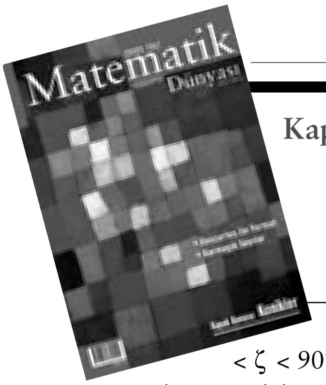
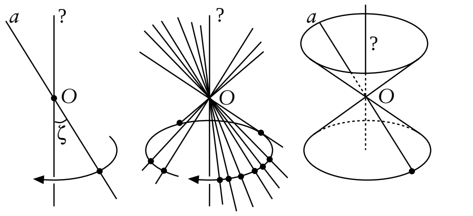


Kapak Konusu: Poncelet Teoremleri

Koninin Düzlemlerle Kesişimi

Selçuk Demir* / *sdemir@bilgi.edu.tr*

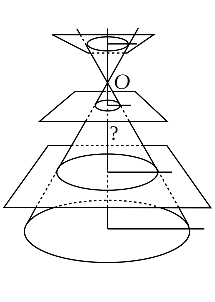
Koni. Uzayda birbirini 0 < ζ < 90° derecede kesen iki değişik *a* ve ? doğrusu alalım. Doğrulardan birini diğerinin etrafında, diyelim *a*'yı ?'nin etrafında oluşturdukları ζ açısını bozmadan döndürelim. Böylece elde edilen yüzeye ***dik koni*** ya da ***döndürü konisi*** adı verilir, kolaylık olsun diye biz sadece "***koni***" diyeceğiz.



Şekilde, *a* doğrusu ? doğrusu etrafında döndürülerek elde edilen dik koni görülüyor.

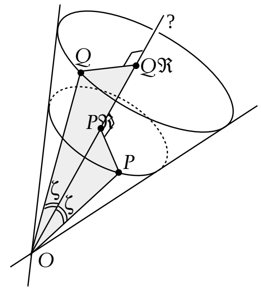
İki doğrunun kesişim noktasına ***koninin merkezi***, sabit ? doğrusuna ***koninin ekseni***, koninin yüzeyindeki doğrulara ***koninin yüzey doğruları*** ya da ***koniyi geren doğrular*** denir. Koniyi geren doğrular eksen etrafında dönerek gerçekten koniyi gererler. Yüzey doğruları koninin ? ekseniyle hep aynı derecede açıda (resimde ζ) kesişirler; bu açıya ***koninin açısı*** denir.

Koninin eksenine dik olan her düzlem koniyi bir çemberde keser elbet. Bu çemberlerin yarıçapları üstünde bulundukları düzlemin *O* noktasından uzaklığına göre 0'dan sonsuza kadar değişir.



Bu yazıda bir koninin herthangi bir düzlemle kesişimnin ne tür eğriler olduklarını bulacağız.

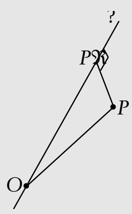
Geometrik Yer Olarak Koni. Koninin merkezine *O* diyelim. Koninin yüzeyinden herhangi bir *P* noktası alalım. *P*'nin koninin ? eksenine olan izdüşümüne *P*ℜdiyelim. Tales Teoremi'nden dolayı, koninin yüzeyinden alınan *P* noktası ne olursa olsun,



elde edilen tüm *OPP*ℜüçgenleri birbirine benzer üçgenlerdir, dolayısıyla |*PP*ℜ|/|*OP*| oranı her zaman bir sabittir, yani koninin yüzeyinden alınan *P* noktasından bağımsızdır. |*PP*ℜsayısının *P*'nin ? doğrusuna olan mesafesi ve |*OP*| sayısının *P*'nin *O* noktasına olan mesafesi olduğunu düşünürsek, koninin, bir doğruya (?'ye) ve bu doğru üstündeki bir noktaya (*O*'ya) olan uzaklıklarının oranının sabit olduğu noktalar kümesi olduğunu görürüz.

Koninin Geometrik Tanımı

' 3 uzayında bir ? doğrusu ve bu doğru üstünde bir *O* noktası verilmiş olsun. Eğer $P \subset$ ' 3 ise, $d(P, ?)$, *P* noktasıyla ? doğrusu arasındaki en kısa mesafe olsun. $d(P, O)$ da, *P* ile *O* arasındaki mesafe olsun. Ayrıca bir $s > 0$ sayısı verilmiş olsun.



{*P* ⊂ ' 3 : $d(P, ?) = s \cdot d(P, O)$}

kümesi bir konidir ve tüm koniler bu türden bir kümedir.

Sadece |*PP*ℜ|/|*OP*| oranı değil, |*PP*ℜ|/|*OP*ℜoranı da sabittir. Bu pozitif sabite *r* dersek,

|*PP*ℜ= *r*|*OP*ℜ

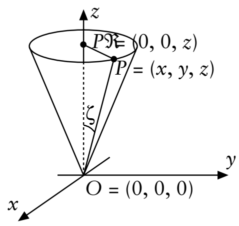
denklemini buluruz. Bu formülü koninin geometrik denklemi olarak algılayabiliriz.

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.

Koninin Cebirsel Denklemi. Koninin cebirsel bir denklemi yukarda bulduğumuz $|PP'| = r|OP'|$ denklemininden hareketle elde edilebilir. Bu denklemin karesini alalım:

$$|PP'|^2 = r^2|OP'|^2.$$

Şimdi koninin ekseninin uzayın z ekseni ve merkezinin de (0, 0, 0) noktası olduğunu varsayalım. Herhangi bir koni, bir öteleme ve bir döndürüyle bu konuma getirilebilir. O zaman, şekilden de gö-



$\sqrt{x^2 + y^2} = |z| \tan \zeta$ ya da bir r sayısı için $x^2 + y^2 = r^2z^2$.

rüleceği üzere, eğer P noktasının koordinatları (x, y, z) ise, P' noktasının koordinatları $(0, 0, z)$'dir ve dolayısıyla,

$$|PP'|^2 = x^2 + y^2,$$
$$|OP'|^2 = z^2$$

dir. Bundan da,

$$x^2 + y^2 = r^2z^2$$

denklemi bulunur. İşte bu, (0, 0, 0) merkezli ve ekseni z ekseni olan konilerin cebirsel denklemleridir.

Koniyle Düzlemlerin Kesişimi. Bir koniyle uzaydaki düzlemleri kesiştirelim ve bu kesişimle elde ettiğimiz eğrileri anlamaya çalışalım.

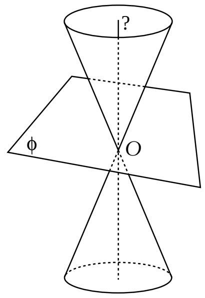
Koniyi sabitleyelim ve koniyle kesiştireceğimiz düzleme ϕ adını verelim. ϕ değiştikçe sabitlenen koniyle kesişimin nasıl bir eğri olduğunu bulacağız.

Bu kesişim eğrisi ϕ düzlemine göre değişir elbette ama hiçbir zaman boşküme olmaz, çünkü koninin yüzeyi "her iki tarafa doğru" sonsuza kadar genişleyerek gider.

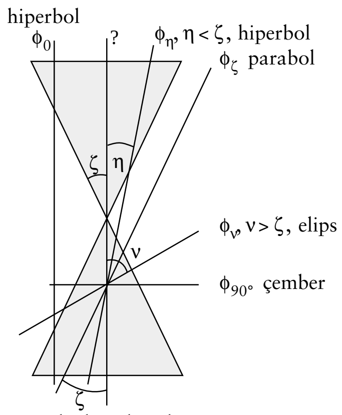
Önce ϕ düzleminin O noktasını içerdiği durumlara bakalım, bunların çözümlemesi oldukça kolay:

1. Eğer ϕ düzlemi, O noktasıyla birlikte koninin yatay doğrularından birini içeriyorsa, o zaman kesişim, aşağıdaki şekillerde görüldüğü gibi bir ya da iki yüzey doğrusudur; eğer düzlem koninin yüzüne teğetse kesişim tek bir doğrudur, yoksa iki doğrudur.

2. Eğer ϕ düzlemi O noktasını içeriyorsa ama koninin bir yüzey doğrusunu içermiyorsa, o zaman kesişimde sadece O noktası vardır. Solda bu durum resmedilmiştir.



Bundan böyle ϕ düzleminin koninin merkezi olan O noktasını içermediğini varsayalım. Bu durumda ϕ düzleminin koninin eksenini kestiği açının büyüklüğüne göre aşağıda teker teker ele alacağımız üç şık belirir. Bir sonraki şekilde durum özetleniyor. Şekilde, üç boyutlu uzaydaki nesnelerin sayfanın bulunduğu düzlemle kesişimi gösterilmiştir:

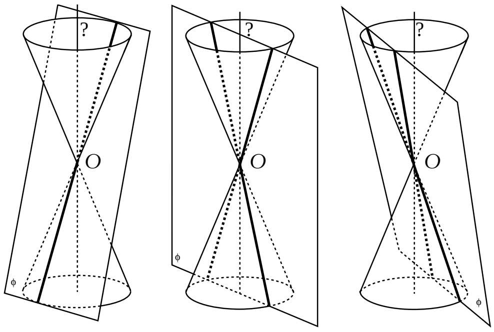


Koninin "tam cepheden" kesitleri. ϕ_0, ϕ_η, ϕ_ζ, ϕ_ν, ϕ_{90} düzlemleri koninin ? eksenini sırasıyla $0 < \eta < \zeta < \nu < 90$ derecelik açılarda kesiyor. ϕ_0 ve ϕ_η düzlemlerinin koniyle kesitleri birer hiperbol. ϕ_ζ'nın kesiti bir parabol, ϕ_ν'nın kesiti bir elips, ϕ_{90}'ın kesiti ise bir tür elips olan çember.

3. Düzlem, koninin ? eksenini, koninin ζ açısından daha büyük bir açıda keser. Düzlemin koninin ? eksenine dik olduğu durum bu şıkkın özel bir halidir; bu özel durumda kesişimin bir çember olduğunu biliyoruz, yazının birinci sayfasında görmüştük bunu. Düzelmin, koninin ? eksenini, koninin ζ açısından daha büyük bir açıda kestiği durumda kesişim, daha sonra kanıtlayacağımız üzere elipstir.

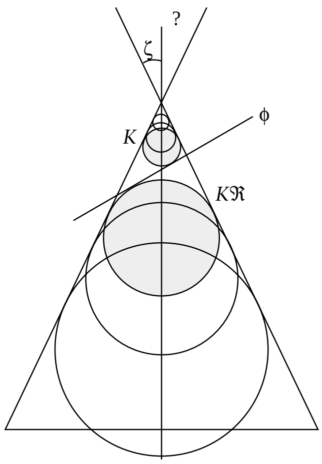
4. Düzlem, koninin ? eksenini koninin ζ açısından daha küçük bir açıda keser. Düzlemin ?'ye paralel olduğu durum (0 derecelik açı) bu şıkkın özel bir halidir. Bu durumda kesişim bir hiperboldür. Kesişimin hiperbol olması için düzlemin koninin her iki "tarafını" da kesmesi gerekir.

5. Düzlem koninin bir yüzey doğrusuna paraleldir. Yani düzlem ? eksenini koninin ζ açısına eşit açıda keser. Bu durumda kesişim bir paraboldür.



Şimdi yukarda resmettiğimiz bu üç durumu teker teker ele alalım.

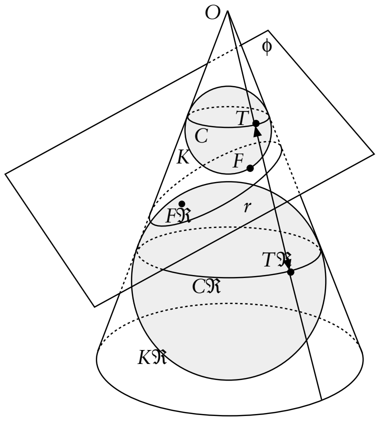
3. Düzlem, koninin ? eksenini, koninin ζ açısından daha büyük bir açıda kesiyorsa. Düzleme ϕ adını verelim. Koninin içine tam sığan (yani koninin içinde ve koniye bir çemberde teğet) ve ayrıca bir de ϕ düzlemine teğet, biri düzlemin bir tarafında, diğeri diğer tarafında olmak üzere tam iki tane küre vardır. Bu kürelere *K* ve *K*ℜadını verelim. Aşağıdaki şekilde bu kürelerin bir kesiti gösterilmiştir.



K ve *K*ℜkürelerinin koniye teğet oldukları çemberlere sırasıyla *C* ve *C*ℜadını verelim. (Bkz. yan sütunun tepesindeki şekil.) Koninin herhangi bir yüzey doğrusunu alalım ve bu doğrunun *C* ve *C*ℜçemberlerini (dolayısıyla *K* ve *K*ℜkürelerini de) kestikleri noktalara sırasıyla *T* ve *T*ℜdiyelim. |*TT*ℜ= *r* olsun.

Bu *r* uzunluğu seçilen *TT*ℜyüzey doğrusundan bağımsızdır, sadece ϕ düzlemine ve koniye göre değişir. Nitekim *r* sayısı *C* ve *C*ℜçemberlerinin birbirine en yakın iki noktası arasındaki mesafedir.

Son olarak, *K* ve *K*ℜkürelerinin ϕ düzlemine teğet olduğu noktalara sırasıyla *F* ve *F*ℜadını verelim. Bu noktalara *F* ve *F*ℜadını vermiş olmamız niyetimiz konusunda okura ipucu vermeli.



Koniyle ϕ düzleminin kesişiminin tam olarak

{*P* ⊂#ϕ : |*PF*| + |*PF*ℜ= *r*}

kümesi olduğunu, yani odak noktaları *F* ve *F*ℜve asal uzunluğu *r* olan bir elips olduğunu savlayıp hemen kanıta geçiyoruz. Eğer *F* = *F*ℜise, *F* merkezli bir çember elde ederiz elbette, bu da ancak ϕ düzlemi yataysa mümkündür.

Kanıtımıza başlayalım.

P, ϕ düzlemiyle koninin kesişiminden alınan herhangi bir nokta olsun. Aşağıdaki şekilden izleyelim. Koninin *OP* yüzey doğrusunu çizelim. Bu doğru *C* ve *C*ℜçemberlerini (dolayısıyla *K* ve *K*ℜkürelerini de) sırasıyla *S* ve *S*ℜnoktalarında kessin. Hem *PS* hem de *PF* doğrusu *K* küresine teğettir (çünkü *PF* doğru parçası, *K* küresine teğet olan ϕ düzlemindedir.) Demek ki

|*PS*| = |*PF*|.

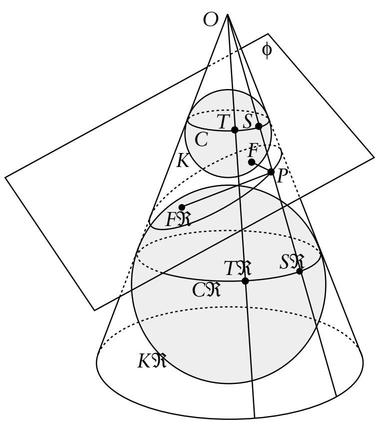
Benzer biçimde,

|*PS*ℜ= |*PF*ℜ

Bu iki eşitliği altalta toplarsak,

|*PF*| + |*PF*ℜ= |*PS*| + |*PS*ℜ= |*PT*| + |*PT*ℜ= |*TT*ℜ= *r*

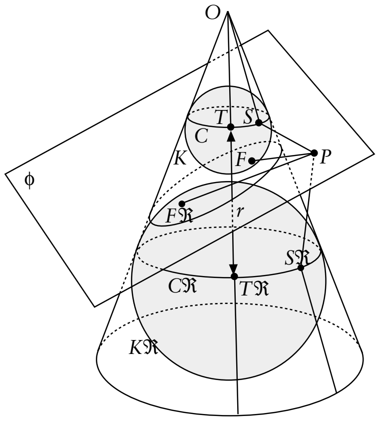
buluruz.



Bunun tersi de doğrudur: Eğer $P \subset\#\phi$,

$$|PF| + |PF\Re = r = |TT\Re$$

eşitliğini sağlıyorsa, o zaman P noktasının koninin üstünde olduğunu kanıtlayalım. S noktası, C çembe-



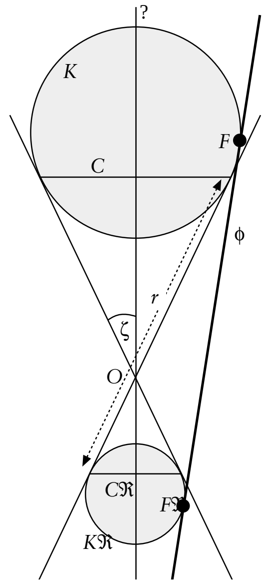
rinin P'ye en yakın noktası olsun. $S\Re$ noktası da $C\Re$ çemberinin üstünde aynı görevi görsün. O zaman,

$$|PF| + |PF\Re = r = |TT\Re \leq |SS\Re \leq |PS| + |PS\Re$$
$$\leq |PF| + |PF\Re$$

($|PS| \leq |PF|$, çünkü P'den geçen bir doğrunun küreyi kestiği iki noktadan P'ye en yakın olanının P'ye olan uzaklığı, P'den geçen ve küreye teğet olan doğrunun küreye değim noktasının P'ye olan uzaklığından daha küçüktür; sezgisel olarak da doğruluğu çok bariz olan bu olgu, bir noktanın bir çembere göre gücü [MD-2005-II, sayfa 40-44] kullanılarak kolaylıkla kanıtlanabilir.) Dolayısıyla $|SS\Re = |PS| + |PS\Re = |TT\Re$ Demek ki $|SS\Re$ iki çember arasındaki en kısa mesafedir. Ayrıca, bu eşitliklerden, P noktasının $SS\Re$ doğru parçasının üstünde, $SS\Re$ doğru parçasının da koninin üstünde olduğu çıkar. Demek ki P noktası da koninin üstünde. Kanıtımız bitmiştir.

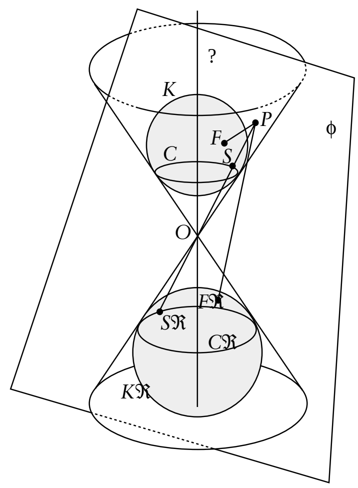
Burada bir de odak noktalarının nasıl bulunacağını gösterdik: Kürelerle düzlemin teğet noktaları. Bu sonuca Dandelin ve Quételet Teoremi adı verilir.

4. Düzlem, koninin ? eksenini ζ'dan daha küçük bir açıda kesiyorsa. Kanıtımız aynen yukardaki gibi olacak, bir önceki şıkla aynı inşaatı yapacağız. Sağ sütundaki şekillerden takip edin. Koniye cuk oturan, yani koniye bir çemberde teğet olan kürelerden ikisi ayrıca düzleme de teğettir. Bir önceki şıkkın tersine bu iki küre bu sefer düzlemin aynı tarafında yer alırlar. Bu kürelere K ve $K\Re$ diyelim. Kürelerin koniyle kesişimi olan çemberlere de sırasıyla C ve $C\Re$ diyelim. (Bkz. sağ sütundaki ikinci şekil.) F



ve $F\Re$ noktaları, bir önceki şıkta olduğu gibi gene K ve $K\Re$ kürelerinin düzlemle kesişim noktaları olsun, bu sırayla elbet. C ve $C\Re$ çemberleri arasındaki "çapraz mesafe" (yani O'dan geçen en kısa yolun uzunluğu) r olsun. Demek ki, C çemberinde alınan herhangi bir S noktası için, $S\Re OS$ doğrusuyla $C\Re$ çemberinin kesişim noktasıysa, $r = |SS\Re$ dir.

Şimdi P, düzlemle koninin kesişiminden alınmış herhangi bir nokta olsun. PF ve $PF\Re$ doğruları, düzlemde olduklarından, küreye F ve $F\Re$ noktalarında teğettirler. PO doğrusunu çizelim. Bu doğru koninin bir yatay doğrusudur ve C ve $C\Re$ çemberlerini keser, bu kesişim noktalarına sırasıyla S ve $S\Re$ diyelim. PS ve $PS\Re$ doğruları da K ve $K\Re$ kürelerine S ve $S\Re$ noktalarında teğetler. Demek ki $|PS| = |PF|$ ve $|PS\Re = |PF\Re$ Dolayısıyla,



ϕ düzlemiyle koninin kesişimi olan eğriyi (hiperbolü) çizemedik, çok zor geldi.

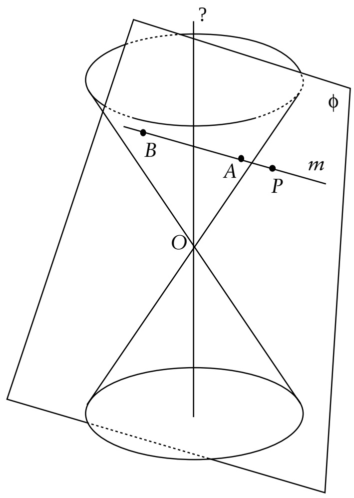
||*PF*| 4 |*PF*𝔑 = ||*PS*| 4 |*PS*𝔑 = |*SS*ℜ= |*TT*ℜ= *r*.
Böylece koniyle düzlemin kesişiminin,

{*P* ⊂#ϕ : ||*PF*| 4 |*PF*𝔑 = *r*}

kümesinin bir altkümesi olduğunu göstermiş olduk. Bu kümeye *H* diyelim:

H = {*P* ⊂#ϕ : ||*PF*| 4 |*PF*𝔑 = *r*}.

Demek ki *K* ~ #ϕ#⊇ *H*. Tersini, yani *H* ≥ #*K* ~ #ϕ#ilişkisini göstermek kaldı. Tuhaf bir biçimde *H* ≥ #*K* ~ ϕ#ilişkisinin kanıtına kaynaklarda rastlayamadık. Elips şıkkında da kanıtın bu kısmı gördüğümüz kadarıyla atlanmış.

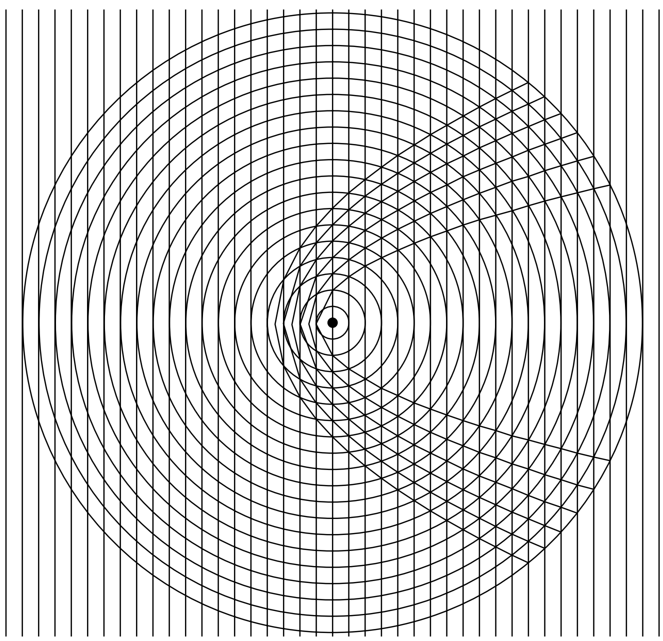


Bu arada *H* kümesinin ϕ düzlemi üstünde bir hiperbol olduğuna dikkatinizi çekerim.

P ⊂ *H* olsun. Demek ki *P* ⊂ ϕ. *P*'nin koninin üstünde olduğunu göstereceğiz. ϕ düzlemi üstünde koninin bir yüzey doğrusuna paralel sadece iki doğru olabilir, çünkü ϕ düzlemini öteleyerek *P*'yi *O*'ya getirirsek, kaydırılmış ϕ düzlemi koniyi sadece bu iki doğruda keser. ϕ düzlemi üstünde ve *P*'den geçen ama bu iki doğrudan birine eşit olmayan bir ? doğrusu alalım. ? doğrusu koniyi iki değişik noktada keser. Bu noktalara *A* ve *B* diyelim. *A* ve *B* noktaları hem ϕ düzleminde hem de koninin üstünde, dolayısıyla, yukarda yaptığımızdan, hiperbolün üstündeler. Demek ki *A*, *B* ve *P* noktaları *PF* doğrusuyla hiperbolün kesişiminde. Ama bir doğruyla bir hiperbol en fazla iki noktada kesişirler. Demek ki *P* noktası ya *A*'ya ya da *B*'ye eşit, yani koninin üstünde.

4. Düzlem, koninin ? eksenini ζ açısıyla kesiyorsa. Bu durumda kesişim bir parabole eşit. Kanıtı okura alıştırma olarak bırakıyoruz. ♦

Çember ve doğrularla parabol çizmek



Çemberlerle doğruların kesişimlerini birleştirerek parabol elde edebiliriz. Yukardaki parabollerin odak noktası çemberlerin ortak merkezidir. Dikey doğrular parabollerin doğrultaylarıdır. Bir parabolün *P* noktaları odağa ve doğrultaya eşit uzaklıkta olduğundan yukardaki parabollerin doğrultaylarını bulabilirsiniz.