

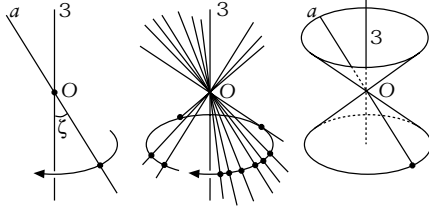


Kapak Konusu: Poncelet Teoremleri

Koninin Düzlemlerle Kesişimi

Selçuk Demir* / sdemir@bilgi.edu.tr

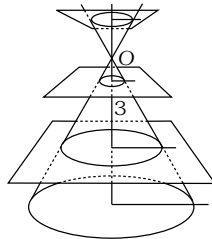
Koni. Uzayda birbirini $0 < \zeta < 90^\circ$ derecede kesen iki değişik a ve \mathfrak{Z} doğrusu alalım. Doğruların birini diğerinin etrafında, diyelim a 'yı \mathfrak{Z} 'nin etrafında oluşturdukları ζ açısını bozmadan döndürelim. Böylece elde edilen yüzeye **dik koni** ya da **döndürü konisi** adı verilir, kolaylık olsun diye biz sadece "**koni**" diyeceğiz.



Şekilde, a doğrusu \mathfrak{Z} doğrusu etrafında döndürülerek elde edilen dik koni görülüyor.

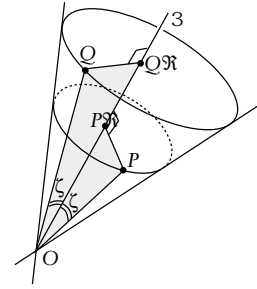
İki doğrunun kesişim noktasına **koninin merkezi**, sabit \mathfrak{Z} doğrusuna **koninin eksenini**, koninin yüzeyindeki doğrulara **koninin yüzey doğruları** ya da **koniyi geren doğrular** denir. Koniyi geren doğrular eksen etrafında dönerek gerçekten koniyi gererler. Yüzey doğruları koninin \mathfrak{Z} eksenine hep aynı derecede açıda (resimde ζ) kesişirler; bu açıya **koninin açısı** denir.

Koninin eksenine dik olan her düzlem koniyi bir çemberde keser elbet. Bu çemberlerin yarıçapları üstünde buldukları düzlemin O noktasından uzaklığına göre 0 'dan sonsuza kadar değişir.



Bu yazıda bir koninin herhangi bir düzlemlerle kesişiminin ne tür eğriler olduklarını bulacağız.

Geometrik Yer Olarak Koni. Koninin merkezine O diyelim. Koninin yüzeyinden herhangi bir P noktası alalım. P 'nin koninin \mathfrak{Z} eksenine olan izdüşümüne $P\mathfrak{R}$ diyelim. Tales Teoremi'nden dolayı, ko-



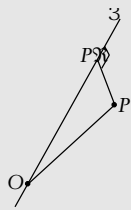
ninin yüzeyinden alınan P noktası ne olursa olsun, elde edilen tüm $OPP\mathfrak{R}$ üçgenleri birbirine benzer üçgenlerdir, dolayısıyla $|PP\mathfrak{R}|/|OP|$ oranı her zaman bir sabittir, yani koninin yüzeyinden alınan P noktasından bağımsızdır. $|PP\mathfrak{R}|$ sayısının P 'nin \mathfrak{Z} doğrusuna olan mesafesi ve $|OP|$ sayısının P 'nin O noktasına olan mesafesi olduğunu düşünürsek, koninin, bir doğruya (\mathfrak{Z} 'ye) ve bu doğru üstündeki bir noktaya (O 'ya) olan uzaklıklarının oranının sabit olduğu noktalar kümesi olduğunu görürüz.

Koninin Geometrik Tanımı

\mathbb{R}^3 uzayında bir \mathfrak{Z} doğrusu ve bu doğru üstünde bir O noktası verilmiş olsun. Eğer $P \in \mathbb{R}^3$ ise, $d(P, \mathfrak{Z})$, P noktasıyla \mathfrak{Z} doğrusu arasındaki en kısa mesafe olsun. $d(P, O)$ da, P ile O arasındaki mesafe olsun. Ayrıca bir $s > 0$ sayısı verilmiş olsun.

$$\{P \in \mathbb{R}^3 : d(P, \mathfrak{Z}) = s \cdot d(P, O)\}$$

kümesi bir konidir ve tüm koniler bu türden bir kümedir.



Sadece $|PP\mathfrak{R}|/|OP|$ oranı değil, $|PP\mathfrak{R}|/|OP\mathfrak{R}|$ oranı da sabittir. Bu pozitif sabite r dersek,

$$|PP\mathfrak{R}| = r |OP\mathfrak{R}|$$

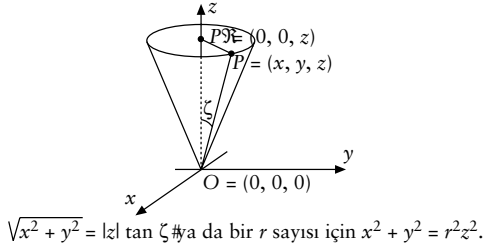
denklemini buluruz. Bu formülü koninin geometrik denklemi olarak algılayabiliriz.

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.

Koninin Cebirsel Denklemi. Koninin cebirsel bir denklemi yukarıda bulduğumuz $|PP\mathfrak{K}| = r|OP\mathfrak{K}|$ denkleminin hareketle elde edilebilir. Bu denklemin karesini alalım:

$$|PP\mathfrak{K}|^2 = r^2|OP\mathfrak{K}|^2.$$

Şimdi koninin ekseninin uzayın z eksenini ve merkezinin de $(0, 0, 0)$ noktası olduğunu varsayalım. Herhangi bir koni, bir öteleme ve bir döndürüyle bu konuma getirilebilir. O zaman, şekilden de gö-



rüleceği üzere, eğer P noktasının koordinatları (x, y, z) ise, $P\mathfrak{K}$ noktasının koordinatları $(0, 0, z)$ 'dir ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned} |PP\mathfrak{K}| &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ |OP\mathfrak{K}| &= z^2 \end{aligned}$$

dir. Bundan da,

$$x^2 + y^2 = r^2 z^2$$

denklemi bulunur. İşte bu, $(0, 0, 0)$ merkezli ve eksenini z eksenini olan konilerin cebirsel denklemleridir.

Koniyle Düzlemlerin Kesişimi. Bir koniyle uzaydaki düzlemleri kesiştirelim ve bu kesişimle elde ettiğimiz eğrileri anlamaya çalışalım.

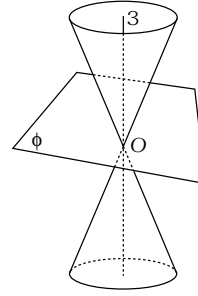
Koniyi sabitleyelim ve koniyle kesiştireceğimiz düzleme ϕ adını verelim. ϕ değiştiğinde sabitlenen koniyle kesişimin nasıl bir eğri olduğunu bulacağız.

Bu kesişim eğrisi ϕ düzlemine göre değişir elbette ama hiçbir zaman boşküme olmaz, çünkü koninin yüzeyi "her iki tarafa doğru" sonsuza kadar genişleyerek gider.

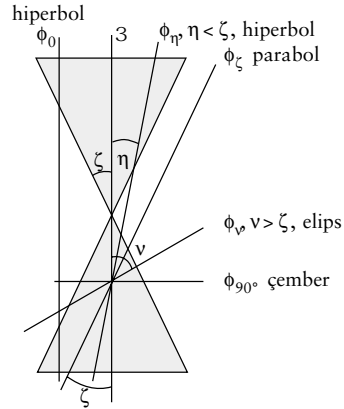
Önce ϕ düzleminin O noktasını içerdiği durumlara bakalım, bunların çözümlenmesi oldukça kolay:

1. Eğer ϕ düzlemi, O noktasıyla birlikte koninin yatay doğrularından birini içeriyorsa, o zaman kesişim, aşağıdaki şekillerde görüldüğü gibi bir ya da iki yüzey doğrusudur; eğer düzlem koninin yüzüne teğetse kesişim tek bir doğrudur, yoksa iki doğrudur.

2. Eğer ϕ düzlemi O noktasını içeriyorsa ama koninin bir yüzey doğrusunu içermiyorsa, o zaman kesişimde sadece O noktası vardır. Solda bu durum resmedilmiştir.



Bundan böyle ϕ düzleminin koninin merkezi olan O noktasını içermediğini varsayalım. Bu durumda ϕ düzleminin koninin eksenini kestiği açının büyüklüğüne göre aşağıda teker teker ele alacağımız üç şık belirir. Bir sonraki şekilde durum özetleniyor. Şekilde, üç boyutlu uzaydaki nesnelerin sayfanın bulunduğu düzlemle kesişimi gösterilmiştir:

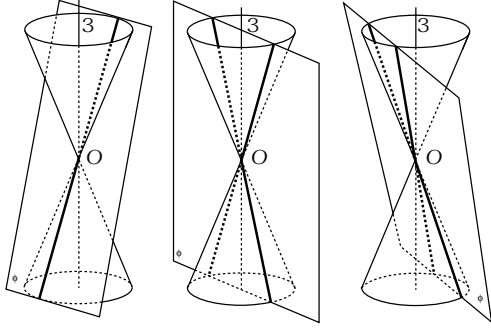


Koninin "tam cepheden" kesitleri. $\phi_0, \phi_\eta, \phi_\zeta, \phi_\nu, \phi_{90}$ düzlemleri koninin z eksenini sırasıyla $0 < \eta < \zeta < \nu < 90$ derecelik açılarda kesiyor. ϕ_0 ve ϕ_η düzlemlerinin koniyle kesitleri birer hiperbol. ϕ_ζ 'nin kesiti bir parabol, ϕ_ν 'nin kesiti bir elips, ϕ_{90} 'in kesiti ise bir tür elips olan çember.

3. **Düzlem, koninin z eksenini, koninin ζ açısından daha büyük bir açıda keser.** Düzlemin koninin z eksenine dik olduğu durum bu şıkkın özel bir halidir; bu özel durumda kesişimin bir çember olduğunu biliyoruz, yazının birinci sayfasında görmüştük bunu. Düzlemin, koninin z eksenini, koninin ζ açısından daha büyük bir açıda kestiği durumda kesişim, daha sonra kanıtlayacağımız üzere eliptir.

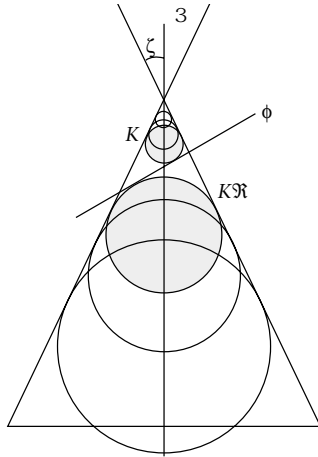
4. **Düzlem, koninin z eksenini koninin ζ açısından daha küçük bir açıda keser.** Düzlemin z eksenine paralel olduğu durum (0 derecelik açı) bu şıkkın özel bir halidir. Bu durumda kesişim bir hiperboldür. Kesişimin hiperbol olması için düzlemin koninin her iki "tarafını" da kesmesi gerekir.

5. **Düzlem koninin bir yüzey doğrusuna paraleldir.** Yani düzlem z eksenini koninin ζ açısına eşit açıda keser. Bu durumda kesişim bir paraboldür.



Şimdi yukarıda resmettiğimiz bu üç durumu teker teker ele alalım.

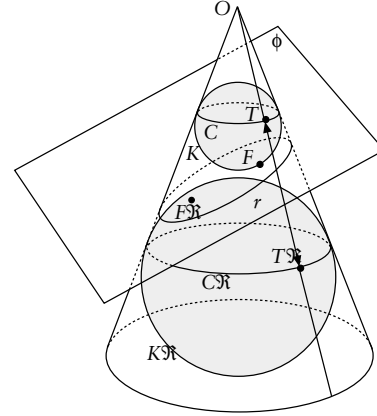
3. Düzlem, koninin 3 eksenini, koninin ζ açısından daha büyük bir açıda kesiyorsa. Düzleme ϕ adını verelim. Koninin içine tam sığan (yani koninin içinde ve koniye bir çemberde teğet) ve ayrıca bir de ϕ düzlemine teğet, biri düzlemin bir tarafında, diğeri diğer tarafında olmak üzere tam iki tane küre vardır. Bu kürelere K ve $K\mathfrak{R}$ adını verelim. Aşağıdaki şekilde bu kürelerin bir kesiti gösterilmiştir.



K ve $K\mathfrak{R}$ kürelerinin koniye teğet oldukları çemberlere sırasıyla C ve $C\mathfrak{R}$ adını verelim. (Bkz. yan sütunun tepesindeki şekil.) Koninin herhangi bir yüzey doğrusunu alalım ve bu doğrunun C ve $C\mathfrak{R}$ çemberlerini (dolayısıyla K ve $K\mathfrak{R}$ kürelerini de) kestikleri noktalara sırasıyla T ve $T\mathfrak{R}$ diyelim. $|TT\mathfrak{R}| = r$ olsun.

Bu r uzunluğu seçilen $TT\mathfrak{R}$ yüzey doğrusundan bağımsızdır, sadece ϕ düzlemine ve koniye göre değişir. Nitekim r sayısı C ve $C\mathfrak{R}$ çemberlerinin birbirine en yakın iki noktası arasındaki mesafedir.

Son olarak, K ve $K\mathfrak{R}$ kürelerinin ϕ düzlemine teğet olduğu noktalara sırasıyla F ve $F\mathfrak{R}$ adını verelim. Bu noktalara F ve $F\mathfrak{R}$ adını vermiş olmamız niyetimiz konusunda okura ipucu vermeli.



Koniyle ϕ düzleminin kesişiminin tam olarak $\{P \in \phi : |PF| + |PF\mathfrak{R}| = r\}$

kümesi olduğunu, yani odak noktaları F ve $F\mathfrak{R}$ ve asal uzunluğu r olan bir elips olduğunu savlayıp hemen kanıtı geçiyoruz. Eğer $F = F\mathfrak{R}$ ise, F merkezli bir çember elde ederiz elbette, bu da ancak ϕ düzlemi yataysa mümkündür.

Kanıtımıza başlayalım.

P , ϕ düzlemiyle koninin kesişiminden alınan herhangi bir nokta olsun. Aşağıdaki şekilden izleyelim. Koninin OP yüzey doğrusunu çizelim. Bu doğru C ve $C\mathfrak{R}$ çemberlerini (dolayısıyla K ve $K\mathfrak{R}$ kürelerini de) sırasıyla S ve $S\mathfrak{R}$ noktalarında kessin. Hem PS hem de PF doğrusu K küresine teğettir (çünkü PF doğru parçası, K küresine teğet olan ϕ düzleminde.) Demek ki

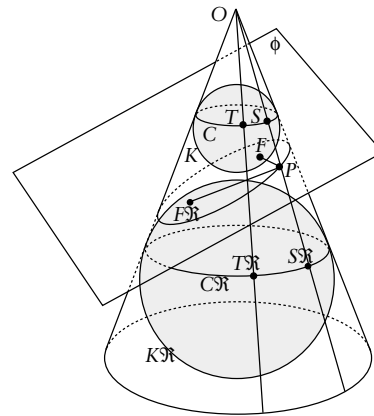
$$|PS| = |PF|.$$

Benzer biçimde,

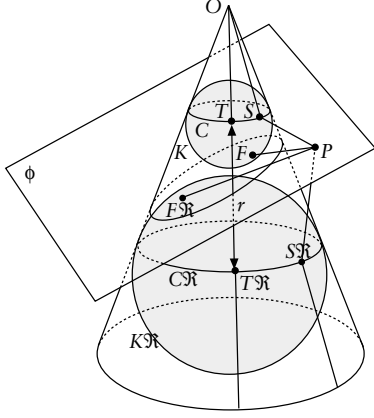
$$|PS\mathfrak{R}| = |PF\mathfrak{R}|$$

Bu iki eşitliği altalta toplarsak,

$|PF| + |PF\mathfrak{R}| = |PS| + |PS\mathfrak{R}| = |PT| + |PT\mathfrak{R}| = |TT\mathfrak{R}| = r$ buluruz.



Bunun tersi de doğrudur: Eğer $P \in \mathbb{K}$,
 $|PF| + |PF\mathfrak{R}| = r = |TT\mathfrak{R}|$
 eşitliğini sağlıyorsa, o zaman P noktasının koninin
 üstünde olduğunu kanıtlayalım. S noktası, C çembe-



rinin P 'ye en yakın noktası olsun. $S\mathfrak{R}$ noktası da $C\mathfrak{R}$
 çemberinin üstünde aynı görevi görsün. O zaman,

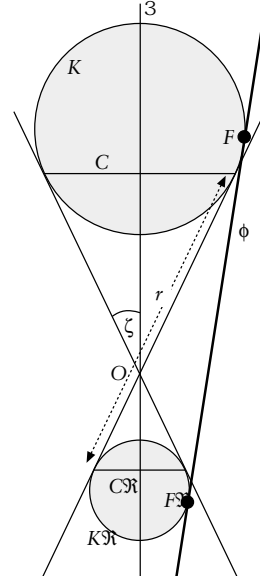
$$|PF| + |PF\mathfrak{R}| = r = |TT\mathfrak{R}| \leq |SS\mathfrak{R}| \leq |PS| + |PS\mathfrak{R}|$$

$$\leq |PF| + |PF\mathfrak{R}|$$

($|PS| \leq |PF|$, çünkü P 'den geçen bir doğrunun küreyi kestiği iki noktadan P 'ye en yakın olanının P 'ye olan uzaklığı, P 'den geçen ve küreye teğet olan doğrunun küreye değim noktasının P 'ye olan uzaklığından daha küçüktür; sezgisel olarak da doğruluğu çok bariz olan bu olgu, bir noktanın bir çembere göre gücü [MD-2005-II, sayfa 40-44] kullanılarak kolaylıkla kanıtlanabilir.) Dolayısıyla $|SS\mathfrak{R}| = |PS| + |PS\mathfrak{R}| = |TT\mathfrak{R}|$ Demek ki $SS\mathfrak{R}$ iki çember arasındaki en kısa mesafedir. Ayrıca, bu eşitliklerden, P noktasının $SS\mathfrak{R}$ doğru parçasının üstünde, $SS\mathfrak{R}$ doğru parçasının da koninin üstünde olduğu çıkar. Demek ki P noktası da koninin üstünde. Kanıtımız bitmiştir.

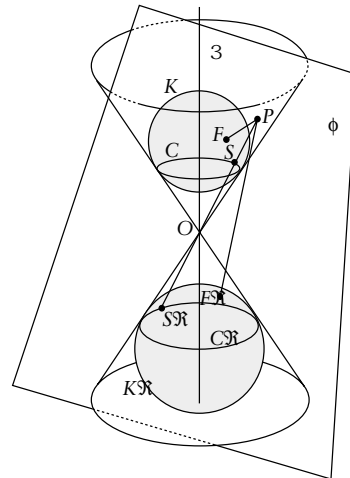
Burada bir de odak noktalarının nasıl bulunacağını gösterdik: Kürelerle düzlemin teğet noktaları. Bu sonuca Dandelin ve Quételet Teoremi adı verilir.

4. Düzlem, koninin 3 eksenini ζ 'dan daha küçük bir açıda kesiyorsa. Kanıtımız aynen yukardaki gibi olacak, bir önceki şıkla aynı inşaatı yapacağız. Sağ sütundaki şekillerden takip edin. Koniye cuk oturan, yani koniye bir çemberde teğet olan kürelerden ikisi ayrıca düzleme de teğettir. Bir önceki şıkkın tersine bu iki küre bu sefer düzlemin aynı tarafında yer alırlar. Bu kürelere K ve $K\mathfrak{R}$ diyelim. Kürelerin koniyle kesişimi olan çemberlere de sırasıyla C ve $C\mathfrak{R}$ diyelim. (Bkz. sağ sütundaki ikinci şekil.) F



ve $F\mathfrak{R}$ noktaları, bir önceki şıkta olduğu gibi gene K ve $K\mathfrak{R}$ kürelerinin düzlemlerle kesişim noktaları olsun, bu sırayla elbet. C ve $C\mathfrak{R}$ çemberleri arasındaki "çapraz mesafe" (yani O 'dan geçen en kısa yolun uzunluğu) r olsun. Demek ki, C çemberinde alınan herhangi bir S noktası için, $SS\mathfrak{R}$ OS doğrusuyla $C\mathfrak{R}$ çemberinin kesişim noktasıysa, $r = |SS\mathfrak{R}|$ dir.

Şimdi P , düzlemlerle koninin kesişiminden alınmış herhangi bir nokta olsun. PF ve $PF\mathfrak{R}$ doğruları, düzlemlerde olduklarından, küreye F ve $F\mathfrak{R}$ noktalarında teğettirler. PO doğrusunu çizelim. Bu doğru koninin bir yatay doğrusudur ve C ve $C\mathfrak{R}$ çemberlerini keser, bu kesişim noktalarına sırasıyla S ve $S\mathfrak{R}$ diyelim. PS ve $PS\mathfrak{R}$ doğruları da K ve $K\mathfrak{R}$ kürelerine S ve $S\mathfrak{R}$ noktalarında teğetler. Demek ki $|PS| = |PF|$ ve $|PS\mathfrak{R}| = |PF\mathfrak{R}|$ Dolayısıyla,



ϕ düzlemiyle koninin kesişimi olan eğriyi (hiperbolü) çizemedik, çok zor geldi.

$$\|PF\| + \|PS\| = \|PT\| + \|PS\| = \|TT'\| = r.$$

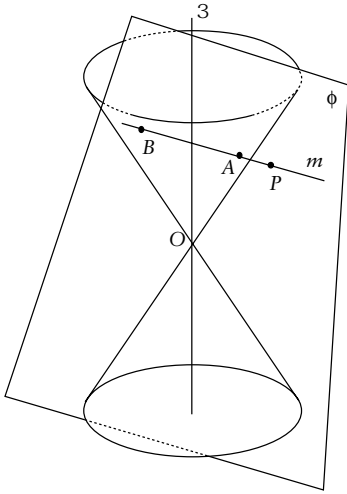
Böylece koniyle düzlemin kesişiminin,

$$\{P \in \mathbb{K} : \|PF\| + \|PS\| = r\}$$

kümesinin bir altkümesi olduğunu göstermiş olduk. Bu kümeye H diyelim:

$$H = \{P \in \mathbb{K} : \|PF\| + \|PS\| = r\}.$$

Demek ki $K \sim \mathbb{K} \cong H$. Tersini, yani $H \cong \mathbb{K} \sim K$ ilişkisini göstermek kaldı. Tuhaf bir biçimde $H \cong \mathbb{K} \sim K$ ilişkisinin kanıtına kaynaklarda rastlayamadık. Elips şikkında da kanıtın bu kısmı gördüğümüz kadarıyla atlanmış.

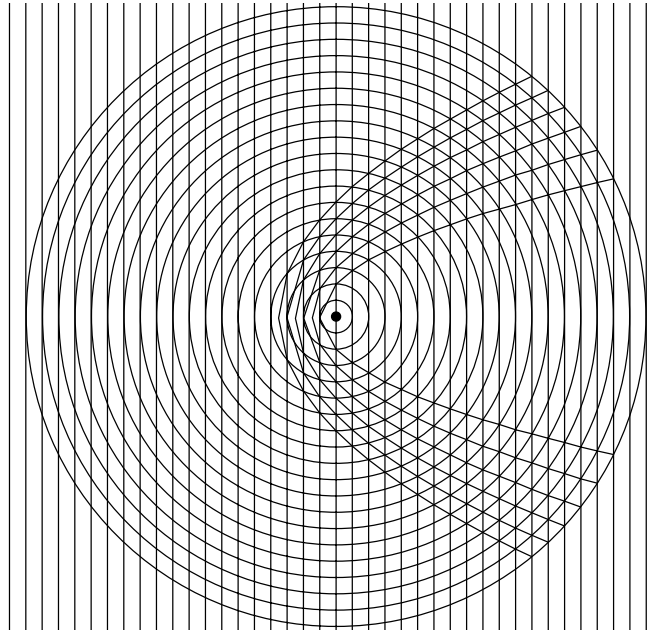


Bu arada H kümesinin ϕ düzlemi üstünde bir hiperbol olduğuna dikkatinizi çekerim.

$P \in H$ olsun. Demek ki $P \in \phi$. P 'nin koninin üstünde olduğunu göstereceğiz. ϕ düzlemi üstünde koninin bir yüzey doğrusuna paralel sadece iki doğru olabilir, çünkü ϕ düzlemini öteleyerek P 'yi O 'ya getirirsek, kaydırılmış ϕ düzlemi koniyi sadece bu iki doğrudan keser. ϕ düzlemi üstünde ve P 'den geçen ama bu iki doğrudan birine eşit olmayan bir ζ doğrusu alalım. ζ doğrusu koniyi iki değişik noktada keser. Bu noktalara A ve B diyelim. A ve B noktaları hem ϕ düzleminde hem de koninin üstünde, dolayısıyla, yukarıda yaptığımızdan, hiperbolün üstündeler. Demek ki A, B ve P noktaları PF doğrusuyla hiperbolün kesişiminde. Ama bir doğruyla bir hiperbol en fazla iki noktada kesişirler. Demek ki P noktası ya A 'ya ya da B 'ye eşit, yani koninin üstünde.

4. Düzlem, koninin 3 eksenini ζ açısıyla kesiyorsa. Bu durumda kesişim bir parabole eşit. Kanıtı okura alıştırmaya bırakıyoruz. ♦

Çember ve doğrularla parabol çizmek



Çemberlerle doğruların kesişimlerini birleştirerek parabol elde edebiliriz. Yukarıdaki parabolün odak noktası çemberlerin ortak merkezidir. Dikey doğrular parabolün doğrultularıdır. Bir parabolün P noktaları odağa ve doğrultuya eşit uzaklıkta olduğundan yukarıdaki parabolün doğrultularını bulabilirsiniz.