğrultman çemberi $\mathcal{C}$ olsun. Hiperbolün merkezine, yani F ve F' noktalarının orta noktasına O diyelim. F'den $\mathcal{C}$ çemberine çizilen teğet $\mathcal{C}$ çemberini T noktasında kessin. O'dan FT'ye çizilen dik doğruya da ÷ adını verelim. ÷'nin hiperbolün bir asimptotu olduğunu göstereceğiz.



÷'nın FT doğrusunu kestiği noktaya h diyelim. Hem $F'T$ hem de ÷ doğruları FT'yi dik kestiklerinden birbirlerine paraleldirler. Dolayısıyla, h noktası FT'nin orta noktasıdır.

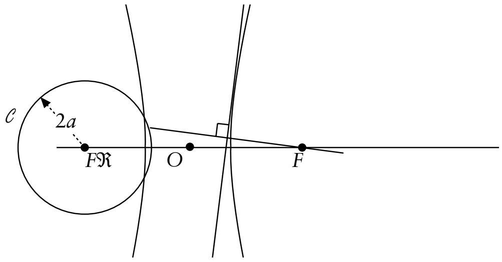
Hiperbolün üstünde herhangi bir M noktası alalım. M merkezli ve MF yarıçaplı çembere $\mathcal{D}$ diyelim. $\mathcal{D}$'nin $\mathcal{C}$'ye teğet olduğunu biliyoruz. $\mathcal{D}$ çemberinin FT doğrusunu kestiği diğer noktaya K diyelim. M'nin TF ve ÷ doğruları üstündeki izdüşümlerine sırasıyla m ve H diyelim. mh'nin uzunluğu KT'nin uzunluğunun yarısı kadardır, çünkü,

$$KT = FT \, 4 \, FK = 2hF \, 4 \, 2Fm = 2hm.$$

M noktası sonsuza doğru gittiğinde, F ve T noktaları yerlerinde kaldıklarından, K noktası T'ye (ve $\mathcal{D}$ çemberi giderek büyüyerek ve FT civarında yassılaşıp FT doğrusuna) yakınsar. Dolayısıyla TK uzunluğu, dolayısıyla yarısı olan hm uzunluğu da 0'a yakınsarlar. Demek ki ÷ doğrusu hiperbolün asimptotuymuş. □

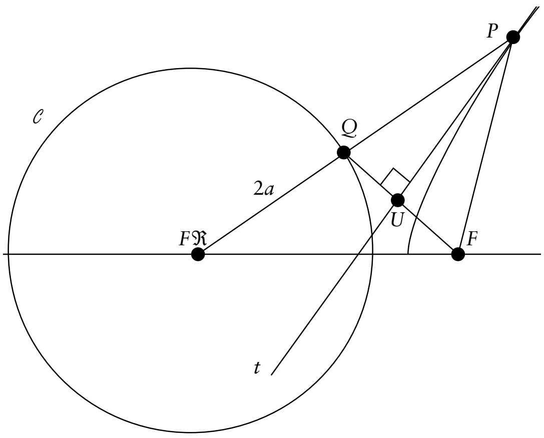
Geçen sayımızda elips için kanıtladığımız bir önermenin (sayfa 48, Teorem 2) benzerini hiperboller için kanıtlayacağız.

Teorem. *Bir hiperbolde, bir odağın teğetlere göre (asimptotlar dahil!) simetrilerinin geometrik yeri, diğer odağa ait doğrultman çemberidir. Ayrıca eğer P hiperbol üstünde bir noktaysa ve $PF\mathfrak{R}$ doğrusu $F\mathfrak{R}$ merkezli doğrultman çemberini Q noktasında kesiyorsa, t doğrusu QF doğru parçasının orta dikmesidir.*



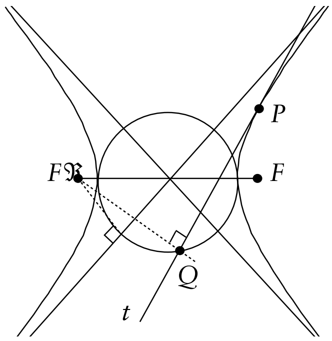
Kanıt: Hiperbolün odaklarına F ve $F\mathfrak{R}$ sabitine de $2a$ diyelim. $\mathcal{C}$, $F\mathfrak{R}$ merkezli $2a$ yarıçaplı doğrultman çemberi olsun. P hiperbolün üstünde bir nokta olsun. $PF\mathfrak{R}$ doğrusu C çemberini Q noktasında kessin. t, FQ doğru parçasının ortadikmesi olsun.

$F\mathfrak{R} \, 4 \, QP = FQ = 2a = F\mathfrak{R} \, 4 \, FP$ olduğundan, $QP = FP$. Demek ki QFP bir ikizkenar üçgen. Dolayısıyla Q ve F noktaları t doğrusuna göre simetriktirler.

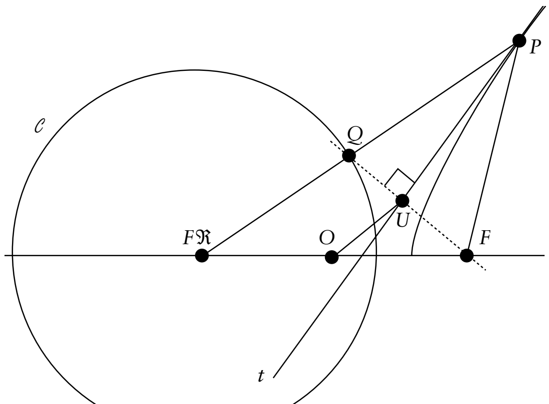


Şimdi t'nin hiperbole teğet olduğunu, yani hiperbolü sadece P noktasında kestiğini kanıtlayalım. t hiperbolü bir de ayrıca $P\mathfrak{R}$ noktasında kessin. $P\mathfrak{R}F\mathfrak{R}$ doğrusu $\mathcal{C}$ çemberini $Q\mathfrak{R}$ noktasında kessin. O zaman aynen P için olduğu gibi, $P\mathfrak{Q}\mathfrak{R} = P\mathfrak{R}F$ olur. Dolayısıyla, $P\mathfrak{Q} = P\mathfrak{F} = P\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ Ama $P\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ doğrusu $\mathcal{C}$ çemberinin merkezinden geçtiği için, $P\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ uzunluğu $P\mathfrak{R}$ noktasının $\mathcal{C}$ çemberine olan mesafedir. Bu ve $P\mathfrak{Q} = P\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ eşitliği $Q = Q\mathfrak{R}$ eşitliğini verir. Demek ki $P = P\mathfrak{R}$ □

Teorem. *Bir hiperbolde, odakların teğetler ve asimptotlar üzerindeki izdüşümlerinin geometrik yeri merkezi hiperbolün merkezi ve yarıçapı a olan çemberdir.*

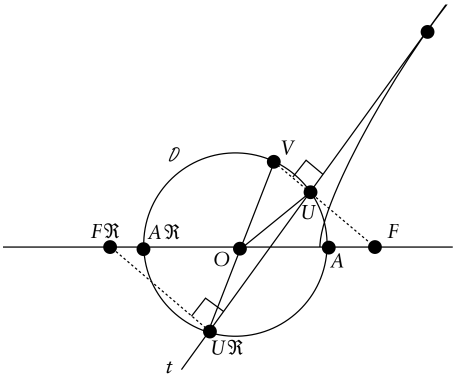


Kanıt: Bir önceki teoremdeki şekilden devam edelim. U, t ile QF'nin kesişimi olsun. $QU = UF$ ve $F\mathfrak{D} = OF$ eşitliklerinden OU ve $F\mathfrak{Q}$ doğrularının birbirlerine paralel oldukları çıkar. Demek ki OUF



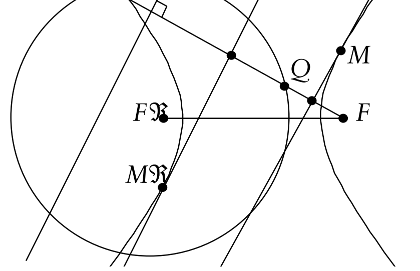
üçgeni $F\mathfrak{Q}F$ üçgeninin yarısı. Yani $OU = F\mathfrak{Q}/2 = 2a/2 = a$. Demek ki hiperbolün noktalarının teğetlere izdüşümleri merkezi hiperbolün merkezi ve yarıçapı a olan çemberdir. Kanıtın geri kalan kısmı okura bırakılmıştır. □

Teorem. *Bir hiperbolde odakların teğete (ya da asimptotlara) olan uzaklıklarının çarpımı bir sabittir, c^2 4 a^2'ye eşittir.* (2*c* = *odakların uzaklığı*)



Kanıt: Bir önceki teoremdeki şekilden devam edelim. *U*ℜ*F*ℜodak noktasının *t* üzerine izdüşümü olsun. *U* ve *U*ℜnoktalarının O merkezli *a* yarıçaplı *D* çemberinin üstünde olduklarını biliyoruz. *FU*'yu *D* çemberini bir *V* ∏ *U* noktasında kesecek kadar uzatalım. *U*ℜ*VU* üçgeni *U* köşesinde dik olduğunu önceki teoremlerden biliyoruz. Demek ki *U*ℜ*V* doğrusu O'dan geçer. Bundan da *F*ℜ*U*ℜ*O* üçgeninin *FVO* üçgenine eşit olduğu çıkar. Demek ki *F*ℜ*U*ℜ= *FV* ve *F*ℜ*U*ℜ∆ *FU* = *FB* ∆#*FA* = |ϕ(*F*, *D*)| (= *F*'nin *D* çemberine göre gücünün mutlak değeri, bkz. MD-2005-II, sayfa 40). Şimdi ϕ(*F*, *D*) sayısını hesaplayalım: ϕ(*F*, *D*) = |*FA*| ∆#*FA*ℜ= c^2 4 a^2. Sonucumuz kanıtlanmıştır. □

Bir Hiperbole Verilen Bir Yönde Teğet Çizmek. Verilen yön *d* doğrusuyla belirlenmiş olsun. Dikkat: Eğer *d*'nin eğimi iki asimptotun eğimleri arasındaysa çözüm yoktur, böyle bir teğet bulunamaz. Eğer *d*'nin eğimi asimptotların eğimine eşitse, o zaman "sonsuzda teğet"i asimptot olarak algılarsak asimptot buluruz. Diğer durumlarda iki değişik çözüm bulacağız. *F* odak noktasından *d*'ye bir dik çıkalım. Bu dik *F*ℜmerkezli doğrultman çemberini bir *Q* noktasında kessin. *FQ*'nün orta dikmesi aranan teğettir. Bunun kanıtı bu aşamada kolaydır ve okura bırakılmıştır.



Okur alıştırma olarak, paralel iki teğetin *M* ve *M*ℜdeğme noktalarının hiperbolün *O* merkezine göre simetrik olduklarını kanıtlayabilir.

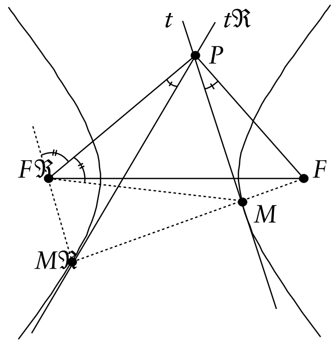
Hızını alamayan okur verilen bir hiperbole verilen bir noktadan nasıl teğet çizilebileceği üzerine düşünebilir.

Şimdi hiperbol için Poncelet Teoremleri'ne geçelim.

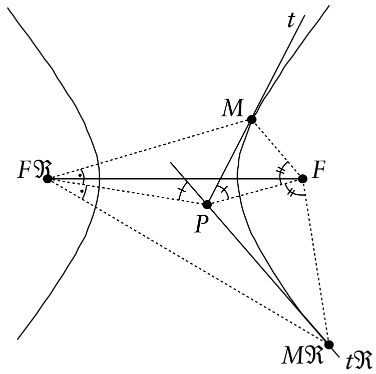
Poncelet Teoremleri. *Bir hiperbolün dışından alınan bir P noktasından hiperbole PM ve PM*ℜ*teğetlerini çizelim. Teğetlerin değme noktaları M ve M*ℜ*olsun.*

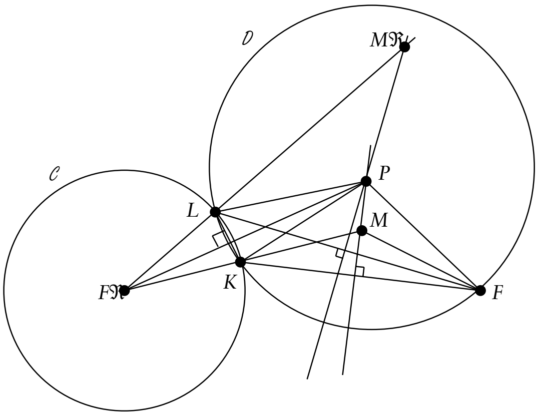
1) *FPM* ve *F*ℜ*PM*ℜ*açıları ya birbirine eşittir ya da birbirlerini bütünler.*

2) *Bir odaktan PM ve PM*ℜ*teğet parçaları eşit veya birbirini bütünler açılar altında görülür.*



Kanıt: İki değişik durum zuhur edebilir. *P* noktası asimptotlar tarafından belirlenen 4 bölgeden hiperbolü içeren ikisinin içinde olup olmamasına göre, teğetlerin değme noktaları hiperbolün aynı ya da iki değişik kolunda olabilir. Bu durumlardan biri yukardaki, diğeri aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.





*F*ℜ merkezli doğrultman çemberine 𝒞 diyelim. *F*ℜ*M*, 𝒞'yi *K*'de kessin. *F*ℜ*M*ℜ'de 𝒞'yi *L*'de kessin. *PM* teğetinin *KF* doğru parçasının, *PM*ℜ teğetinin de *FL* doğru parçasının ortadikmeleri olduklarını biliyoruz. Dolayısıyla $|PK| = |PF| = |PL|$. Şimdi *P* merkezli ve *PF* yarıçaplı 𝒟 çemberini çizelim. Bu çember 𝒞'yi *K* ve *L* noktalarında keser. *F*ℜ*P* doğrusu 𝒟 ve 𝒞 çemberlerinin merkezlerinden geçen doğru olduğundan, bu çemberlerin *KL* ortak kirişine diktir. Ayrıca *PM* ve *KF* doğruları da birbirlerine dikler. Demek ki *FKL* ve *MPF*ℜ açılarının kenarları dik ve dolayısıyla ölçüleri ya aynıdır ya da birbirlerini 180 dereceye bütünlerler. Öte yandan 𝒟 çemberi *K* ve *L* noktalarından geçtiğinden, *FPL* açısının ölçüsü (açılar saatin ters yönünde gider) *FKL* açısının ölçüsünün yarısıdır. Ama *PM*ℜ doğrusu *FPL* açısının açıortayıdır. Demek ki *FPM*ℜ açısıyla *FKL* açısının ölçüleri aynıdır. Bundan, *FPM*ℜ ve *MPF*ℜ açılarının ya aynı ya da birbirlerini 180 dereceye bütünledikleri çıkar. Birinci kısım kanıtlandı.

Dikkat edilirse, elips için geçen sayımızda verdiğimiz kanıtla kelimesi kelimesine aynı [MD-2005-II, sayfa 51], yalnızca şekiller değişik!

İkinci kısmın kanıtı da aynıdır ve okura bırakılmıştır. □

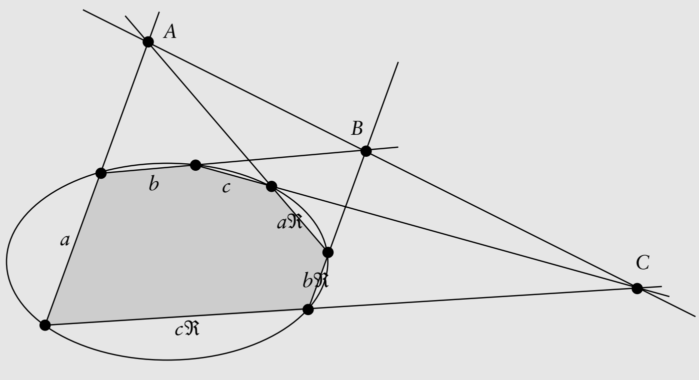
Bu tür teoremleri kanıtlamada en zor kısım doğru düzgün bir şekil çizmektir. Bu yüzden şekil tam çizilmemeli! Konik problemlerinde okurun konik yerine koniğin sadece odak noktalarını ve belki de bir noktasını ya da bir teğetini ya da $2a$ uzunluğunu çizmesini salık veririz. Yoksa teğeti teğet yapmak, dikaçıları dik tutturmak nerkeyse imkânsız oluyor.

Aşağıdaki teoremlerin de kanıtı elipste olduğu gibidir.

Teorem. *Bir hiperbolün sabit iki teğeti tarafından değişken bir teğeti üzerinde ayrılan doğru parçası her odaktan sabit bir açı altında görülür.*

Teorem. *Kenarları verilmiş bir hiperbole teğet olan dik açıların köşelerinin geometrik yeri merkezi hiperbolün merkezinde ve yarıçapı* $(2a^2\ 4\ c^2)^{1/2}$ *olan çemberdir.* (*Dikkat*: $2a^2\ 4\ c^2 < 0$ *ise, çember imgeseldir.*) ♦

Pascal Teoremi



Teorem. *Köşeleri herhangi bir koniğin üstünde bulunan bir altıgenin karşılıklı kenarlarının üç kesişim noktası doğrusaldır.*