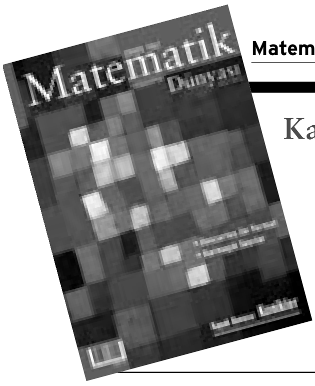
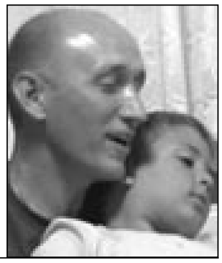


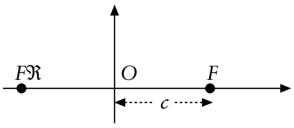
Kapak Konusu: Poncelet Teoremleri

Cassini Eğrileri ve Lemniskat



Andrei Ratiu* / *ratiu@bilgi.edu.tr*

x ekseni üzerinde orijinden uzaklığı c olan iki F ve F' noktası alalım. Geçen sayımızda F ve F' noktalarına olan uzaklıklarının toplamı bir sabit olan noktalar kümesinin bir elips olduğunu görmüştük (MD-2005-II, sayfa xx-xx). Demek ki, eğer bu sabite $2a$ dersek, düzlemin



$$|PF| + |PF'| = 2a$$

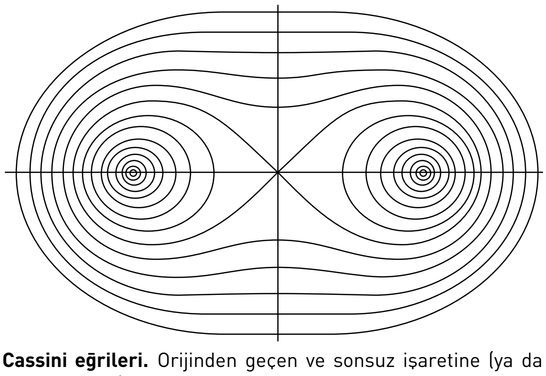
eşitliğini sağlayan P noktaları kümesi bir elipstir.

Uzaklıkların toplamının sabit olduğu noktalara bakacağımıza, uzaklıkların çarpımının sabit olduğu noktalara bakarsak ne elde ederiz? Bu sabite bu sefer (elipste olduğu gibi $2a$ yerine) a^2 diyelim. Demek ki, düzlemin

$$|PF| \cdot |PF'| = a^2$$

eşitliğini sağlayan P noktaları kümesine bakıyoruz. Bu kümeye $\mathcal{C}_a$ diyelim. Bunlara ***Cassini eğrisi*** adı verilir.

Elipsin tersine, bu eğrilerin şekli ve özellikleri, aşağıda görüldüğü gibi a sabitine göre değişir.



Cassini eğrileri. Orijinden geçen ve sonsuz işaretine (ya da yatan bir 8'e) benzeyen eğri $a = c$ için elde edilen Cassini eğrisidir. $a > c$ için Cassini eğrileri bu "8 eğrisi"nin dışındadır.

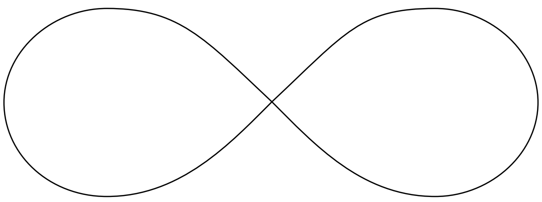
Dikkat ederseniz, orijinin Cassini eğrisinde olması için, yani

$$|OF| \cdot |OF'| = a^2$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$c^2 = |OF| \cdot |OF'| = a^2,$$

yani $c = a$ eşitliğidir. Demek ki orijin sadece $\mathcal{C}_c$ Cassini eğrisinin üstündedir, diğerlerinin üstünde değildir. Kendi kendini kesen bu $\mathcal{C}_c$ Cassini eğrisi sonsuz işaretine benzer; hatta bazı karakter tiplerinde sonsuz işareti $\mathcal{C}_c$ Cassini eğrisi olarak gösterilir. Bu önemli eğriyi bir kez daha çizelim:

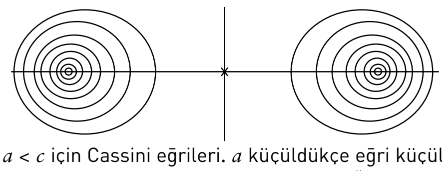


Sonsuzluk simgesi ∞ imi ilk kez 1655'te Wallis tarafından kullanılmıştır.

Cassini eğrisi y eksenini keser mi? Bazen keser bazen kesmez, a ve c'ye göre değişir. Böyle bir olası kesişim noktasına $P(0, b)$ dersek, o zaman $|PF| = |PF'|$ ve $a^2 = |PF| \cdot |PF'| = |PF|^2 = b^2 + c^2$, yani $a \geq c$ olur. Bu koşulun Cassini eğrisi y eksenini kesmesi için yeterli olduğu da aynen böyle kanıtlanır.

Yan sütundaki şekilden de görüleceği üzere, $c < a$ ve $c > a$ durumlarında Cassini eğrileri iki değişik tavır sergiliyorlar. Bunlara bir de ayrıca $c = a$ şıkkı ekleniyor.

Eğer $a < c$ ise, Cassini eğrisi birbirine y eksenine göre simetrik ve odak noktalarının her birini içlerinde bulunduran iki ayrık parçadan oluşur.



$a < c$ için Cassini eğrileri. a küçüldükçe eğri küçülür. $a = 0$ için sadece F ve F' noktalarından oluşan "dejenere" eğri bulunur.

Eğer $a > c$ ise, Cassini eğrisi fasulyeyi andıran tekparça bir eğridir. Bu eğrileri bir sonraki sayfada ayrıca çizdik. Bunlar $\mathcal{C}_a$ ***basit*** (yani kendi kendini kesmeyen) ve kapalı eğrilerdir. Eğer $a \geq \sqrt{2}c$ ise $\mathcal{C}_a$ Cassini eğrileri dışbükey olurlar ve o zaman ***Cassi-***

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.

Giovanni Cassini ve Astronomi

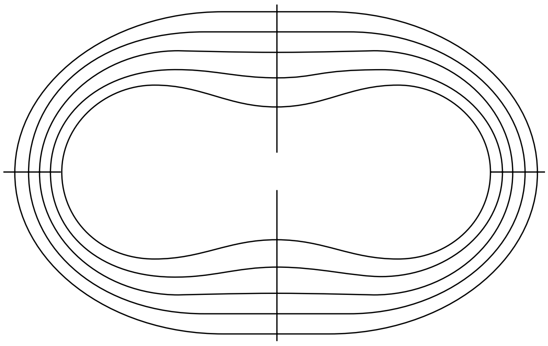
Giovanni Cassini (1625-1712) İtalyan-Fransız astronom. Jüpiter'in ve Mars'ın kendi etrafında dönüş süresini (bu sonuncusunu sadece 3 dakikalık bir hatayla) hesaplamış ve Jüpiter'in aylarının pozisyonlarının bir cetvelini çıkarmıştır. Ayrıca Satürn'ün Iapetus, Rhea, Dione ve Tethys uydularını bulmuştur.

Jüpiter'in uydularının pozisyonlarını hesaplarken gördüğü tutarsızlıklardan yola çıkarak ışığın sonlu bir hızı olabileceğini ve ışığın Güneş'ten Dünya'ya 10-11 dakikada geldiğini düşünmüş, ki aşağı yukarı 250.000 km/s'ye tekabül eder bu hız. Işığın gerçek hızı 299.792.458 m/s'dir; ancak o zamanlar Dünya'yla Güneş arasındaki mesafe bilinmediğinden bu hız elde edilemezdi. Ama daha sonra bu düşünceyi saçma bularak reddetmiştir. Bundan 7 yıl sonra, 1676'da, Danimarkalı astronom Ole Römer'in Cassini'nin verilerinden de yararlanarak ışığın hızını %3'lük bir hatayla (gerçeğinden daha hızlı) tahmin etmesi ilginçtir.

Sicilyalı (yani Yunan!) şair ve filozof Empedocles (MÖ 492-432) ışığın sonlu bir hızı olabileceğini ilk düşünenlerdendir. Aristo (MÖ 384-322) bu düşünceyi reddetmiştir. Arap bilginleri İbni Sina (980-1037) ve Alhazen (965-1039) ışık hızının sonlu olduğunu düşünmüş, ancak bu düşünceleri Batı'ya ulaşmamış ya da Batı'yı etkilememiş olacak ki 600 yıl sonra Kepler (1571-1630) ve Descartes (1596-1650) bile ışığın hızının çağdaşları gibi sonsuz olduğunu düşünmüştür, çünkü uzayda ışığı yavaşlatacak hiçbir şey yoktur. Galileo (1564-1642) en azından ışığın sesten daha hızlı gittiğini düşünmüş ve ışık hızını ölçmek için herhangi bir sonuca varmayan deneyler yapmıştır.

Cassini öğrenciyken şiire, matematiğe ve astronomiye ilgi duymuştur. İnanmamasına karşın en çok astrolojiyle ilgilenirdi; bu konuda eline ne geçtiyse okumuş ve kısa zamanda derin bir astroloji bilgisine (!) sahip olmuştur. İlk işi de bir Bolonya soylusu yanında astrologluk olmuştur.

17'nci yüzyılda astronomların en ilgi çekici konusu güneş sistemiydi. Kopernik (1473-1543) 1512'de Samos'lu Aristarcus'un (MÖ 3 yy) ve İskenderiyeli Ptoleme'nin (MS 87-150) öne sürdüğü gibi Dünya'nın değil Güneş'in evrenin (yani güneş sisteminin) merkezi olduğunu ileri sürmüştü. Bilindiği üzere Galileo, Kopernik'in güneş merkezli kuramına inanan ve bu kuramı inatla savunan biriydi ve bu yüzden Engizisyon mahkemeleri tarafından hapsedilmişti. Cassini ise genç yaşlarında Kopernik'in teorisini reddederek Dünya'nın evrenin merkezi olduğuna inanmış, ama daha sonra 1630'a doğru Brahe Tycho'nun (bkz. sayfa 112) kuramını kabul etmiştir. Brahe Tycho'nun kuramına göre Ay ve Güneş Dünya'nın etrafında, diğer gezegenler ise Güneş'in etrafında dönüyorlardı. Aslında Tycho Brahe'nin böyle bir güneş sistemine inanması yeterince nedeni vardı: Ölçümlerine göre ya evren inanılmaz büyüktü ve kullandığı aletler yeterince hassas değildi ya da güneş sistemi böyle olmalıydı. Nitekim 1838'de Bessel, Brahe Tycho'nun deneylerini yaptığında, bulduğu ölçümler Tycho'nun aletlerinin yapabileceği hatanın yüzde biri kadardı. Alman matematikçi ve astronom Erasmus Reinhold, Tycho'dan birkaç yıl önce aynı kuramı ortaya atmıştı. (Demek istediğimiz, insanların dünyanın evrenin merkezi olduğuna inanması hiç de sanıldığı gibi gerekçesiz ve sadece hurafeden ibaret değildi.)



ni ovalleri adını alırlar çünkü basit, kapalı ve dışbükey eğrilere ***oval*** adı verilir. Örneğin elipsler de ovaldirler; elipsler Cassini ovallerine çok benzerler ama değildirler.

Önce Cassini eğrilerinin denklemini bulalım. Cassini eğrisi üstünde bulunan bir P noktasının koordinatlarına (x, y) dersek,

$$|PF| \mid \sqrt{/x \, 4 \, c0^2 \, 2 \, y^2} \mid \sqrt{x^2 \, 2 \, y^2 \, 2 \, c^2 \, 4 \, 2cx}$$

buluruz. $/PF/\wr PF\Re = a^2$ formülünün karesini alarak,

$$a^4 = (x^2 + y^2 + c^2 \; 4 \; 2cx)(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx)$$

ve

$$/x^2 \, 2 \, y^2 0^2 \, 2 \, 2c^2/y^2 \, 4 \, x^2 0 \mid a^4 \, 4 \, c^4$$

buluruz. Demek ki, $\mathcal{C}_a$ Cassini eğrisinin

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 \; 4 \; 4c^2x^2 = a^4$$

ya da buna eşdeğer olan

$$(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 \; 4 \; x^2)^2 = a^4 \; 4 \; c^4$$

dür. Dördüncü dereceden bir polinom tarafından verilen eğrilere ***kuartik*** (quartic) ya da ***dördül*** (?) denir. Elipslerden esinlenerek, F ve $F\Re$ noktalarına ***odak noktaları*** ve $2c$ sayısına da ***odak mesafesi*** adı verilir.

Bernoulli Lemniskatı

Eğer $a = c$ ise, daha önce de belirttiğimiz gibi,

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 \; 4 \; y^2)$$

denklemiyle verilen $\mathcal{C}_c$ Cassini eğrisi kendini keser. Bu eğriler biraz daha yakından bakılmaya değerdir. $\mathcal{C}_c$ eğrisi tekparçadır, yani el kâğıttan kalkmadan çizilebilir. Orijinden iki kez geçer, yani orijinde bir ***düğüm*** oluşur. Bu eğri ayrıca ***Bernoulli Lemniskat***'ı ya da ***sekiz eğrisi*** olarak da bilinir (lemniscatus, Latince "sarkan kurdele" demektir). Jacob Bernoulli'nin 1694'de bulduğu bu eğrinin 1680'de Cassini'nin bulduğu familyanın bir üyesi olduğu aşağı yukarı 100 yıl sonra anlaşılmıştır.

Cassini, kendi adıyla anılan bu eğrileri Dünya'yla Güneş'in birbirine göre yörüngeleri üzerine düşünürken bulmuştur. Kepler'in eliptik yörünge kuramını reddetmiş, Güneş'i sabit alırsak, dünyanın yörüngesinin bir Cassini eğrisi olduğunu ileri sürmüştür. Cassini'ye göre Güneş bu eğrinin odak noktalarından biri üstündeydi. Kepler'in haklı olduğunu anlamak için Newton'ı beklemek gerekti.

Karmaşık Sayılarda Yorum. $'^2$ düzleminin her (x, y) noktasını karmaşık sayıların $z = x + iy \subset\, !$ karmaşık sayısını olarak görebileceğimizi biliyoruz [MD-2005-II, sayfa xx-xx]. Böylece her Cassini eğrisi karmaşık sayılar kümesinin bir altkümesi olarak görülebilir.

Karmaşık sayıları kullanırsak ve $P(x, y)$ noktası yerine $z = x + iy$ karmaşık sayısı yazarsak, Cassini eğrisinin formülü,

$$/z \; 4 \; c/\wr z + c/ = a^2,$$

yani

$$/z^2 \; 4 \; c^2/ = a^2$$

biçiminde yazılır. Bu formül sayesinde Cassini eğrilerini başka türlü yorumlayabiliriz:

Karmaşık sayılarda $z \;:\; z^2$ "kare alma" fonksiyonuna bakalım. Orijin dışında, karmaşık sayılarda (gerçel sayılarda da) kare alma fonksiyonu ikiye birdir, yani bu fonksiyon iki değişik karmaşık sayıyı (z ve $4z$ sayılarını) aynı sayıya (z^2 sayısına) götürür. Örneğin, bu fonksiyonla F ve $F\Re$ odak noktaları, koordinatları $(c^2, 0)$ olan H noktasına giderler.

Gerçel sayılarda kare alma fonksiyonunun imgesi negatif olmayan sayılardır, çünkü negatif bir gerçel sayı bir başka gerçel sayının karesi olamaz) ama karmaşık sayılarda her sayının karekökü olduğundan (MD-2005-II, sayfa xx), kare alma fonksiyonu karmaşık sayılarda örten bir fonksiyondur; örneğin $i^2 = 41$. Daha da genel olarak, eğer bir z karmaşık sayısını,

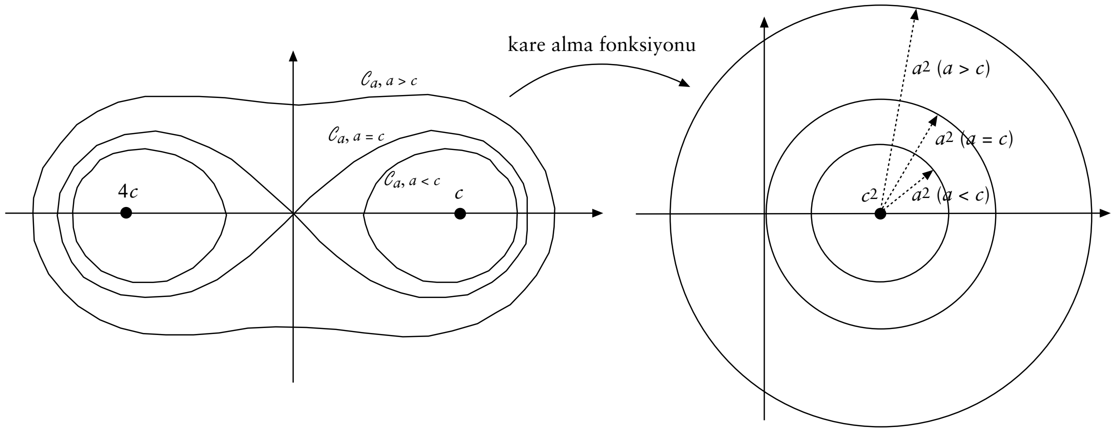
$$z = r \operatorname{cis} \chi$$

olarak kutupsal biçiminde yazarsak (burada $r \subset\, '^{\geq 0}$, $\chi \# \subset [0, 2\phi)$ ve $\operatorname{cis} \chi \# = \cos \chi + i \sin \chi$), o zaman

$$(\partial\sqrt{r} \; \operatorname{cis} \chi/2)^2 = z$$

dir.

Yukarda bulduğumuz $/z^2 \; 4 \; c^2/ = a^2$ formülüne bakar bakmaz görüleceği gibi, $\mathcal{C}_a$ Cassini eğrisi, karmaşık sayıların altkümesi olarak görüldüğünde, kare alma fonksiyonu altında merkezi $H(c^2, 0)$



ve yarıçapı a^2 olan çembere dönüşür. Yani Cassini eğrileri çemberlerin kare alma fonksiyonu altındaki önimgeleridir. Bu dediğimizin resmini yukarda bulacaksınız.

$\mathcal{C}_a$ Cassini eğrilerinin x ve y eksenleriyle kesişimini bulmak çok kolay; Cassini eğrisinin yukarda gri kutuda bulduğumuz

$$(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) = a^4 - c^4.$$

formülünde sırasıyla $y = 0$ ve $x = 0$ alıp x ve y'yi bulmak yeterli.

Önce x ekseniyle kesişimini bulalım. Yukardaki formülde $y = 0$ yapalım.

$$x^4 - 2c^2x^2 = a^4 - c^4$$

buluruz. Bu denklemi çözmek kolay:

$$x = \pm\sqrt{c^2 \pm a^2}$$

bulunur. Eğer $a < c$ ise 4 çözüm, eğer $a = c$ ise, biri 0 çözümü olmak üzere 3 çözüm, eğer $a > c$ ise 2 çözüm vardır, aynen beklenildiği gibi...

Aynı yöntemle Cassini eğrilerinin y ekseniyle de kesişimleri bulunur:

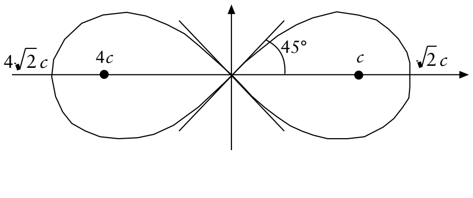
$$y = \pm\sqrt{a^2 - c^2}.$$

Beklenildiği gibi, eğer $a < c$ ise Cassini eğrileri y ekseniyle kesişmez.

$a = c$ şıkkında, yani Bernouilli Lemiskatı'nda x ekseniyle kesişimi, orijin dışında,

$$x = \pm\sqrt{2}\,c$$

dir. Ayrıca orijindeki teğetlerin $x = \pm y$ denklemleriyle verilmiş doğrular olduğu kolaylıkla kanıtlanır. (İpucu: $y = mx$ doğrusuyla lemniskatı kesiştirin. Ne zaman tek bir kesişim noktası buluyorsunuz?)



Lemniskatla hiperbol arasında ilginç bir ilişki vardır. Aynı düzleme

$$(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) = 0$$

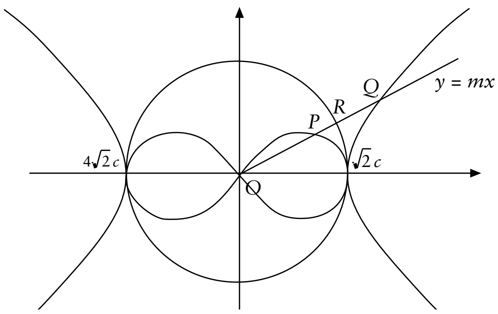
lemniskatı'nı, bu lemniskatı çevreleyen

$$x^2 + y^2 = 2c^2$$

çevrel çemberi ve

$$x^2 - y^2 = 2c^2$$

denklemiyle verilmiş hiperbolü çizelim. Eğimi $m < 1$ olan ve O'dan çıkan herhangi bir ışın alalım. Bu



ışın yukardaki üç eğriyi sırasıyla P, R ve Q noktalarında kessin. Kolay bir hesapla,

$$|OP|^2 = \frac{2c^2(1 - m^2)}{1 + m^2},$$

$$|OR|^2 = 2c^2$$

Birbirinin Tersi Eğriler

Merkezi O ve yarıçapı r olan bir çember verilmiş olsun. Eğer O, P ve Q noktaları doğrusalsa ve $|OP|\cdot|OQ| = r^2$ eşitliğini sağlanıyorsa, P ve Q noktalarına ***çembere göre birbirinin tersi*** denir. Eğer P noktası bir $\mathcal{C}_1$ eğrisinin üstünde dolaşırsa, P'nin tersi olan Q noktaları da bir başka $\mathcal{C}_2$ eğrisinin üstünde dolaşır. $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ eğrilerine ***çembere göre birbirinin tersi*** denir.

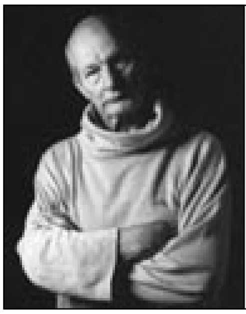
ve

$$|OQ|^2 = \frac{2c^2(1+m^2)}{1-m^2}$$

bulunur. Demek ki

$$|OP|\cdot|OQ| = |OR|^2 = 2c^2.$$

Bu durumda, lemniskatın çevrel çemberine göre ters eğrisi hiperboldür" denir. (Bkz. bir önceki sayfanın en altındaki gri kutu.)



Batı müziğinin en uzun bestesi Hollandalı besteci Simeon ten Holt (d. 1923) tarafından bestelenen Lemniscate'tir. Adının nereden kaynaklandığı anlaşılıyordur herhalde...

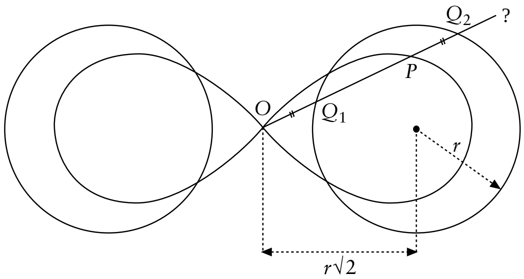
Lemniskat Nasıl Çizilir?

1. r yarıçaplı bir çember çizelim.

2. Bu çemberin merkezinden $r\sqrt{2}$ uzaklıkta bir O noktası alalım.

3. O'dan çemberi iki noktada kesen bir ? doğrusu çizelim.

4. Bu doğru çemberi Q_1 ve Q_2 noktalarında kessin.



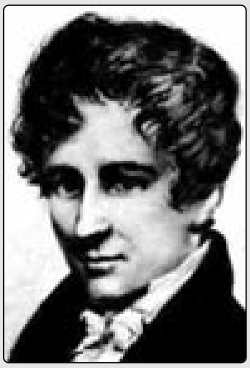
Lemniskat çizen bir alet.
Ödüllü Soru: Bu alet nasıl olur da lemniskat çizer?

Gauss'la Abel Lemniskat Peşinde

Gauss, 1797'de lemniskatı çentiksiz cetvel ve pergelle beş eşit parçaya bölmeyi başarmıştır. Abel, Gauss'un araştırmasından bağımsız olarak aynı konuda düşünmüş ve lemniskatın çentiksiz cetvel ve pergelle n eşit parçaya bölünmesi için birbirinden farklı $p_1, \ldots, p_k$ Fermat asalları [MD-2005-x, sayfa xx] için,

$$n = 2^a p_1 \ldots p_k$$

eşitliğinin doğru olması gerektiğini kanıtlamıştır.



Niels Abel (1802-1829)

5. Q_1 ve Q_2 noktaları arasında $|OQ_1| = |PQ_2|$ eşitliğini sağlayan P noktası alalım.

İşte bu yöntemle bulunan P noktaları kümesi lemniskatın bir yarısıdır. Lemniskatın diğer yarısı çemberin simetriği alınarak bulunur.

Ödüllü Soru: Bu çizim neden bir lemniskat verir? ♦

Pi'imtırak Bir Sayı

Gauss ve Euler'in lemniskat eğrisinin uzunluğunu hesaplama uğraşları daha sonra ***elliptik fonksiyon*** adıyla bilinen fonksiyonların bulunmasına yol açmıştır.

Lemniskat'ın alanı $2c^2$'dir. Uzunluğu ise φ diye yazılan ve ***lemniskat sabiti*** olarak anılan

$$\varphi = 2{,}6220575543\ldots$$

sayısıyla doğrudan orantılıdır. Lemniskatın uzun-

$$\varphi = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

luğu tam olarak $2\varphi a$'dır. Burada, $a = c\sqrt{2}$'dir ve dir. φ harfi, Yunan alfabesinin el yazısı ϕ'sidir ve matematiksel olarak lemniskatlar için çemberde ϕ'nin oynadığı rolü oynar. Yukardaki formülle şu formülü karşılaştırmak ilginç olacaktır:

$$\phi = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$